ग्रह-गति-सिद्धांत

ग्रह-गति-सिद्धांत

ज्योतिःशास्त्रविषयक गणित ग्रंथमाला

ग्रह - गति - सिद्धांत

किंवा

ज्योतिर्गणिताचीं मूलतत्त्वें



लेखक

शिवराम गणपतराव पवार, गणकचूडामणि

पहिली आवृत्ती १९६८

प्रकाशक :

महाराष्ट्र राज्य
साहित्य आणि संस्कृति मंडळ,
सचिवालय (विस्तार भवन)
मुंबई-३२.

मुद्रक :

शासकीय मुद्रणालय,
नागपूर-१.

किंमत रु. १०·५०

निवेदन

मराठी भाषेला विद्यापीठाच्या भाषेचा दर्जा येण्याकरिता मराठीत विज्ञान, तत्त्वज्ञान, सामाजिक शास्त्रें आणि तंत्रविज्ञान या विषयांवरील ग्रंथांची रचना मोठ्या प्रमाणात होण्याची आवश्यकता आहे. वरील विषयांवर केवळ परिभाषाकोष अथवा पाठ्य पुस्तके प्रकाशित करून अशा प्रकारचा दर्जा मराठी भाषेला प्राप्त होणार नाही. सर्वसामान्य सुशिक्षितांपासून तो प्रज्ञावंत पंडितांपर्यन्त मान्य होतील अशा ग्रंथांची रचना व्हावयास पाहिजे. मराठी भाषेत किंवा अन्य भारतीय भाषांमध्ये विज्ञान, सामाजिक शास्त्रें व तंत्रविज्ञान या विषयांचे प्रतिपादन करावयास उपयुक्त अशा परिभाषा-सूची किंवा परिभाषा-कोष तयार होत आहेत. परिभाषा किंवा शब्द यांचा प्रतिपादनाच्या ओघात समर्पकपणे वारंवार प्रतिष्ठित लेखांत व ग्रंथांत उपयोग केल्यानेच अर्थ व्यक्त करण्याची त्यात शक्ति येते. अशा तऱ्हेने उपयोगात न आलेले शब्द केवळ कोषात पडून राहिल्याने अर्थशून्य रहातात. म्हणून मराठीला आधुनिक

ज्ञानविज्ञानांची भाषा बनविण्याकरिता शासन, विद्यापीठे, प्रकाशन संस्था व त्या त्या विषयांचे कुशल लेखक यांनी ग्रंथरचना करणे आवश्यक आहे.

वरील उद्देश ध्यानात ठेवून महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळाने आपला वाङ्मयीन कार्यक्रम आखला आहे. मंडळाच्या वाङ्मयीन कार्याचा एक भाग म्हणून "विज्ञानमाला" सुरू केली असून सामान्य सुशिक्षित वाचकवर्गाकरिता विज्ञानविषयक सुबोध भाषेत लिहिलेली पुस्तकें प्रकाशित करून स्वल्प किंमतीत देण्याची व्यवस्था केली आहे. या मालेत आजवर विविध शास्त्रीय विषयांवर एकूण अकरा पुस्तकें मंडळाने प्रकाशित केली आहेत. कै. शि. ग. पवार यांनी लिहिलेले ग्रहगतिसिद्धांत हे या मालेतील बारावे पुष्प होय.

लक्ष्मणशास्त्री जोशी,

अध्यक्ष,

महाराष्ट्र राज्य साहित्य आणि संस्कृति मंडळ.

ग्रहगतिसिद्धांत कर्ते

कै. शिवराम गणपतराव पवार

(गणकचूडामणि)

लेखक : गंगाधर रामकृष्ण देव, नागपूर
(नागपूर-टिळक-पंचांग कर्ते)

कै. शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार हे अहमदनगर जिल्ह्या-तील राहुरी तालुक्यातील सुमारे ७५० लोकवस्तीच्या सडे नावाच्या गावातील एका शेतकरी कुटुंबातील मराठा जातीचे गृहस्थ. दादासाहेबांचा जन्म राहुरी येथे ज्येष्ट शुक्ल १२ शके १७८८, शुक्रवार, तारीख २५ मे सन १८६६ रोजी झाला. त्यांचे शिक्षण फक्त प्राथमिक थर्ड इअर ट्रेनिंग झाले होते. पण ते फार बुद्धिमान गृहस्थ होते. पुणे ट्रेनिंग कॉलेजातील तिसऱ्या वर्षाची परीक्षा सन १८९० मध्ये उत्तीर्ण झाल्यानंतर त्यांनी शाळाखात्यात नोकरी केली. प्राथमिक शिक्षक या नात्याने अहमदनगर जिल्ह्यात आणि पुणे ट्रेनिंग कॉलेज प्रॅक्टिसिंग स्कूलमध्ये

नोकरी केली. त्या खात्यात ते असि. डे. एज्यु. इन्स्पेक्टरच्या जागे-पर्यंत चढले आणि योग्यवेळी सेवानिवृत्त होऊन त्यांनी पेन्शन घेतले. पेन्शन घेतल्यानंतर ते आपल्या मूळगावी सडे येथे स्थायिक झाले. काही दिवस ते अहमदनगरच्या डिस्ट्रिक्ट स्कूलबोर्डाचे सदस्य होते.

ट्रेनिंग कालेजमध्ये असताना कै. पवार यांनी तेथील शिक्षक, श्री. रावजीशास्त्री देवकुळे यांचेजवळ फावल्या वेळात सरलत्रिकोणमिती, गोलियत्रिकोणामिती, बैज्यभूमिती या विषयांचा अभ्यास केला. श्री. रावजीशास्त्री देवकुळे यांची एक "स्वयंशिक्षण पद्धती" अशी एक विशिष्ट पद्धती होती. ती त्यांनी कै. पवार यांना समजावून दिली होती. जात व परंपरा अनुकूल नसता आणि इंग्रजीचेही विशेष ज्ञान नसता त्यांनी स्वावलंबी शिक्षण पद्धतीने गणिताच्या उच्च शाखांचा अभ्यास केला आणि ज्योतिःशास्त्राचे चांगले ज्ञान संपादन केले. या पद्धतीने त्यांनी सूक्ष्मांशगणित आणि परमाणू-गणितशास्त्र यांचे इंग्रजी ग्रंथावरून चांगले ज्ञान संपादिले. यानंतर आपल्या भारतीय जोतिःशास्त्रातील जुन्या सिद्धांतादि ग्रंथाचे वाचनही त्यांनी केले. संस्कृत भाषेचे ज्ञान कमी असल्यामुळे हे जुन्या ग्रंथाचे वाचन दुसऱ्याच्या सहाय्याने त्यांना करावे लागले.

ज्योतिःशास्त्राचे अध्ययन करीत असतानाच आपण काही स्वतंत्र ग्रंथाची रचना करावी आणि ज्योतिःशास्त्रातील पूर्वीच्या पौर्वात्य आणि पाश्चिमात्य रीतींची छाननी करून आपणास त्यात काही शुद्धता, अगर सुलभता आणता आली तर आणावी ही दृष्टी त्यांनी ठेवली होती. अर्थात् ह्या विषयाचे अध्ययन करीत असताना जुन्या ग्रंथात करण्यासारख्या पुष्कळच सुधारणा आणि नवीन विचारही त्यांना सुचले. त्यांनी तत्संबंधी टिप्पणे, टाचणे तयार करून ठेविली होती.

कै. दादासाहेब पवार यांचा मुख्य आणि महत्त्वाचा ग्रंथ "ग्रहगति-सिद्धांत" हा होय. या ग्रंथाचे लेखन आणि जुळवणी ते सुमारे २५ ते ३० वर्षेपर्यंत करीत होते. या ग्रंथाची प्रेस कॉपी स्वतः ग्रंथकर्त्याने आपल्या सुवाच्य, सुबोध आणि सुंदर अक्षरात शके १८५८ संवत् १९९३ इ. सन १९३६ मध्ये तयार केली. त्यांचा प्रसिद्ध झालेला पहिला ग्रंथ

"करणकौमुदी" हा शके १८२८ सन १९०७ साली प्रसिद्ध झाला. हा ग्रंथ लोकमान्य टिळक यांना दाखविण्यात आला होता आणि सांगली संमेलनात ठरल्याप्रमाणे पंचांगशोधन सभेने हा "करणकौमुदी" ग्रंथ मागविला होता. "रेवतियोग तारेचा शोध" ही लेखमाला त्यांनी "केसरीतून शके १८५३ म्हणजे सन १९३२ च्या जानेवारी-फेब्रुवारी मध्ये" प्रसिद्ध केली. या लेखमालेत ज्योतिष्यगणिताचे आरंभस्थान रेवतियोग ताराच आहे असे त्यांनी सिद्ध केले आहे. सूर्यसिद्धान्तादि ग्रंथात निरयण-गणनेचे आरंभस्थान रेवतियोग तारा हेच आहे. यामुळे प्रस्तुत काळी अयनांश सुमारे १९ अंश हे त्यांनी गणिताने दाखवून दिले आहे. कै. दादासाहेब पवार यांचा दुसरा प्रकाशित ग्रंथ "सूर्येन्दुस्थान-मान" हा बडोद्याचे सयाजीराव महाराज गायकवाड यांच्या द्रव्य-साहाय्याने शके १८१९ म्हणजे सन १९३७ मध्ये प्रसिद्ध झाला आहे. कै. पवार यांचा तिसरा ग्रंथ "उपरागविज्ञान" हा हस्तलिखित स्वरूपातच आहे. या ग्रंथात चंद्रग्रहण आणि सूर्यग्रहण यांची माहिती दिली आहे. या ग्रंथात भारतीय शास्त्रातील आणि पाश्चात्य ज्योति:शास्त्रातील सर्व रीती सोपपत्तिक आणि आकृतीसह दिल्या आहेत. या ग्रंथातील विशेष असा की, पाश्चात्य ग्रंथातील ग्रहणाच्या रीती, क्रांती आणि विषुवांश यामध्ये दिलेल्या आहेत. त्या आपल्या भारतीय पद्धतीप्रमाणे शर आणि भोग यामध्ये बसविल्या आहेत. त्रिकोणमिती आणि घातांक (लागरिथम) याच्या कोष्टकांच्या आधारे स्पर्शमोक्षादि काल साधनांची समीकरणे बसबिली आहेत. ती बेसेल साहेबांच्या पद्धतीप्रमाणे आहेत. अखिल भूमंडलीय सूर्यग्रहण हे प्रकरण स्वत: ग्रंथकारांनी नवीनच आपल्या कल्पनेने लिहिले आहे. याबरून चंद्रछाया-गमनाचा भूपृष्ठावरील नकाशा तयार करता येतो. हचा ग्रंथाची हस्तलिखित पृष्ठे सुमारे १५० आहेत. हल्ली या ग्रंथाबद्दल कै. पवार यांचे चिरंजीव श्री. रभाजीराव पवार, मुक्काम सडे, तालुका राहुरी, जिल्हा अहमदनगर यांजकडे विचारणा केली असता त्यांनी कळविले की, "उपरागविज्ञान" हे पुस्तक पावसाचे पाणी पडून आणि कसर लागून खराब झाले आहे त्याचे काहीच हाती लागण्यासारखे नाही.

कै. दादासाहेब पवार यांना लोकमान्य टिळकांच्या वेळेपासून मोठ-मोठ्या ज्योतिष परिषदांची निमंत्रणे येत असत आणि त्या परिषदांना ते हजर राहण्यास चुकत नसत. धारवाड येथील ज्योतिष परिषदेत रैवतपक्षाचे पुरस्कर्ते ते एकटेच होते तरी चित्रापक्षाचे २२ अयनांश त्यांनी चुकीचे ठरविले. आपल्या सिद्धांत ग्रंथातील रैवतपक्षाचे सत्यत्व प्रस्थापित करण्याकरिता कै. पवारांनी जे मुद्दे मांडले ते इतके शुद्ध आहेत की ते प्रतिपक्षीयांना कबूलच करावे लागतात. त्या सभेत ज्योतिष प्रकरणी एकादे गोष्टीत मतभेद झाला असता कै. पवार यांचे मत विचारात घेतले जाई. इंदूर येथे शके १८५७ सन १९३५ मध्ये अखिल भारतीय ज्योतिष महासंमेलन भरले होते. त्यालाही हे हजर होते. त्या संमेलनात त्यांच्या विद्वत्तेची इतकी छाप पडली की, संमेलनातील चर्चा मंडळाचे अध्यक्ष श्रीमंत पंतवैद्य यांनी कै. दादासाहेब पवार आणि नागपूरचे विद्वद्रत्न डॉ. केशव लक्ष्मण उर्फ भाऊजी दप्तरी यांचा सत्कार त्यांनी आपले घरी खाजगीरीत्या केला. आणि हार व श्रीफळ अर्पण करून एक मेजवानी दिली.

कै. दादासाहेब पवार यांना इंग्रजी येत नव्हते. यांना खेड्यांत सर्व शेतकरी लोकांचाच सहवास होता. त्यात ते अधिष्ठित झाले म्हणजे ते एक शेतकरीच वाटत असत. दादासाहेब हे तारीख १७ सप्टेंबर सन १९३९ रोजी सडे मुक्कामी कालवश झाले.



प्रस्तावना

कै. शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार यांनी सतत ३० वर्षे परिश्रम करून हा ग्रंथ लिहिला आहे. म्हणजे हा ग्रंथ लिहिण्यास कै. दादासाहेब पवार यांना ३० वर्षे लागली आहेत.

इंदूर येथे (शके १८५७) सन १९३५ च्या नोव्हेंबरमध्ये अखिल भारतीय ज्योतिष महासंमेलन भरले होते. त्याला नागपूरचे विद्वद्रत्न डॉ. केशव लक्ष्मण उर्फ भाऊजी दप्तरी, पुण्याचे जनार्दन सखाराम उर्फ तात्यासाहेब करंदीकर, सडे (अहमदनगर) येथील शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार, गंगाधर रामकृष्ण देव, नागपूर; वगैरे मंडळी उपस्थित होती. त्यावेळी श्री. दादासाहेब पवार यांनी आपला " ग्रहगतिसिद्धांत " हा हस्तलिखित ग्रंथ आणला होता. इंदूर येथे ह्या ग्रंथाचा परिचय ग्रंथकाराने विद्वद्रत्न डॉ. भाऊजी दप्तरी यांना करून दिला. हा ग्रंथ विद्वद्रत्न डॉ. भाऊजी दप्तरी आणि श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव यांनी दोन रात्री, झोप न घेता, चाळून पाहिला आणि भारतीय भाषेत हा एक

अमोल ग्रंथ आहे असा स्पष्ट अभिप्राय डॉ. दप्तरी यांनी दिला. तेव्हा या ग्रंथाच्या छपाईस केसरी संस्था हातभार लावील असे तेथे इंदूरासच त्यावेळी श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांनी सांगितले. त्यानंतर दोन-तीन वर्षांनी श्री. दादासाहेब पवार यांची प्रकृती थोडी बिघडली, तेव्हा नागपूरला तार करून दादासाहेब पवार यांनी डॉ. दप्तरी यांना सडे (जिल्हा अहमदनगर) येथे बोलाविले. सडे येथे श्री. दादासाहेब पवार यांनी हा ग्रंथ डॉ. दप्तरी यांचे ओटीत टाकला. ग्रंथ घेऊन डॉ. दप्तरी पुण्यास आले. पुण्यास श्री. नरसिंह चिंतामण केळकर यांची भेट घेऊन केसरीच्या ट्रस्टींची बैठक बोलाविली. त्या बैठकीत डॉ. दप्तरी हे स्वतः हजर राहिले व केसरी संस्थेने हा ग्रंथ प्रसिद्ध करावा अशा आशयाचा ठराव पास करून घेतल्यावर ग्रंथ घेऊन ते नागपूरास परत आले. नागपूर येथे आल्यानंतर डॉ. दप्तरी यांनी ग्रंथाचे शुध्दीकरण आणि संपादन करण्याचे काम नागपूरच्या सायन्स कॉलेजचे माजी प्राचार्य कै. डॉ. नारायण गोविंद उर्फ नानासाहेब शढे यांचेकडे आणि मुद्रणप्रत तयार करण्याचे काम श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव यांचेकडे दिले. त्याप्रमाणे, पहिल्या भागाची शुद्ध अशी मुद्रणप्रत तयार होऊन सन १९३८ चे सुमारास केसरीकडे पाठविण्यात आली. सन १९४२ चे सुमारास या ग्रंथाचा एक फार्म तयार होऊन नागपूरास डॉ. दप्तरींकडे आणि सडे येथे श्री. दादासाहेब पवार यांचेकडे तो पहिला फार्म पाठविण्यात आला. त्याच सुमारास दुसऱ्या महायुद्धाचा वणवा फार जोराने भडकला होता व त्या युद्धाचे लोण ब्रम्हदेशातून कलकत्त्यापर्यंत येऊन पोहोचले होते. त्यामुळे, ग्रंथाच्या छपाईचे काम सर्व गोष्टींच्या टंचाईमुळे केसरी संस्थेस बंद करावे लागले. पुढे भारत स्वतंत्र झाल्यावर, सन १९४८ चे सुमारास या ग्रंथाच्या छपाईच्या कामास सुरवात करण्याबद्दल डॉ. दप्तरी यांनी श्री. जनार्दन सखाराम उर्फ तात्यासाहेब करंदीकर यांना आग्रहाची विनंती केली. त्याला श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांनी उत्तर पाठविले की, ग्रंथाच्या छपाईला आता एक नवीनच अडचण उत्पन्न झाली आहे. त्या अडचणीचा परिहार झाल्याशिवाय ग्रंथाच्या छपाईचे काम हाती घेता येत नाही. ती अडचण अशी की, ग्रंथकार श्री. दादासाहेब पवार हे मृत्यू पावल्यामुळे

कायदेशीरपणे या ग्रंथाचा वारसा त्यांचे चिरंजीव श्री. रभाजीराव शिवराम पवार यांचेकडे येतो. त्यांनी ग्रंथाबद्दलचे सर्व हक्क आपणास दिल्याशिवाय कायद्याने आपणास यात काहीही करता येत नाही.

यानंतर डॉ. दप्तरी यांनी हा ग्रंथ अभ्यासाकरिता मुंबईचे श्री. दत्तात्रय कृष्णराव सुळे यांचेकडे पाठविला आणि छपाईच्या हक्काबद्दल आणि इतरही हक्कांबद्दल श्री. रभाजीराव पवार यांच्याशी पत्रव्यवहार चालू केला. त्यात तीनशे रुपयांना तो ग्रंथ श्री. रभाजीराव पवार यांनी सर्व हक्कांसहीत डॉ. दप्तरी यांना विकत देण्याचे ठरले. ग्रंथ विकत घेण्याकरिता तीनशे रुपये आणि इतर खर्चाकरिता दोनशे रुपये अशी पांचशे रुपयांची मागणी डॉ. दप्तरी यांनी टिळक ट्रस्ट फंडाला केली. टिळक ट्रस्ट फंड नागपूर-वऱ्हाड शाखेतून या कामाकरिता पांचशे रुपये डॉ. दप्तरी यांना मिळाले. त्यातून त्यांनी तीनशे रुपये श्री. रभाजीराव पवार यांना देण्याकरिता पुण्याला केसरीकडे पाठवून दिले आणि रीतसर विक्रीपत्र करून घेण्याबद्दल श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांना कळविले. त्याप्रमाणे केसरी कार्यालयात श्री. रभाजीराव पवार यांचेकडून ग्रंथाचे सर्व हक्कांसहीत विक्रीपत्र नागपूरचे श्री. बाळकृष्ण गोविंद उर्फ बंडोपंत ओगले यांचे नांवे केसरीचे विश्वस्त श्री. अण्णासाहेब भोपटकर आणि श्री. जयंत-राव टिळक यांनी आपल्या साक्षी टाकून कायदेशीर आणि रीतसर करून घेतले. हे सर्व झाल्यानंतर ग्रंथ-छपाईचे काम केसरी संस्था पुढे चालू करील अशी अपेक्षा होती. पण, त्यानंतर दोन वर्षांनी श्री. तात्यासाहेब करंदीकर यांनी डॉ. दप्तरी यांना कळविले की, केसरी संस्थेच्या थोड्या नाजूक आर्थिक परिस्थितीमुळे या ग्रंथाच्या छपाईचे काम केसरी संस्था करू शकत नाही. पुढे, सन १९५६ मध्ये डॉ. दप्तरी मृत्यू पावले. आणि हा केसरी संस्थेच्या छपाईचा विषय पूर्णपणे दप्तरदाखल झाला.

सन १९६० चे सुमारास, पुन्हा या ग्रंथाच्या मुद्रणाच्या विषयास चालना मिळाली. जुन्या मध्यप्रदेशाचे एके वेळचे शिक्षण मंत्री, नागपूरचे डॉ. वामन शिवदासपंत उर्फ दादासाहेब बारलिंगे आणि महाराष्ट्र राज्य

साहित्य-संस्कृति मंडळाचे अध्यक्ष, वाईचे पंडित तर्कतीर्थ श्री. लक्ष्मणशास्त्री जोशी यांची नागपूरला भेट झाली व त्या भेटीत "ग्रहगतिसिद्धांत" या ग्रंथावर थोडी प्राथमिक चर्चा केली. नंतर, डॉ. दादासाहेब बारलिंगे यांनी श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव, श्री. बाळकृष्ण गोविंद उर्फ बंडोपंत ओगले, प्राध्यापक दामोदर केशव उर्फ बाळासाहेब दप्तरी वगैरे मंडळींची एक बैठक घेऊन विचारविनिमय केला. त्यात हा ग्रंथ महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळ, मुंबई-३२, यांना देण्याचे निश्चित केले. पुढे, सन १९६१ मध्ये, पंडित तर्कतीर्थ लक्ष्मणशास्त्री जोशी हे नागपूरास आले असता डॉ. दादासाहेब बारलिंगे, श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव आणि श्री. बाळकृष्ण गोविंद ओगले यांनी सर्व कागदपत्रांसोबत हा ग्रंथ पंडित तर्कतीर्थ लक्ष्मणशास्त्री जोशी यांचे स्वाधीन केला.

सन १९६५ मध्ये हा ग्रंथ छपाईकरिता महाराष्ट्र राज्य साहित्यसंस्कृति मंडळाने नागपूरच्या शासकीय मुद्रणालयाकडे पाठविला. ग्रंथासाठी टंकजुळणीचे काम चालू झाल्यानंतर एक नवीनच अडचण पुढे आली ती म्हणजे मोडी अक्षरांची. महाराष्ट्रात मोडी अक्षरे अक्षरमुद्रणात अजून आली नाहीत, त्याचे काय करावे? महाराष्ट्र राज्य मुद्रणाचे उपसंचालक, श्री. बापूराव नाईक हे नागपूरास आले असता त्यांनी मुद्दाम श्री. बाळकृष्ण गोविंद उर्फ बंडोपंत ओगले, प्राध्यापक दामोदर केशव उर्फ बाळासाहेब दप्तरी आणि श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव या मंडळींना भेटीचा निरोप पाठवून भेटीला बोलाविले. ही बैठक शासकीय मुद्रणालय, नागपूर यांच्या कार्यालयात झाली. बैठकीत मोडी अक्षरांबद्दल चर्चा झाली. त्यात या ग्रंथकाराने ग्रंथात योजलेल्या मोडी अक्षरांच्या ठिकाणी मोडीच अक्षरे असावीत असे श्री. बंडोपंत ओगले यांनी श्री. नाईक यांना पटवून दिले आणि ते त्यांनी कबूल केले. ग्रंथात मोडी अक्षरे कोणकोणती आहेत? ती किती आहेत? आणि कोठें कोठें आहेत याची संपूर्ण आणि सविस्तर माहिती श्री. दत्तात्रय कृष्णराव सुळे, मुंबई यांनी शासकीय मुद्रणालय, नागपूर यांना कळविली त्याप्रमाणे मोडी अक्षरांचे साचे तयार करून ती अक्षरे शासकीय मुद्रणालयात मुद्रणालयाचे सहाय्यक व्यवस्थापक, श्री. मनमोहन दत्ताराम प्रभु

यांनी मेहनत घेऊन तयार करवून घेतली. ग्रंथाच्या मुद्रणाचे संबंधात मुद्रिते तपासण्यासंबंधीचा प्रश्न उद्भवला. कारण, या ग्रंथाची मुद्रित-तपासणी हे काम रुक्ष असून जाणत्या माणसाचेच होते. हे काम श्री. गंगाधर रामकृष्ण देव, नागपूर यांनी केले. ग्रंथाच्या मुद्रणात मुळीच चुका राहू नये म्हणून श्री. देव यांनी मुद्रिते दोनदा तपासली. श्री. देव यांनी हे किचकट आणि रुक्ष काम पूर्णतः श्रम घेऊन करून दिले. हा ग्रंथ लिहिण्यास ग्रंथकाराला जशी ३० वर्षे लागली आणि त्याचे हयातीत हा ग्रंथ मुद्रित झाल्याचे पाहण्याचे भाग्य त्यांना लाभले नाही, तसेच हा ग्रंथ मुद्रित करण्याकरिता कै. डॉ. दप्तरी यांना सुमारे ३३ वर्षे लागली आणि त्यांच्या हयातीत हा ग्रंथ प्रसिद्ध झाल्याचे पाहण्याचे भाग्य त्यांनाही लाभले नाही. असो.

हा ग्रंथ ग्रहगतिविषयी आहे. या ग्रंथाचे दोन भाग आहेत. पूर्वार्ध आणि उत्तरार्ध. पहिल्या भागात या ग्रंथातील विषयाला आवश्यक तितके उच्च बीजगणित, सरळ आणि गोलिय त्रिकोणमिती, शंकुच्छिन्न-भूमिती, वैज्यभूमिती, शून्यलब्धि, सूक्ष्मांशगणित, सूक्ष्मांशसमीकरणे हे शुद्ध गणितातील महत्त्वाचे प्रमुख भाग सोपपत्तिकरीत्या प्रतिपादन केले आहेत. दुसऱ्या भागात गोलद्वयप्रश्न (प्रॉब्लेम ऑफ टू बॉडीज), गोलत्रयप्रश्न (प्रॉब्लेम ऑफ थ्री बॉडीज) याविषयी थोडी माहिती, न्यूटनच्या "प्रिन्सिपिया" मधील सिद्धांत, परमाणुगतिशास्त्रातील सिद्धांत, चंद्राचे सिद्धांत (लूनर थिअरी), ग्रहांचे सिद्धांत यांचे सोपपत्तिक विवेचन केले आहे. सूक्ष्मतेच्या चार पदवीपर्यन्तची सर्व समीकरणे आणि काही पदांची पांच व सहा पदवीपर्यन्तची समीकरणे सोडवून दाखविली आहेत. शेवटी तिथी नक्षत्र योगाच्या स्पष्ट कालसाधनाचे सिद्धांत आणि त्यांची समीकरणे सूक्ष्मतेच्या चौथ्या पदवीपर्यन्त सोडवून दाखविली आहेत. एकूण, ज्योतिःशास्त्राचे मूलभूत सिद्धांत यात सोपपत्तिक-रीत्या पूर्णपणे दिलेले आहेत. असला अपूर्व ग्रंथ भारतीय भाषेत तरी हा पहिलाच होय.

ग्रंथकार कै. शिवराम गणपतराव उर्फ दादासाहेब पवार हे स्वतःबद्दल लिहितात की, "मी प्राथमिक शाळेवरील शिक्षक, माझी जन्मभाषा मराठी आहे. संस्कृत भाषेचे साधारण ज्ञान आणि अन्य भाषेचे ज्ञान अगदीच थोडे. असे असताही गणितशास्त्रविषयक इंग्लिश ग्रंथातील उपपादन पाहून वाचनाने आणि स्वयंशिक्षणपद्धतीने कठीण अशा विषयांचे ज्ञान संपादन केले आहे." हा त्यांचा विनय आहे.

दत्तात्रय कृष्णराव सुळे,

बाळकृष्ण गोविंद ओगले.

ग्रंथात वापरलेली मोडी अक्षरे

𑘀	..	..	अ
𑘤	..	..	ब
𑘎	..	..	क
𑘓	..	..	च
𑘘	..	..	ट
𑘝	..	..	त
स्𑘢	..	..	स्प
𑘩	..	..	ल
𑘭	..	..	स
𑘃	..	..	ई
𑘣	..	..	फ
𑘭𑘽	..	..	सं
𑘀$_१$	..	..	अ$_१$
𑘀$_२$	..	..	अ$_२$
𑘀$'$	..	..	अ$'$
𑘤$_१$	..	..	ब$_१$
𑘤$_२$	..	..	ब$_२$
𑘤$'$	..	..	ब$'$
𑘎$_१$	..	..	क$_१$
𑘎$_२$	..	..	क$_२$
स्𑘢$'$	..	..	स्प$'$
𑘚	..	..	ड

A-2548—ii

अनुक्रमणिका

प्रकरण पहिलें

सूर्यमाला आणि तिची उत्पत्ति

प्रकरण दुसरें

ग्रहगणिताचा उपयोग

प्रकरण तिसरें

बीजगणित

प्रकरण चवथें

गणितशास्त्रांतील मुख्य सिद्धांत

प्रकरण पांचवें

गोलीय त्रिकोणमिती

प्रकरण सहावें

शंकुच्छिन्न

प्रकरण सातवें

बैज्यभूमितीचीं मूलतत्त्वें

प्रकरण आठवें

सूक्ष्मांश गणिताची मूलतत्त्वें

प्रकरण नववें

वेग आणि वेगवृद्धि व त्यांची पृथःकरणें

प्रकरण दहावें

ग्रहकक्षेचीं सूक्ष्मांश समीकरणें आणि कक्षेसंबंधी पदांचा अन्योन्य संबंध

प्रकरण अकरावें

ग्रहाचें कक्षेंतील स्थान

प्रकरण बारावें

द्विधा आकर्षण निर्मित कक्षेचीं सूक्ष्मांश समीकरणें

प्रकरण तेरावें

चंद्राच्या कक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणें

प्रकरण चवदावें

चंद्रकक्षेच्या सूक्ष्मांश समीकरणांचें संकलन

प्रकरण पंधरावें

सूक्ष्मतेची चवथी पदवी

प्रकरण सोळावें

काल आणि ग्रहाचे शर भोग

प्रकरण सतरावें

पंचांग प्रवर्तनीय सिद्धांत

ग्रहगतिसिद्धांत

प्रकरण पहिलें

सूर्यमाला आणि तिची उत्पत्ति

(प्रभुपद वंदन)

अखिल जीवांच्या जीवनासाठीं परमकारुणिक अशा प्रभूनें ही सृष्टि निर्माण केली आहे. तिच्या कृतीकडे मानवाचें लक्ष जाऊन त्यानें विचार करावा म्हणून त्याला विचारशक्ति आणि अमूप कल्पनाशक्ति दिली आहे. सृष्टींतील अनेक वस्तु पाहून त्यांच्यामधील गुणधर्माचे विचार प्राचीन कालापासून अव्याहत चालू आहेत. त्यांपैकीं अंतरिक्षांत जे अनंत पदार्थ आहेत त्यांच्याविषयींच्या विचारपरंपरेनेंच ज्योतिःशास्त्राची उत्पत्ति झाली आहे. सरिताप्रवाह तिच्या उगमस्थानासमीप अगदींच लहान असतां पुढें जसा तो वृद्धिगत होत जातो, तसेंच ज्योतिःशास्त्राचें ज्ञान आरंभीं अल्प प्रमाणांत असून कालक्रमाप्रमाणें वर्धमान स्थितींत आहे. ज्योतिःशास्त्राच्या परिशीलनानें मानवाची बुद्धि विकास पावते व त्या विकासाच्या परिणामानें परमात्मा जो जगदुत्पत्तिकर्ता त्याच्याविषयीं अत्यंत पूज्य बुद्धि उत्पन्न होते. मनुष्य केवढाही बुद्धिमान आणि कल्पना करणारा असो त्याची मति गुंग होऊन जाते. ह्या एकंदर विचाराचें पर्यवसान शेवटीं असें होतें कीं, त्याच्या मुखांतून असे उद्‌गार बाहेर पडतात : "हे परमात्मा तुझी कृति अगाध व अगम्य आहे" असा जो परमकारुणिक प्रभु परमात्मा, जगनिर्माता, जगत्संहारकर्त्ता त्याच्या चरणारविंदीं अनन्यभावें वंदन असो.

ग्रहगतिसिद्धांत

२. आरंभीं हें सर्व जगत् परमात्म्यानें सूक्ष्म अशा अनेक प्रकारच्या परमाणूंनी भरलेलें असे निर्माण केलें. हें परमाणू तप्त आणि स्वयंप्रकाशित असून आकाशाच्या अनंत पोकळींत इतस्ततः भ्रमण करीत होते. हे परमाणू जरी अचेतन म्हणजे चैतन्य-विरहित अर्थात हालचाल न करणारें जडच आहेत तरी त्यांच्या ठायीं सृष्टिकार्य करणाऱ्या कांहीं शक्ति ठेविलेल्या आहेत. त्या शक्तिपैकीं उष्णता आणि वीज ह्या शक्तींच्या कार्यानें परमाणू हे अचेतन असून कंपनशील आणि प्रगमनशील बनलेले आहेत. दुसऱ्या दोन शक्ति——स्नेहाकर्षण आणि गुरुत्वाकर्षण——ह्या शक्तींनीं परमाणूंचे

संघ बनले आहेत. ह्याव्यतिरिक्त रसायनाकर्षण आणि किरणाकर्षण अशा दोन शक्ति आहेत. ह्या प्रत्येक शक्तीपासून कोणकोणतीं कार्यें घडतात ह्याचा विचार करतां प्रत्येक शक्तीपासून एक स्वतंत्र शास्त्र निर्माण झालें आहे आणि त्या प्रत्येक शास्त्रावर मोठमोठाले ग्रंथ तयार झाले आहेत. ह्या प्रत्येक शास्त्राचें वर्णन करणें हें येथें अस्थानीं आहे. तथापि त्यांचा नामनिर्देश खालीं देत आहे.

उष्णता

३. उष्णता म्हणजे अणु किंवा परमाणूंची कंपनरूप गति होय. परमाणूंच्या अंगीं उष्णता जसजशी जास्त असेल तसतसे ते परमाणु परस्परांस जास्त प्रतिसारित करितात. उष्णता एका परमाणूंतून किंवा अणूमधून दुसऱ्या अणू किंवा परमाणूमध्यें जात असते. तशीच आकाशांत लीन होत असते. ह्या दुसऱ्या कार्यास 'अरिभवन' असें म्हणतात. अरिभवन निरंतर चालू आहे. अरिभवनानें उष्णता विसर्जित होऊन परमाणू थंड होऊं लागला म्हणजे त्याची प्रतिसारण शक्ति कमी होत जाते. प्रतिसारण शक्ति कमी होत होत नाहींशी झाली म्हणजे परमाणु किंवा अणूंच्या समूहास द्रवावस्था प्राप्त होते. ह्या स्थितींत अणु आणि परमाणु यांच्यामध्यें स्नेहाकर्षण नांवाची शक्ति कार्य करूं लागते.

स्नेहाकर्षण

४. जेव्हां दोन अणु किंवा परमाणु एकमेकांच्या अति संनिध येतात तेव्हां ते परस्परांस आपणाकडे आकर्षिले जातात आणि त्यांच्या रूपांत व गुणधर्मांत विपर्यास न होता त्यांचा एक अणु बनतो. ह्या आकर्षण क्रियेला स्नेहाकर्षण म्हणतात. ज्या परिमाणांत उष्णतेचें मान कमी होतें त्याच्या व्यस्त प्रमाणांत स्नेहाकर्षण वाढत जातें. ह्या स्थितीमध्यें अणु-परमाणूंच्या समूहास घनावस्था प्राप्त होते.

गुरुत्वाकर्षण

५. उष्णतेच्या न्यूनाधिक्यामुळें अणु-परमाणूंच्या समूहास घन, द्रव्य आणि वायुरूप अशा तीन अवस्था असतात. ह्या प्रत्येक अवस्थेमध्यें असलेल्या, अणु-परमाणु किंवा त्यांचे संघ ह्यावर गुरुत्वाकर्षण शक्तीचें कार्य घडतें. ह्या शक्तीच्या योगानें अणु-परमाणूंचे समुदाय बनलेले आहेत. तारे, सूर्य, ग्रह, उपग्रह, धूमकेतु आणि उल्का-पाषाण हे जे खस्थ पदार्थ आपण पाहतो ते वर सांगितलेल्या तप्त परमाणूंचे गुरुत्वाकर्षण शक्तीनें बनलेले समुदाय आहेत.

६. खस्थ पदार्थांना हल्लीं दिसत असलेली स्थिति प्राप्त करून देणारी शक्ति गुरुत्वाकर्षण होय. गुरुत्वाकर्षण हें प्रत्येक दोन परमाणूंमध्यें आहे. ह्या आकर्षणाच्या योगानें एक परमाणु दुसऱ्या परमाणूस आपल्याकडे ओढितो. पदार्थ हे परमाणूंचे

समुदाय आहेत, म्हणून तेही एकमेकांस आपणाकडे ओढितात. ज्या पदार्थामध्यें परमाणूंचा समुदाय जास्त त्याचें आकर्षण जास्त असतें. आकर्षण हें परिमेय आहे. म्हणजे तें मापन करण्यास योग्य आहे. अर्थात, त्याला परिमाण हें असलेंच पाहिजे. ठराविक अवकाशांत ठराविक घनतेचे अणु-परमाणूंचा जो समुदाय त्याचें जें आकर्षण तें आकर्षण ह्या परिमयाचें परिमाण होय. सोप्या भाषेंत असें म्हणतां येईल कीं, आकर्षण हें वजनानें मापितां येईल. परंतु वजन हें सगळ्या पृथ्वीचें आकर्षण आहे व तें फक्त भूमध्याच्याच दिशेनें कार्य करितें. विवक्षित अवकाशांत जो परमाणूंचा समुदाय आहे त्या अवकाशाची पोकळी आणि त्या परमाणु समुदायाची घनता या दोहोंच्या संयोगानें त्या परमाणु समुदायाचे प्रकृत्यंश मापिता येतात. म्हणजे

प्रकृत्यंश = साठा × घनता.

७. गुरुत्वाकर्षणाचें कार्य सर्व दिशांनीं घडतें. म्हणजे आकर्षक परमाणु किंवा परमाणु समूह, त्याच्या कोणत्याहि बाजूस असलेल्या परमाणूला आकर्षितो. आकर्षण हें आकर्षक पदार्थाच्या प्रकृत्यंशाप्रमाणें कमी किंवा जास्त असते. आकर्षक पदार्थामध्यें जसजसें प्रकृत्यंश जास्त तसतसें त्याचें आकर्षण जास्त असतें. आकर्षित पदार्थ (किंवा परमाणु समुदाय) केवढाही असो आकर्षक पदार्थाचें आकर्षण कमी जास्त होत नाहीं. आकर्षण हें आकर्षक व आकर्षित पदार्थ ह्यांच्यामधील अंतरावर अवलंबून असतें. हें अंतर जसजसें जास्त तसतसें आकर्षण कमी होत जातें. विवक्षित पदार्थाचें आकर्षण हें, अंतराच्या एका परिमाणाइतक्या अंतरावर जर काहीं असेल तर दोन परिमाणांइतक्या अंतरावर त्याच्या $\frac{1}{4}$ घडेल, तीन परिमाणांइतक्या अंतरावर $\frac{1}{9}$ घडेल. म्हणजे अंतराच्या वर्गगुणोत्तराच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें. दिव्याचा प्रकाश ५ हात अंतरावर जितका प्रकाशमान असतो तितका १० हात अंतरावर नसतो. त्याचा $\frac{1}{4}$ असतो. ५ हात अंतरावर जर एक चौरस हात क्षेत्राचा पडदा धरिला तर त्यावर प्रकाशाची जी प्रखरता असते ती १० हात अंतरावर ४ चौरस हात क्षेत्रावर वाटली जाते यामुळे ती प्रखरता $\frac{1}{4}$ होते. ह्याप्रमाणेंच गुरुत्वाकर्षणाची शक्ति जास्त अंतरावर कमी होते. गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत खाली लिहिल्याप्रमाणें आहे :—

सिद्धांत. गुरुत्वाकर्षण हें आकर्षक पदार्थाच्या प्रकृत्यंशाच्या सम-प्रमाणांत आणि आकर्षक व आकर्षित पदार्थाच्या मधील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असतें.

८. गुरुत्वाकर्षणाच्या सत्यत्वाविषयीं सुगम असें प्रत्यक्ष प्रमाण जरी नाहीं, तरी गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत सत्य मानून त्यावरून गणित कार्यानें आणिलेलें ग्रहांचे गमन, त्यांच्या कक्षेंतील अनेक पदांचीं मानें, विवक्षित क्षणीचीं त्यांचीं आकाशांतील स्थानें

हीं, त्यांच्या प्रत्यक्ष वेधानें आलेल्या मानांशीं आणि स्थानांशीं अगदीं सूक्ष्मपणें परस्पर मिळतात. ह्यावरूनच ह्या सिद्धांताची सत्यता स्थापित होते. युरेनस ह्या ग्रहाच्या गतीचें गणित करून त्यावरून वेध घेत असतां त्यांत फरक दिसूं लागला. (वेध घेणें म्हणजे ग्रहादिकांचें आकाशांतील स्थान यंत्रांच्या सहाय्यानें प्रत्यक्ष पहाणें.) ह्या फरकाचें कारण शोधित असतां गुरुत्वाकर्षणाच्या सिद्धांताच्या आधारें कळून आलें कीं, युरेनसाला ओढणारा नवीनच एखादा ग्रह असावा आणि तो अमक्या ठिकाणीं असावा. गणितानें आलेल्या ठिकाणीं दुर्बीणींतून पाहता नेपच्यून हा ग्रह सांपडला. ह्यामुळें सर्व जगभर ह्या सिद्धांताची सत्यता स्थापित झाली आहे. गुरुत्वाकर्षणाच्या सिद्धांतानें यंत्रशास्त्रांतील गतिशास्त्राची उत्तम रीतीनें सुधारणा झाली आहे.

९. वर सांगितलेले तप्त परमाणु आकाशाच्या पोकळींत असतां गुरुत्वाकर्षण शक्तीनें त्यांचे समूह बनत गेले. एखाद्या परमाणूवर दुसऱ्या ज्या परमाणूंचें अथवा परमाणु समूहांचें आकर्षण बलवत्तर असेल तिकडे तो जाऊन त्यास मिळूं लागला. असें कार्य निरंतर चालल्यामुळें सर्व ब्रह्मांडभर असलेल्या परमाणूंचे लहान मोठे समुदाय बनले. हे समुदाय, सूक्ष्म परमाणु एका परमाणु सभोंवतीं सर्व अंगांकडून सारखे मिळत गेल्यानें, गोलाकार बनले असले पाहिजे. एक परमाणु समूह दुसऱ्या परमाणु समूहाकडे आकर्षिला जाऊ लागल्यामुळें, त्यास आपल्या स्वत:भोंवतीं भ्रमण करीत दुसऱ्या समूहाकडे मोठ्या वेगानें जाण्याची गति मिळाली. अनंतकालपर्यंत ही क्रिया चालत आलेली आहे, आणि आपणास हे जगत् दृग्गोचर झालें आहे.

१०. तप्त परमाणु समूहानें बनलेले जे स्वयंप्रकाशित गोल त्यांना आपण तारे, तारका किंवा नक्षत्र असें म्हणतो. प्रत्येक तारा, वरच्या लेखांतील अनुमानाप्रमाणें, निर्माण झाला आहे ह्या म्हणण्याला प्रमाण प्रस्तुतकालीं आपणांस आकाशांत सांपडत आहे. वरच्या लेखांतील कल्पनेप्रमाणें घटना होत असलेले असे प्रकाशपुंज आकाशांत दृष्टीस पडतात. त्या प्रकाशपुजांत असें दिसते कीं मधला भाग जास्त प्रकाशित असून त्यासभोंवतीं फिरत असल्याप्रमाणें उत्तरोत्तर विरळ होत जाणारे प्रकाशित मेघाकार वेष्टन दिसतें. असे तारे आकाशांत अनेक दिसतात. भरत किंवा मृग तारकापुजांत जवळजवळ सारख्या अंतरावर असणारे मोठाले तीन तारे आहेत व ते एकाच सरळ रेषेंत दिसतात. त्यांच्या दक्षिणेस एकाच सरळ रेषेंत असणारे लहान लहान सारख्या अंतरावर असलेले तीन तारे आहेत, त्यांस बाण असेंही म्हणतात. ह्या बाणांतील मधला तारा वर सांगितल्या प्रकारचा आहे. साधारण दुर्बिणींतूनसुद्धां हा देखावा दृष्टीस पडतो. तारे हे आपणांपासून व ते स्वत: परस्परांपासून अनंत अंतरावर आहेत. त्या अंतराची कल्पनाही आपणाला करितां येत नाहीं. ह्या कारणानें ताऱ्याचे खरें स्वरूप, त्याचें महत्त्व, त्याचा परिवार ह्यांचें आपणाला ज्ञान होत नाहीं.

११. आकाशांत ज्या अनंत तेजोराशी आहेत, ज्यांना आपण तारका किंवा नक्षत्र म्हणतो, त्यांपैकींच, सर्व प्राण्यांना जीवन देणारा असा आपला सूर्यनारायण हा एक ताराच आहे. प्रत्येक ताऱ्याचें महत्त्व आपणांस ज्ञात नाहीं, पण सूर्यासंबंधीं आपणाला पुष्कळ ज्ञान प्राप्त झालें आहे. सूर्यापासूनच ज्यांची उत्पत्ति आहे अथवा सूर्य ज्या परमाणु समूहाचा बनला आहे असे कांहीं परमाणु समूह सूर्यासभोंवतीं भ्रमण करीत आहेत. पदार्थ ज्या मानानें लहान किंवा मोठा असेल त्या मानानें त्यास थंड होण्यास कमी किंवा अधिक काल लागेल. सूर्यासभोंवतीं फिरणारे परमाणु समूह हे सूर्याच्या मानानें पाहिले तर फारच फार लहान आहेत, म्हणून त्या समूहांतील उष्णता फार फार कमी झालेली आहे. या कारणामुळें ते अप्रकाशित झाले आहेत. त्याजवर सूर्याचा प्रकाश पडून तो प्रकाश परावर्तन पावून आपणाकडे येतो म्हणूनच त्यांचें आपणांस दर्शन होतें. असे जे सूर्यासभोंवतीं भ्रमण करणारे परमाणु समूह त्यांस आपण ग्रह, उपग्रह, धूमकेतु, उल्कापाषाण अशीं नांवें देतो.

१२. सूर्यासभोंवतीं फिरणारे ग्रह बुध, शुक्र, पृथ्वी, मंगळ, गुरु, शनि, वरुण (युरेनस) आणि इंद्र (नेपच्यून), प्लुटो हे मुख्य आहेत. ही मालिका सूर्यापासून असलेल्या अंतराच्या क्रमानें लिहिली आहे. मंगळ आणि गुरु यांच्यामध्यें कांहीं लहान लहान ग्रह आहेत, त्यांना लघुग्रह म्हणतात. ग्रहाच्या आकर्षणानें कांहीं परमाणु समूह ग्रहासभोंवतीं भ्रमण करितात त्यांना ' उपग्रह ' असें म्हणतात. आपल्या पृथ्वी-सभोंवतीं फिरणारा चंद्र हा पृथ्वीचा उपग्रह आहे. मंगळासभोंवतीं दोन उपग्रह आहेत, गुरूसभोंवतीं चार आहेत, शनिसभोंवतीं आठ आहेत आणि वरूणासभोंवतीं दोन उपग्रह आहेत. सूर्यासभोंवतीं कांहीं धूमकेतु आहेत. परंतु कांहीं धूमकेतूंचे गमन मार्ग परवलय (पॅराबोला) ह्या वक्ररेषाकृतीचे व कांहींचे उद्वलय (हैपरबोला), त्या वक्ररेषाकृतीचे आहेत. आणि ह्या वक्ररेषाकृति अशा आहेत कीं त्या वक्ररेषांचीं दोन्हीं टोकें एकत्र होत नाहींत. अशा गमन मार्गाचे धूमकेतु एकदां सूर्यासमीप आल्या-नंतर पुनरपि सूर्याकडे कधींही येत नाहींत. दीर्घ वलयाकृति गमन मार्गाचे कांहीं धूम-केतु आहेत, ते नियमितकालानें सूर्यासमीप येतात. ग्रह, उपग्रह आणि धूमकेतु ह्याशिवाय कांहीं घनरूप पदार्थ आकाशपोकळींत आहेत, त्यास उल्कापाषाण असें म्हणतात. हे उल्कापाषाण पृथ्वीजवळ आले असतां पृथ्वीच्या आकर्षणानें पृथ्वीकडे ओढले जातात, यांचा स्वतःचा वेग फार भयंकर असल्यामुळें पृथ्वीवरील वातावरणांतील वातकणांशीं त्यांचें घर्षण होऊन अत्यंत उष्णता उत्पन्न होते, आणि त्या उष्णतेनें त्या पाषाणांचें ज्वलन होतें. ग्रह, उपग्रह, कांहीं धूमकेतु आणि उल्कापाषाण हा सूर्याचा परिवार होय. सूर्य आणि त्याचा परिवार ह्यास ' सूर्यमाला ' असें म्हणतात.

१३. सूर्यमालेंतील अंतराच्या क्रमानें आपला भूगोल हा तिसरा आहे. भूगोल म्हणजे पृथ्वी; हिचा आकार गोल आहे. ह्याबद्दल अनेक ग्रंथांतून विवरण केलेलें आहे

तें येथें सांगत नाहीं. परंतु सूर्याची व ग्रहांची उत्पत्ति कशी झाली असावी याचें जें वर वर्णन केलें आहे त्यावरून पाहतां, सूर्य, ग्रह, उपग्रह हे सर्व आकारानें सामान्यतः गोलच असले पाहिजेत. वायुरूप व द्रवरूप पदार्थ आणि द्रव व घन ह्यांच्यामधील स्थितींत असलेले पदार्थ (उदाहरणार्थ चिखलाचा गोळा) हे सर्व दिशांनीं सारखे दाबले गेले तर ते गोल रूपच धारण करतील. ह्यास प्रत्यक्ष उदाहरण बंदुकीच्या गोळ्या आणि छरें यांचें आहे. शिशाचा रस उंच ठिकाणाहून निरनिराळ्या छिद्रांच्या चाळणीतून सोडला तर रसाचे थेंब खालीं पडत असतां रस्त्यांत थंड होण्यापूर्वी गोलाकार धारण करितात असें आहे. तसेंच कोणत्याहि एका परमाणूसभोंवतीं दुसरें अनेक परमाणु त्यास सर्व दिशांनीं संलग्न होऊं लागले तर जो पदार्थ बनेल तो गोलाकारच असला पाहिजे.

१४. प्रत्येक ग्रहाचा आकार साधारणतः गोलरूप आहे, तसेंच प्रत्येक ग्रह स्वतः-सभोंवतीं नियमित वेळांत भ्रमण करितो, आणि सूर्यासभोंवतीं प्रदक्षिणा करितो. प्रत्येक ग्रहाचे हे प्रदक्षिणाकाल नियमित आहेत. आणि त्यांचा परस्परांशीं विशेष प्रकारचा संबंध आहे. सर्व ग्रहांचे प्रदक्षिणाकाल आणि त्यांचीं सूर्यापासून अंतरें ह्यांचा एकमेकांशीं संबंध आहे. तो संबंध कशा प्रकारचा आहे हें ह्या ग्रंथांत सोपपत्तिक रीतीनें सिद्ध केलें आहे.

१५. पृथ्वी ही आपल्या आंसासभोंवतीं फिरत असून त्या भ्रमणासह सूर्या-सभोंवतीं प्रदक्षिणा करीत आहे. सूर्यासभोंवतीं एक पूर्ण प्रदक्षिणा करण्यास जो काल लागतो त्या कालास वर्ष असें म्हणतात व आसासभोंवतीं एक फेरा फिरण्यास जो काल लागतो त्यास नाक्षत्रदिवस म्हणतात. एखादा तारा मध्यान्ह रेषेवर आल्या-पासून तोच तारा पुन्हा याम्योत्तर रेषेवर येण्यास जो काल लागेल त्या कालानें आपणास नाक्षत्रदिवसाचें मान कळून येतें. पूर्वकालीं ज्योतिःशास्त्राची कल्पना अशी होती कीं, पृथ्वी ही स्थिर आहे आणि आकाशांतील पदार्थ तिच्यासभोंवतीं फिरतात. परंतु गुरुत्वाकर्षण शक्ति आणि गणितशास्त्र, तसेंच गतिशास्त्र आणि यंत्रशास्त्र यामध्यें जे सिद्धांत सिद्ध झालेले आहेत त्यावरून पृथ्वी ही स्थिर नाहीं. ती आपल्या आसासभोंवतीं भ्रमण करीत सूर्यासभोंवतीं प्रदक्षिणा करिते, असें निःसंशय सिद्ध झालें आहे.

१६. सूर्यमालेचा अधिपति सूर्य आहे. तो ज्या महत्त्वाचा किंवा योग्यतेचा आहे त्याच योग्यतेचा, किंबहुना त्याच्या शतपट योग्यतेचा, आकाशांतील प्रत्येक तारा आहे. सूर्य जसा स्वयंप्रकाशित आहे तसेच तारेही स्वयंप्रकाशित आहेत. सूर्यासभोंवतीं जशी ग्रहमाला आहे तशीच ताऱ्यासभोंवतीं ग्रहमाला असण्याचा संभव आहे. तारे आपणांपासून अमर्याद अंतरावर असल्याकारणानें ते आपणास स्थिर आहेत असें

वाटतें, परंतु त्यांना अत्यंत सूक्ष्म असें चलन आहे. तें चलन इतकें सूक्ष्म आहे कीं, दोन-चार हजार वर्षांनीं सुद्धां मोठ्या कष्टानें आपल्या अनुभवास येतें. ग्रहावर जसें सूर्याचें आकर्षण, तसेंच सूर्यावर ताऱ्यांचें आकर्षण आहे. या कारणानें आपला सूर्य, ही बुधादि ग्रहमाला बरोबर घेऊन आकाशाच्या अमर्याद पोकळींतून ताऱ्यांच्या आकर्षणानें स्थलांतर करीत आहे.

१७. प्रस्तुत कालीं पृथ्वीतलावर जीं शास्त्रें आहेत, तीं प्रगतीच्या मार्गावर आहेत. त्याप्रमाणें ज्योतिःशास्त्रही प्रगमनशील आहे. पाश्चात्य देशांत ज्योतिः-शास्त्रविषयक वाङमयाची पुष्कळ भरभराट झालेली आपण पाहात आहोत, परंतु आमच्या जुन्या कल्पना त्या परिपूर्ण असल्यामुळें हा मतभेद आहे असें म्हणून, सिद्ध झालेले सिद्धांत आमचे भारतीय ज्योतिःशास्त्रज्ञ कबूल करीत नाहींत. पण ते सिद्धांत स्वीकारल्याशिवाय प्रगति होणें अशक्य असें जाणून प्रस्तुत ग्रंथांतील विषय प्रतिपादन केलें आहे.



प्रकरण दुसरें

ग्रहगणिताचा उपयोग

शुभकार्य निर्बंध

१८. ह्या भरत खंडांतील वैदिक धर्मानुयायांचा प्रत्येक धार्मिक अथवा व्यावहारिक विधि करण्याचा काल, ग्रहांच्या आकाशांतील स्थानांशीं संबद्ध असा आहे. उदाहरणार्थ लग्न विधि असेल तर चंद्र ठरविलेल्या अकरा नक्षत्रांपैकींच एका नक्षत्रीं असला पाहिजे. ज्या वधुवरांचा विवाह व्हावयाचा त्यांच्या जन्मकालच्या चंद्राच्या राशीपासून विवाहकालीं चंद्र अमुक इतक्या अंतरावर असला पाहिजे असा निर्बंध आहे. घर बांधणें, विहीर खोदणें, प्रयाण करणें वगैरे कार्य ठराविक वेळींच म्हणजे ठराविक ग्रहस्थिति असताच करावीं असा निर्बंध आहे. हे निर्बंध फार प्राचीन काळापासून पाळले जात आहेत. ह्या निर्बंधाचा त्याग करून ते विधि कोणी करीत नाहींत. ह्या दृष्टीनें पाहिलें असतां ग्रहांच्या स्थितीच्या ज्ञानाची आम्हांस अत्यंत आवश्यकता आहे हें उघड आहे. हे विधि अमक्याच वेळीं कां करावे या-विषयींचा विचार सप्रमाणपद्धतीनें शास्त्रीयरीत्या झालेला आहे किंवा कसें, हें ठरविण्याला प्रस्तुत कांहीं साधनें दिसत नाहीं. परंतु ह्या निर्बंधाविषयीचा जो संग्रह पूर्वकालिन ऋषींनीं करून ठेवलेला आहे त्यामध्यें सत्यता कांहींच नाहीं असें शास्त्रीय पद्धतीनें सिद्ध झाल्याशिवाय त्याचा तिरस्कार करणें केव्हांही उचित नाहीं व तो संग्रह त्याज्यही म्हणता येणार नाहीं.

फलज्योतिःशास्त्र

१९. ग्रहगणिताचा उपयोग फलज्योतिःशास्त्रांत आहे. "विवक्षित ग्रह आकाशांतील विवक्षित भागाच्या मर्यादेत आल्यापासून अमुक प्रकारचें फल निष्पन्न होतें, असें नियम पुष्कळशा अनुभवानें तयार केलेले आहेत." ह्या नियमाधारें ग्रहाचें आकाशांत स्थान कोठें आहे हें गणितानें ठरवून फल सांगणें हा फलज्योतिषाचा विषय आहे. हें फल वर्तविण्यास इच्छिलेल्या काळीं ग्रहांचीं स्थानें कोठें आहेत हें ग्रह-गणितानेंच समजतें. फलज्योतिःशास्त्र हें अनुभवावलंबी शास्त्र आहे. ह्यांतील जें सिद्धांत ठरविलेले आहेत ते पुष्कळशा अनुभवानें ठरले आहेत. म्हणून त्यांत कार्य-कारणभावाचा विचार केलेला नाहीं. प्रत्येक शास्त्राच्या उत्पत्तिविषयीं विचार केल्यास कळून येईल कीं, शास्त्राचा उगम प्रथमतः अनुभवानेंच झालेला असतो. पूर्वकालच्या विद्वानांनीं ग्रहांचीं स्थानें व त्यांचीं फलें यासंबंधानें त्यांना जे जे अनुभव आले ते ते त्यांनीं ग्रंथित करून ठेविलेले आहेत. त्यांत कार्यकारणभावाचा विचार

नाहीं पण त्यास तो मिळाल्यास तें शास्त्र भरभराटीस आल्याशिवाय राहणार नाहीं. आधुनिक कांहीं विद्वानांचा असा ग्रह झालेला आहे कीं, फलज्योतिष हें कांहीं तरी आहे. परंतु अशा समजुती वास्तव नाहींत. फलज्योतिःशास्त्रांत सत्याचा अंश नाहीं हें जोपर्यंत निःसंदेह सिद्ध झालें नाहीं तोपर्यंत पूर्वकालच्या ऋषींनीं केलेले शोध व ते शोध एकत्र करून लिहिलेले ग्रंथ टाकून देतां येत नाहींत. फलज्योतिःशास्त्राचा कार्यकारणभावानुरूप किंवा संशोधनरूप विचार करूं लागल्यास पूर्वाचार्यांनीं संकलित केलेल्या सिद्धांतांचा त्यास केवढा आधार मिळेल याचा विचार करावा. याकरितां बहुजनसमाजाची ह्या विषयासंबंधीं जी आसक्ति आहे ती कमी होऊं देणें आपणांस योग्य दिसत नाहीं. फलज्योतिषाचा विचार करितां खालच्या लेखांत "किरणप्रताप" म्हणून जो विषय दिला आहे त्यावरून फलशास्त्र ह्याला कांहीं विशेष प्रकारचें वळण लागून तें जास्त अनुभव देणारें होईल असें मानण्यास पुष्कळ जागा आहे.

किरणप्रताप

२०. किरण शब्दाच्या व्याख्येकडे पहा. व्यवहारांत आपण सूर्यकिरण, चंद्रकिरण असा शब्दप्रयोग करितो. यांतील किरण शब्द प्रकाशाला अनुलक्षून आहे. मी त्यांत विजेलाही घेतों. यावरून मी असें म्हणतों कीं "वीज आणि तेज यांच्या ज्या लहरी (लाटा) त्याला किरण असें म्हणावें." ही व्याख्याहि अव्याप्तच आहे. कारण विद्युत्किरण, तेजःकिरण ह्याप्रमाणें 'चैतन्यकिरण', भावनामय किरण वगैरे ह्यांत घेतले पाहिजे. वर दर्शित केलेल्या किरणासारखे किरण, नभोमंडलांतील प्रत्येक पिंड, ह्या भूगोलावर प्रतिक्षणीं फेकीत आहे. आणि ह्या किरणांचीं कार्यें भिन्न भिन्न असून प्राणी आणि वनस्पति यांच्या जीवनक्रमावर भिन्न भिन्न परिणाम घडत आहेत. हें परिणाम गतिरूप नसून भावनारूप व चैतन्यरूप आहेत. ग्रह किंवा तारा यांच्या किरणांची दिशा सूर्य किरणांच्या दिशेशीं जितक्या भिन्नत्वानें असेल तसे त्यांच्या कार्याचे परिणाम घडतात. अशा तऱ्हेच्या विचारांनीं किरणप्रताप हें शास्त्र बनण्याचा संभव आहे आणि ह्याच शास्त्रानें फलज्योतिःशास्त्रांतील सिद्धांताची सिद्धी होईल. गुरुत्वाकर्षणानें जशी ग्रहांच्या गतीची सिद्धता झाली तशीच फलशास्त्राची सिद्धता होऊन ते शास्त्र प्रगतिपथावर येईल. क्रोमोओपाथी ह्या नांवाचा औषधींचा प्रकार आहे. त्यांत सूर्यकिरणांच्या कार्यानें शुद्ध पाण्याला औषधीचे गुण प्राप्त होतात. विद्युत्किरणाचीं कार्यें, फोटोग्राफी वगैरे विषय किरणप्रताप ह्या शास्त्रांत येतात. किरणप्रतापाचीं कार्यें आणि फलज्योतिःशास्त्राची उपपत्ति यांचा कांहीं अन्योन्य संबंध असावा असें माझ्या कल्पनेंत येतें. कालें करून तें शास्त्र निर्माण होईल. नाहीं म्हणून कोणी सांगावें.

नौकानयन

२१. विवक्षित कालीं ग्रहांचीं स्थानें आकाशांत कोठें आहेत हें गणितानें समजणे हा ज्योतिर्गणिताचा विषय आहे. ज्या कार्यांत ज्योतिर्गणिताचा ह्या प्रकारचा उपयोग होईल अशी अनेक कार्यें आहेत. त्यांपैकीं नौकानयन म्हणजे जहाज एका ठिकाणाहून दुसरें ठिकाणीं नेणें हें एक फार महत्त्वाचें कार्य आहे. नौकानयन निर्धास्तपणें यशस्वी होण्यास जीं अनेक साधनें आहेत त्यांपैकीं ज्योतिर्गणित हें एक अत्यंत आवश्यकतेचें साधन आहे. अफाट महासागरांत हजारो मैलांच्या पसाऱ्यांत जेथें वरती आकाश आणि खाली पाणी ह्याव्यतिरिक्त कांहींच दिसत नाहीं अशा ठिकाणीं आपलें जलयान पृथ्वीच्या कोणत्या भागीं आहे, तसेंच आपण कोणत्या दिशेला जात आहोंत, अशा रीतीनें गेल्यास इष्ट स्थानीं जावयाला वेळ किती लागेल, इत्यादि गोष्टी निश्चितपणें समजण्यास ज्योतिर्गणित हेंच उत्तम साधन होय. किंबहुना ज्योतिर्गणिताशिवाय नौकानयन अशक्य होय. पाश्चात्य ज्योतिःशास्त्रज्ञांनीं ह्या शास्त्राची जी ही अत्यंत सुधारणा केली त्याचें कारण तरी नौकानयनाला सहाय्य हेंच मुख्य आहे. ज्योतिःशास्त्राचें मूल उत्पत्तिस्थान हा आपला आर्यावर्त देशच आहे. परंतु प्रस्तुत ह्याची जी सुधारणा झाली आहे त्यावरून अनभिज्ञ जनांस ह्या शास्त्राच्या उत्पत्तिस्थानाचा संशय येण्यासारखा आहे.

वायुशास्त्र

२२. ग्रहगणितांच्या सहाय्यानें वातावरणाची भविष्यकालीन स्थिति कशी होईल याविषयीं सप्रमाणावलंबी शास्त्रपद्धतीनें ज्यामध्यें विचार केला आहे असें एक शास्त्र तयार होईल असा पूर्ण विश्वास आहे. ह्या शास्त्राला "वायुशास्त्र" असें म्हणता येईल. चंद्राच्या गुरुत्वाकर्षण कार्यानें समुद्रास भरती-ओहोटी होते. ह्याविषयीं कोणासही संशय नाहीं. समुद्राला जशी भरती-ओहोटी होते, त्याप्रमाणें पृथ्वी-सभोंवतीं असलेल्या वातावरणास भरती आणि ओहोटी होते आणि चंद्राच्या आकर्षणानें जसें हें कार्य घडते त्याचप्रमाणे सूर्य आणि ग्रह यांच्या आकर्षणानेंही वायु सागराला भरती आणि ओहोटी होते. तसेंच महासागरामध्ये "गल्फ स्ट्रीम" सारखे प्रवाह उत्पन्न झालेले आपणांस माहित आहेत, त्याप्रमाणें वात सागरांतही प्रवाह उत्पन्न होतात आणि त्यांपैकी कांहीं नियमित कालपर्यंत वाहत असतात.

२३. भूपृष्ठाला उष्णता सूर्यापासून प्राप्त होते. विवक्षित क्षेत्र विभागांत जो उष्णतेचा संग्रह होतो तो तीन गोष्टींवर अवलंबून असतो. पहिली गोष्ट सूर्यापासून जी उष्णता येते ती किती तीव्रतेची आहे ? ही तीव्रता सूर्य आणि पृथ्वी यामध्ये जें अंतर आहे त्या अंतरावर अवलंबून असते. पण तें अंतर सतत सारखें नसतें ; कधीं कमी व कधीं जास्त असें अनियमित प्रमाणानें असतें. दुसरी गोष्ट सूर्यकिरणांची

दिशा. सूर्यकिरणें भूपृष्ठावरील विवक्षित क्षेत्र विभागांत लंब दिशेनें येतील किंवा तिरकस दिशेनें येतील. लंब दिशेनें येणारीं किरणें जेवढा क्षेत्र विभाग व्यापतील त्यापेक्षां जास्त क्षेत्र विभाग तिरकस किरणें व्यापतील. हें कार्य सूर्याच्या उन्नतांशावर अवलंबून राहील. तिसरी गोष्ट सूर्यकिरणे एका अहोरात्रांत किती कालपावेतो उष्णता देतात. त्या कालावर म्हणजे दिनमानावर उष्णतेचें आगमन अवलंबून राहील. विवक्षित क्षेत्रावर उष्णता येते किती, परिमाणें आणि अरिभवनानें विर्सजित होते किती आणि त्या स्थानीं उष्णता राहते किती हा विचार ग्रहगणितानें ठरविता येईल. त्रिकोणमिति आणि सूक्ष्मांश गणिताच्या सहाय्यानें याचा निर्णय करितां येईल.

पर्जन्यवृष्टि विज्ञान

२४. आकाशांतून जो पाण्याचा वर्षाव होतो त्याला पर्जन्यवृष्टि म्हणतात. सूर्याच्या उष्णतेनें पृथ्वीवरील सर्व ठिकाणच्या पाण्याची वाफ होऊन ती वातावरणांत मिसळते. ओल्या वस्त्रामध्यें जसे पाणी शिरून बसतें त्याप्रमाणें हवेमध्यें पाण्याची वाफ बसून राहतें. जाड धान्यामध्यें बारीक धान्य जसे त्याच्या फटीत घुसतें तसे हवेच्या अणूंमध्यें वाफेचे अणु घुसतात. ओल्या कापडावर दाब घातला किंवा ते पिळले असता जसे पाणी बाहेर येतें म्हणजे वस्त्रापासून अलग होतें, त्याप्रमाणें हवेवर दाब (हवेचाच दाब) जास्त झाला म्हणजे त्यातील वाफ मोकळी होते, आणि उष्णतेच्या कमताईमुळें ती थिजून पाण्याचे अणु बनतात. हे अणु अत्यंत सूक्ष्म असल्यामुळें हवेमध्यें धुळीच्या कणाप्रमाणें तरंगत राहतात त्यास आपण ढग किंवा मेघ असें म्हणतो. मेघांतील पाण्याचे अणु एकमेकांकडे गुरुत्वाकर्षण शक्तीनें ओढिले जातात आणि त्या अणूंचे संघ बनून त्यांना बिंदुरूप प्राप्त होते. हवेच्या दाबाच्या कमीअधिक मानाप्रमाणें हवेतील वाफेच्या अणूंची संख्या कमीअधिक असते. त्याप्रमाणें पाण्याचे थेंब लहानमोठे होतात. थेंब पृथ्वीच्या आकर्षण शक्तीनें खालीं येत असता मार्गात त्याला जितके पाण्याचे थेंब आणि अणु भेटतील तितक्यांचा आपणामध्यें समावेश करून जमिनीवर येतो. कदाचित उष्णतेचें मान वाढलें आणि हवेचा दाब कमी झाला म्हणजे ते पाण्याचे थेंब किंवा अणु वाफरूप होऊन हवेत लुप्त होतात.

२५. भूपृष्ठाला सूर्यकिरणापासून उष्णता प्राप्त होते. सूर्यकिरणें सूर्यापासून निघून भूपृष्ठावर आघात करितात त्या आघातानें उष्णता उत्पन्न होते. अशा कार्यामुळें सूर्यकिरणांची उष्णता भूपृष्ठावर उत्पन्न होते आणि तेथून हवेला उष्णता प्राप्त होते. भूपृष्ठाजवळ हवेची उष्णता जास्त असते. तेथून जसें जसें आकाशांत वर जावें तसतशी हवा थंड लागते. थंड हवेपेक्षा उष्ण हवा हलकी असते म्हणून ही हलकी पण उष्ण हवा थंड हवेमधून घुसून वर निघते. अशा प्रकारच्या अनेक

कारणांनीं हवेचें मंथन सदोदित चाललेले असते. ह्या मंथनामुळें थंड हवेचें उष्ण होणें व उष्ण हवेचें थंड होणें ही क्रियाही चालू असते, त्याचप्रमाणें पाण्याच्या वाफेच्या अणूचें ग्रहण आणि त्याग हाही चालू असतो.

२६. भूपृष्ठावरील विवक्षित स्थानीं एखादें वर्षी विपुल पर्जन्यवृष्टी होतें आणि त्याच स्थानीं एखादें वर्षीं अवर्षण पडतें ह्याचें कारण काय असावे ? ज्या सूर्याच्या उष्णतेच्या योगानें आणि ज्या समुद्राच्या पाण्याची वाफ होऊन वृष्टि होते, तोच सूर्य आणि तोच समुद्र असतां वृष्टीमध्यें असा न्यूनाधिकपणा कां व्हावा ह्याचा विचार करूं लागलें असतां वृष्टीशीं ग्रहांच्या आकर्षणाचा संबंध असला पाहिजे हें उघड आहे. ग्रहाच्या आकर्षण कार्यानें हवेमध्यें हवेचे प्रवाह उलटसुलट बनतात. त्या प्रवाहाच्या आघातानें पर्जन्यवृष्टि कमीअधिक होईल. महाराष्ट्राचें उदाहरण घेतले तर त्यावर पर्जन्यवृष्टि मलयाब्धिपासून होते. ह्या समुद्रावरून येणाऱ्या वाऱ्याची दिशा जर दक्षिणेकडे वळली तर वाफेनें भरलेले मेघ दक्षिणेकडे जातील आणि अरबस्थानच्या वाळवंटावरील रुक्ष वारे महाराष्ट्रावरून वाहतील. यामुळें पर्जन्यवृष्टि होणार नाहीं. अशा प्रकारें विचार केला असता वरील म्हणण्याची सत्यता अनुभवास येईल.

२७. वातावरणास चलन उत्पन्न होण्याचें मुख्य कारण सूर्याची उष्णता हें होय. हें एक कारण असतें तर पृथ्वीच्या सर्व भागांवर वृष्टीमध्यें सारखेपणाच राहिला असता. परंतु, चंद्र, सूर्य आणि ग्रह यांच्या गुरुत्वाकर्षण कार्यानें हवेमध्यें अनेक प्रकारचे प्रवाह उपत्न्न होतात आणि वृष्टीच्या कार्यामध्यें अनियमितपणा प्राप्त होतो. ग्रहांच्या युतिकालीं पर्जन्यास अधिकपणा येतो असा माझा समज आहे. या विषयाला गणितशास्त्राची अर्थात ज्योतिर्गणिताची योजना करून ग्रंथ लिहिल्यास आपल्या कृषिप्रधान भरत खंडाची किती सोय होईल ?

२८. वर दर्शित केल्याप्रमाणें पाहिले असता ज्योतिर्गणिताचा उपयोग फारच फार मोठा आहे. त्यांत ही गणितशास्त्राची महती जास्त आहे. गणितशास्त्र म्हणजे गुणाकार-भागाकार नव्हत. त्यांत अनेक मोठमोठे महत्त्वाचे विषय आहेत. ह्या ग्रंथांत त्याच विषयांचें कामापुरतें विवेचन येथून पुढें केलें आहे. हें विवेचन जरी परिपूर्ण ग्रंथाच्या स्वरूपाचें नाहीं तरी त्या त्या विषयाची जाणीव आणि योजना करितां येईल अशा रीतीने लिहिलेले आहे. येवढ्यावरूनच बुद्धिवान उत्तम ग्रंथ लिहूं शकतील अशी मला आशा आहे.

प्रकरण तिसरें

गणितशास्त्रातील मुख्य सिद्धांत

बीजगणित

२९. ह्या ग्रंथात गतिशास्त्राचे सिद्धांत सिद्ध करून दाखवावयाचे आहेत जगांत ज्योतिःशास्त्राची जी अभिवृद्धि झाली आहे, आणि खगोलस्थ ज्योतिविषयीं जें ज्ञान प्राप्त झालें, त्याला मुख्य कारण गतिशास्त्राचे सिद्धांत हें एक आहे. गति म्हणजे काय, ती कशानें उत्पन्न होते, तिचें मापन कसें करावें, वगैरे विवेचन ह्या ग्रंथांत पुढे केलेलें आहे. म्हणून गतिविषयीं येथें कांहीं सांगत नाहीं. पण गति-सिद्धांत सिद्ध करण्याकरितां गणिताच्या उच्च भागाची योजना करावी लागते. ते भाग असे, उच्चप्रतीचे बीजगणित, भूमिति, सरळरेषा-त्रिकोणमिति, गोलीय-त्रिकोणमिती, शंकुच्छिन्न-भूमिति, बैज्यभूमिति, अनुमानसिद्ध-भूमिति, बिंदुनिर्णायक-भूमिति, सूक्ष्मांश-गणित, आकर्षणशास्त्र आणि प्रेरणाशास्त्र. ह्यावरून पाहता ज्या वाचकांना ह्या गणित भागांची माहिती नाहीं, त्यांना पुढे सिद्ध केलेल्या गति-सिद्धांताच्या उपपत्तीचें ज्ञान होणें अशक्य आहे. महाराष्ट्र भाषेंत ह्या गणित भागावर अद्यापि ग्रंथच नाहींत ही मोठी खेदाची गोष्ट आहे. महाराष्ट्र भाषाभिज्ञ कांहीं गणितज्ञास ह्या भागांच्या नांवांची ओळख सुद्धां नाहीं, अशा वाचकांना त्या विषयांचें स्थूल स्वरूप समजावें म्हणून मुख्य मुख्य सिद्धांतांचें विवरण येथें देत आहे.

३०. बीजगणित म्हणजे सामान्य संख्यांनीं केलेलें गणित. मग ती सामान्य संख्या ज्ञात असो की अज्ञात असो. जसें "वर्तुळाचा परीघ व्यासाच्या π ह्या संख्येइतक्या पटीबरोबर असतो". हा सिद्धांत बीज परिभाषेनें लिहिल्यास,

$$प = \pi \text{ ब}$$

ग्रहगतिसिद्धांत

ह्यांतील तिन्ही संख्या सामान्य संख्या आहेत. ज्ञात असलेल्या संख्येस व्यक्त संख्या म्हणतात, आणि जी संख्या किती आहे हें माहित नसतें तेव्हां तिला अव्यक्त संख्या म्हणतात. वरच्या तीन सामान्य संख्येपैकीं प म्हणजे वर्तुळाच्या परीघाची लांबी इच्छित रेषा परिमाणानें मोजून आलेली संख्या आहे, आणि **ब** म्हणजे त्याच वर्तुळाचा व्यास त्याच रेषा परिमाणानें मोजून आलेली संख्या आहे. आणि π ही सामान्य

संख्याच आहे पण ती व्यक्त आहे म्हणजे आपणाला माहित आहे. π ही संख्या हिला 'पाय' असें म्हणतात. वर्तुळाच्या परीघाचें व्यासाशीं असलेलें गुणोत्तर ह्या π (पाय) संख्येनें दाखवितात आणि हें गुणोत्तर ३·१४१५९२ ह्या संख्येनें जाणिलें जाते.

घात, घातप्रकाशक आणि घातांक

३१. घात––विवक्षित संख्येनें १ ह्या संख्येस गुणून आलेला जो गुणाकार, त्या गुणाकारास, त्याच विवक्षित संख्येनें पुन: गुणून जो गुणाकार येईल, त्या गुणाकारास त्याच विवक्षित संख्येनें पुन: गुणणें ; ह्याप्रमाणें कांहीं वेळां गुणून आलेला जो गुणाकार, त्यास त्या विवक्षित संख्येचा "**घात**" म्हणतात.

घातप्रकाशक––विवक्षित संख्येने, जितके वेळां गुणिले असेल, तितकी संख्या दाखविणाऱ्या अंकास **घातप्रकाशक** म्हणतात. जसें १ ह्या संख्येला ४ ह्या संख्येनें ३ वेळां गुणिले तर जो एक गुणाकार येतो, त्यास ४ ह्या संख्येचा त्रिघात म्हणतात.

१×४ हा ४ चा एक घात; $१ \times ४ \times ४$ हा ४ चा द्विघात; $१ \times ४ \times ४ \times ४$ हा ४ चा त्रिघात होय.

कोणत्याही संख्येच्या द्विघातास **वर्ग** म्हणतात आणि त्रिघातास **घन** म्हणतात.

$१ \times ४ = ४$ ही संख्या ४ चा एकघात हा $४^{१}$ असा लिहितात.

$१ \times ४ \times ४ = १६$ ही संख्या ४ चा द्विघात म्हणजे वर्ग हा $४^{२}$ असा लिहितात.

$१ \times ४ \times ४ \times ४ = ६४$ ही संख्या त्रिघात म्हणजे घन हा $४^{३}$ असा लिहितात.

$१ \times अ \times अ \times अ \times अ$ ही संख्या अ चा चतुर्थघात हा $अ^{४}$ असा लिहितात.

वरच्या तीन ओळीत ४ ह्या संख्येचे अनुक्रमें एक दोन तीन घात आहेत ते $४^{१}$, $४^{२}$, $४^{३}$ असें लिहिले आहेत. ह्यांत १, २, ३ ह्या संख्या ४ ह्या संख्येपेक्षां किंचित लहान वरच्या बाजूस किंचित उजवीकडे लिहिल्या आहेत, ह्या संख्यांना घातप्रकाशक म्हणतात. चवथ्या ओळींत अ ह्या संख्येचा चतुर्थघात आहे व तो $अ^{४}$ असा लिहिला आहे. ह्या घातांत ४ हा घातप्रकाशक आहे.

३२. एकाच संख्येच्या अनेक घातांचा गुणाकार हा, त्याच संख्येच्या पूर्वीच्या घातप्रकाशकांच्या बेरजेइतका घात केल्याने जी संख्या येते त्या संख्येबरोबर असतो.

जसें $क्ष^{३} \times क्ष^{२} = क्ष^{३+२} = क्ष^{५}$. (क)

येथे $क्ष^{३} = १ \times क्ष \times क्ष \times क्ष$ आणि $क्ष^{२} = १ \times क्ष \times क्ष$ यांचा गुणाकार

$$\begin{aligned} क्ष^{३} \times क्ष^{२} &= १ \times क्ष \times क्ष \times क्ष \times १ \times क्ष \times क्ष \\ &= १ \times क्ष \times क्ष \times क्ष \times क्ष \times क्ष \\ &= क्ष^{३+२} = क्ष^{५}. \end{aligned}$$

तसेच $३^{४} \times ३^{२} \times ३^{३} = ३^{४+२+३} = ३^{९}$.

आणि $अ^{२} \times अ \times अ^{४} = अ^{२+१+४} = अ^{७}$.

३३. एकाच संख्येच्या दोन घाताचा भागाकार हा भाज्यांच्या घातप्रकाशका-तून भाजकाचा घातप्रकाशक वजा करून आलेल्या बाकी इतका त्याच संख्येचा घात केल्याने जी संख्या येईल, तिच्याबरोबर असतो. (ख)

जसें $अ^{५}$ या संख्येला $अ^{२}$ या संख्येने भागावयाचे असेल तर

$$अ^{५} \div अ^{२} = \frac{अ^{५}}{अ^{२}} = अ^{५-२} = अ^{३}$$

म्हणजे
$$= \frac{१ \times अ \times अ \times अ \times अ \times अ}{१ \times अ \times अ}$$
$$= १ \times अ \times अ \times अ = अ^{३}$$

३४. वरच्या लेखातील सिद्धांतात ऋण घातप्रकाशक याचा अर्थ स्पष्ट होत आहे. तो असा की $अ^{२}$ ह्या संख्येला $अ^{५}$ ह्या संख्येने भागावयाचे तर

$$\frac{अ^{२}}{अ^{५}} = अ^{२-५} = अ^{-३}$$

म्हणजे
$$\frac{१ \times अ \times अ}{१ \times अ \times अ \times अ \times अ \times अ}$$
$$= \frac{१}{१ \times अ \times अ \times अ} = अ^{-३} = \frac{१}{अ^{३}} \quad \cdot\cdot \quad (ग)$$

ह्यावरून ऋण घातप्रकाशक याचा अर्थ असा होतो कीं घातप्रकाशक घन असतां जो संख्येचा घात होतो तो १ ह्या संख्येला भाजक आहे असा होतो.

३५. घातप्रकाशकाच्या गुणाकारानें विवक्षित संख्येच्या घाताचा घात होतो. क्ष चा न घात करून जी संख्या येईल तिचा म घात करावयाचा असेल तर क्ष चा न म इतका घात करावा लागेल.

$क्ष^{न}$ ही संख्या क्ष चा न घात आहे हिचा म घात $(क्ष^{न})^{म}$ हा होईल. ह्याचा अर्थ

$$(क्ष^{न})^{म} = १ \times क्ष^{न} \times क्ष^{न} \times क्ष^{न} \text{ इत्यादि म वेळां}$$

$$\text{म्हणून} \quad = क्ष^{न + न + न + \cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$= क्ष^{न \times म}.$$

उपसिद्धांत (१) $(क्ष^{म})^{न} = क्ष^{म \times न} = क्ष^{मन} = क्ष^{नम}$ ...... (त)

उपसिद्धांत (२) $(क्ष^{न})^{म} = (क्ष^{म})^{न}$ ...... (थ)

३६. कोणत्या तरी एका अज्ञात संख्येचा अमुक संख्यांक घात करून जी संख्या आली आहे ती दिली आहे, व जो घात केला तो घातप्रकाशक दिला आहे, तर ती मूळ अज्ञात संख्या ठरविणें ह्या कृत्याला 'मूळ काढणें' असें म्हणतात व त्या अज्ञात संख्येलाही दिलेल्या संख्येचें **मूळ** म्हणतात.

एक अज्ञात संख्या आहे, तिचा द्विघात केला तर ४९ ही संख्या येते, तर ती मूळ संख्या किती ? येथे द्विघात म्हणजे वर्ग केला आहे, आणि ४९ ही संख्या ७ चा वर्ग आहे म्हणून ४९ चें वर्गमूळ ७ ही संख्या आहे.

एका अज्ञात संख्येचा चतुर्घात केला असता ८१ ही संख्या येतें तर हिचें चतुर्घात मूळ कोणती संख्या येतें ? चतुर्घात म्हणजे २ × २ इतका घात अर्थात चतुर्घात मूळ म्हणजे वर्गमूळाचें वर्गमूळ. ८१ चें वर्गमूळ ९ आहे, आणि ९ चें वर्गमूळ ३ आहे म्हणून ८१ चें चतुर्घात मूळ ३ हे आहे.

३७. कोणत्याही संख्येचें मूळ काढणें हें कार्य दाखविण्यासाठी आणि त्या संख्येचे अमूक संख्यांक मूळ काढावयाचे तो अंक दाखविण्यासाठी एका चिन्हाची योजना केली आहे त्यास मूळचिन्ह म्हणतात, आणि ते $\sqrt{}$ असें लिहितात. तसेंच ज्या संख्येइतके मूळ काढावयाचे असेल तो अंक त्या चिन्हांत लिहितात. जसें ८१ ह्या संख्येचें 'चतुर्घात मूळ' $\sqrt[४]{८१}$ असें दाखवितात.

म्हणजे ज्या संख्येचें मूळ काढावयाचे ती संख्या ह्या चिन्ह्याच्या उजवीकडे लिहून डावीकडच्या कोनभागात मूळ दर्शक अंक लिहितात. पण द्विघात म्हणजे वर्ग-दर्शक अंक २ हा कोनभागात लिहित नाहींत. जसें २५ ह्या संख्येचें वर्गमूळ ५ हे—

$$\sqrt{२५}=५$$

३८. कोणत्याही संख्येचा म संख्यांक घात करून आलेल्या संख्येचे न संख्यांक मूळ काढिले तर जी संख्या येईल ती, पूर्व संख्येचे प्रथम न संख्यांक मूळ काढून आलेल्या संख्येचा म घात केला असता येणाऱ्या संख्येबरोबर असते. ...... (द)

हा सिद्धांत बीज परिभाषेनें खालीं दाखविल्याप्रमाणें दाखविला जातो :—

जसें— $$\sqrt[न]{(क्ष^{म})}=\left(\sqrt[न]{क्ष}\right)^{म}$$

एखाद्या संख्येचें विवक्षित संख्यांक मूळ काढून त्या मूळाचा त्याच मूळ संख्येइतका घात केला तर ती पूर्व संख्या येतें. तसेंच एखाद्या संख्येचा विवक्षित संख्यांक घात करून आलेल्या संख्येचे त्याच घात संख्येइतकें मूळ काढिले तर ती पूर्व संख्या येते. जसें २७ ह्या संख्येच्या घनमूळाचा (३ ह्या संख्येचा) घन केला तर २७ हीच संख्या येते किंवा २५६ चें वर्गमूळ काढून त्याचा (१६ या संख्येचा) वर्ग केला तर २५६ हीच संख्या येते. ह्या प्रत्यक्ष प्रमाणांच्या आधारें वरचा सिद्धांत सिद्ध करिता येतो. तो असा—

$$\sqrt[न]{(क्ष^{म})} = अम$$ आहे असें घेतलें.

दोन्ही पेटयांचा न घात केला तर डावीकडचे पद $क्ष^{म}$ होईल वरचे प्रत्यक्ष प्रमाण.

तेव्हां $$क्ष^{म} = \left(अ^{म}\right)^{न} = \left(अ^{न}\right)^{म}$$ [लेख ७]

$$क्ष = अ^{न}$$

दोन्ही पेटयांचे न संख्यांक मूळ काढिले तर,

$$\sqrt[न]{क्ष} = अ$$

दोन्ही पेटयांचा म घात केला तर,

$$\left(\sqrt[न]{क्ष}\right)^{म} = अ^{म}$$

परंतु $अ^{म} = \sqrt[न]{(क्ष^{म})}$ असे घेतलें आहे.

म्हणून $\sqrt[न]{(क्ष^{म})} = (\sqrt[न]{क्ष})^{म}$ हें सिद्ध.

३९. वरचे सिद्धांत पूर्ण आणि घन संख्यात्मक घातप्रकाशक आहेत असें मानून सिद्ध केले आहेत. तेव्हां अपूर्ण आणि ऋण घातप्रकाशक असणें संभवतात किंवा नाहीं याचा विचार करावयाचा पाहिजे आहे. पूर्णांक घातप्रकाशकाचे सिद्धांत सिद्ध आहेत, त्या सिद्धांतांच्या योजनेनें पृथक्करणद्वारा अपूर्ण घातप्रकाशक असूं शकतो. व त्याची कार्ये करितां येणारीच आहेत हें सिद्ध होते.

४०. प्रथम अपूर्ण घातप्रकाशकाचा अर्थ काय होता ते पाहू. उदाहरणार्थ, $क्ष^{\frac{२}{३}}$ किंवा $क्ष^{\frac{३}{४}}$ अथवा $क्ष^{\frac{१}{म}}$ इत्यादि. कोणत्याही अपूर्णांकाला अंश व छेद असतो, आणि त्या अपूर्णांकाला छेदांकानें गुणिलें तर, त्या अपूर्णांकाचें अपूर्णत्व जाऊन गुणाकार पूर्णांक बनतो जसें $\frac{२}{३} \times ३ = २$, $\frac{३}{४} \times ४ = ३$. $\frac{१}{म} \times म = १$.

(प्रथम) $क्ष^{\frac{२}{३}}$ या संख्येचा घन करू.

लक्षणाप्रमाणें $१ \times क्ष^{\frac{२}{३}} \times क्ष^{\frac{२}{३}} \times क्ष^{\frac{२}{३}} = क्ष^{\frac{२}{३}+\frac{२}{३}+\frac{२}{३}} = क्ष^{\frac{६}{३}}$

$$(क्ष^{\frac{२}{३}})^{३} = क्ष^{२} = (क्ष)^{२}.$$

$क्ष^{\frac{२}{३}}$ या संख्येचा घन जर क्ष चा वर्ग आहे तर $क्ष^{\frac{२}{३}}$ ही संख्या $क्ष^{२}$ चें घनमूळ आहे.

(द्वितीय) $क्ष^{\frac{३}{४}}$ या संख्येचा चतुर्घात केला तर,

$$(क्ष^{\frac{३}{४}})^{४} = क्ष^{३}$$

म्हणून $क्ष^{\frac{३}{४}}$ ही संख्या क्ष च्या घनाचें चतुर्घात मूळ आहे.

(तृतीय) $क्ष^{\frac{१}{म}}$ या संख्येचा आपण म घात करूं,

लक्षणाप्रमाणें $१ \times क्ष^{\frac{१}{म}} \times क्ष^{\frac{१}{म}} \times क्ष^{\frac{१}{म}} \times$ इत्यादी म पदें,

तेव्हां $(क्ष^{\frac{१}{म}})^{म} = क्ष^{\frac{१}{म} \times म} = क्ष^{१} = क्ष$.

येथें $क्ष^{\frac{१}{म}}$ ह्या संख्येचा म घात केला म्हणजे क्ष ही संख्या येतें म्हणून $क्ष^{\frac{१}{म}}$ ही संख्या क्ष ह्या संख्येचें म घात मूळ आहे. ह्यावरून अपूर्ण घात प्रकाशकानें दोन सिद्धांत सिद्ध होतात.

(१) अपूर्ण घातप्रकाशक असेल तर त्या अपूर्णांकाच्या अंशाइतका घात करावयाचा आहे असा अर्थ होतो.

(२) अपूर्ण घात प्रकाशक असेल तर त्या अपूर्णकांच्या छेदांकाइतके मूळ काढावयाचे आहे असा अर्थ होतो.

म्हणजे
$$क्ष^{\frac{२}{३}} = \sqrt[३]{क्ष^२}$$
$$क्ष^{\frac{३}{४}} = \sqrt[४]{क्ष^३}$$
$$क्ष^{\frac{१}{म}} = \sqrt[म]{क्ष}$$
आणि
$$क्ष^{\frac{न}{म}} = \sqrt[म]{(क्ष^न)}$$

१३. वरच्या सिद्धतेचा विशेष खुलासा खालच्या उदाहरणावरून होईल.

(१) $२७^{\frac{५}{३}} = \sqrt[३]{(२७^५)} = (\sqrt[३]{२७})^५ = ३^५ = २४३.$

(२) $५१२^{\frac{२}{३}} = \sqrt[३]{(५१२^२)} = ८^२ = ६४.$

(३) $\sqrt[६]{(७^३)^२} = \sqrt[६]{(७)^६} = ७^{\frac{६}{६}} = ७.$

(४) $५^{\frac{५}{२}} = \sqrt[२]{५^५} = \sqrt[२]{३१२५},$

१४. घातप्रकाशक ऋण असल्यास त्याचें कार्य कसें असते याचा खुलासा लेखांक ६ सिद्धांत ग नें मागे केला आहे. तेथें पूर्णांक घातप्रकाशक योजून सिद्धता केली आहे. तीच अपूर्णांक घात प्रकाशकास ही योजण्यास योग्य आहे.

उदाहरणार्थ—क्ष$^{-\frac{ग}{म}}$ हा राशि घ्या. ह्याला आपण क्ष$^{(प+\frac{ग}{म})}$ ह्या राशीनें गुणिले :—

तेव्हां $क्ष^{प+\frac{ग}{म}} \times क्ष^{-\frac{ग}{म}} = क्ष^{प+\frac{ग}{म}-\frac{ग}{म}} = क्ष^प$;

ह्या समीकरणास क्ष$^{प+\frac{ग}{म}}$ ह्याच राशीने भागिलें तेव्हां

$$\frac{क्ष^{प+\frac{ग}{म}} \times क्ष^{-\frac{ग}{म}}}{क्ष^{प+\frac{ग}{म}}} = \frac{क्ष^प}{क्ष^प \times क्ष^{\frac{ग}{म}}} = \frac{१}{क्ष^{\frac{ग}{म}}}$$

ह्यावरून दिसून येते कीं, ऋण घातप्रकाशक असेल तर, तोच घातप्रकाशक धन असता जो राशी होईल, ती संख्या १ ह्या संख्येला छेद लिहावयाचा असा

अर्थ होतो, म्हणजे अंशस्थानी १ व छेदस्थानी ती संख्या लिहून जो अपूर्णांक होईल तो त्या ऋण घातप्रकाशकानें होणाऱ्या घाताची संख्या असते.

उदाहरण— $३^{-२} = \frac{१}{३^{२}} = \frac{१}{९}$; $२^{-३} = \frac{१}{८}$;

$$२५^{-\frac{३}{२}} = \frac{१}{२५^{\frac{३}{२}}} = \frac{१}{५^{३}} = \frac{१}{१२५}.$$

१५. (१) कोणत्याही संख्येचा ० घात केला तर कोणती संख्या येईल हें लक्षणावरूनच स्पष्ट होते. क्ष चा ० घात म्हणजे १ ह्या संख्येला क्षने ० वेळा गुणिलें म्हणजे गुणिलेच नाहीं म्हणून $क्ष^{०} = १$ आहे. तसेच सिद्धांत ख प्रमाणे ० घात-प्रकाशकाचा अर्थ कळतो. उदाहरणार्थ $क्ष^{९}$ या राशीला $क्ष^{५} \times क्ष^{४}$ या राशीनें भागिले तर

$$\frac{क्ष^{९}}{क्ष^{५} \times क्ष^{४}} = \frac{क्ष^{९}}{क्ष^{९}} = क्ष^{९-९} = क्ष^{०} = १$$

(२) कोणत्याही संख्येचा १ घात म्हणजे तीच संख्या, हेही लक्षणावरून उघड आहे. १ ह्या संख्येला क्ष नें एक वेळच गुणले तर

$$१ \times क्ष = क्ष.$$

तसेच सिद्धांताप्रमाणे $क्ष^{५} \div क्ष^{४} = \frac{क्ष \times क्ष \times क्ष \times क्ष \times क्ष}{क्ष \times क्ष \times क्ष \times क्ष} = क्ष.$

द्विपद राशीचा घात विस्तार

१६. घात सिद्धांत ह्या विषयांतील वर जे सिद्धांत सिद्ध केले ते असे आहेत कीं, त्यामध्यें ज्या राशीचा घात करावयाचा तो राशी किंवा ती संख्या एक पदात्मक होती. आता आपण त्या एक पदाच्या ठिकाणी दोन पदें घेऊन त्या द्विपद राशीचा इच्छिलेल्या संख्येइतका घात करावयाचा असता जो अनेक पदात्मक राशी तयार होईल त्याचें स्वरूप कसें असतें याचा विचार करूं. द्विपद राशीचा घात जो तयार होईल त्या मध्यें पुष्कळ पदें तयार होतात, त्या पदांचा जो समुदाय त्यास त्या द्विपद राशीचा घातविस्तार म्हणतात. ह्या घात विस्तारामध्यें जी नियमबद्धता आहे त्या बद्धतेचें स्वरूप आपणास ठरवावयाचें आहे.

१७. द्विपद सिद्धांत.—एका राशीत दोन पदें आहेत, त्या राशीचा पूर्ण, अपूर्ण, धन किंवा ऋण अशा कोणत्याही संख्येइतका घात केला असता तो घातविस्तार कसा असतो हे ह्या सिद्धांतात सिद्ध केले आहे. 'द्विपद सिद्धांत' हा शब्द पारिभाषिक आहे. याचा यौगिक अर्थ दोन पदांचा सिद्धांत अशा प्रकारचा होईल, पण आम्हाला

हा अर्थ पुरेसा नाहीं. द्विपद राशीचा इष्ट संख्येइतका घात केला असता तो कशा प्रकारचा होतो हे ठरविणारा सिद्धांत असा अर्थ आम्ही योजिला आहे. हा सिद्धांत सिद्ध करण्याच्या पद्धती अनेक आहेत, ह्या सिद्धांतास आंग्ल भाषेतील ग्रंथात न्यूटनचा द्विपद सिद्धांत असें म्हटले आहे. (Binomial theorem. This theorem was discovered by Newton) ह्या ग्रंथांत ह्या सिद्धांताची सिद्धता सर ऐझाक न्यूटनच्या पद्धतीनें न करिता अन्य रीतीनें केली आहे. आणि तो भारतीय गणकांना सहज समजण्यासारखी आहे. द्विपद राशीचा घातविस्तार केला असता त्या विस्तारात किती पदें उत्पन्न होतात, प्रत्येक पदामध्यें प्रथम पदाचा घातप्रकाशक कोणता येतो व द्वितीयपदाचा घातप्रकाशक कोणता येतो, आणि प्रत्येक पदाला 'गुण' कापता येतो ह्या गोष्टी सिद्ध करावयाच्या आहेत.

१८. (क्ष+य) हा द्विपद राशी आहे. ह्या राशीचा आपणास घातविस्तार करावयाचा आहे. म्हणजे इच्छिलेल्या घातप्रकाशकाइतका घात करून जी पदमाला येईल ती प्रत्यक्ष लिहावयाची आहे. घात ह्या शब्दाची व्याख्या लेखांक ३ मध्यें दिली आहे. प्रथम आपण पूर्ण आणि अपूर्ण धन असा घातप्रकाशक घेऊन तत्परिमित घात करू. घात करावयाचा म्हणजे १ ह्या संख्येला (क्ष + अ) ह्या द्विपद राशीने घातप्रकाशकानें दर्शित संख्येइतक्यां वेळां गुणावयाचे आहे. हें गुणाकार आपण बीजगणिताच्या पद्धतीनें करूं. आणि घातप्रकाशक क्रमानें १, २, ३, ४, ५ हे क्रमानें घेऊं. गुणाकारानें जी पदमाला तयार होईल ती क्ष च्या उतरत्या घातावळीनें आणि अ च्या चढत्या घातावळीनें लिहू. ह्याप्रमाणें लिहिण्यास कोणतीही अडचण येत नाहीं. प्रत्यक्ष गुणाकारानें येणारा घातविस्तार खालीं लिहिला आहे:—

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{१}=\text{क्ष}+\text{अ}.$$

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{२}=\text{क्ष}^{२}+२\ \text{अक्ष}+\text{अ}^{२}$$

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{३}=\text{क्ष}^{३}+३\ \text{अक्ष}^{२}+३\ \text{अ}^{२}\text{क्ष}+\text{अ}^{३}$$

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{४}=\text{क्ष}^{४}+४\ \text{अक्ष}^{३}+६\ \text{अ}^{२}\text{क्ष}^{२}+४\ \text{अ}^{३}\text{क्ष}+\text{अ}^{४}$$

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{५}=\text{क्ष}^{५}+५\ \text{अक्ष}^{४}+१०\ \text{अ}^{२}\text{क्ष}^{३}+१०\ \text{अ}^{३}\text{क्ष}^{२}+५\ \text{अ}^{४}\text{क्ष}+\text{अ}^{५}$$

ह्या द्विपद राशीमध्ये क्ष आणि अ अशा दोन संख्या आहेत. त्या दोन्हीही धन आहेत. त्यापैकी क्ष ह्या संख्येला प्रथम संख्या आणि अ ह्या संख्येला द्वितीय संख्या म्हणूं. प्रत्येक घात विस्तारात जी पदें आली आहेत त्या पदांना डावीकडून क्रमानें

पहिलें पद दुसरें पद असें म्हणू. वरच्या घात विस्तारात जे नियम प्रत्येक घात प्रकाशकाच्या विस्तारास लागू आहेत ते खालीं दिले आहेत :—

(१) द्विपद राशीच्या घात विस्तारांत जी पद संख्या उत्पन्न होते ती, द्विपद राशीला जो घातप्रकाशक असेल त्यापेक्षा १ ने अधिक असते. घातप्रकाशक ४ असल्यास पद संख्या ५ असते, आणि घातप्रकाशक ९ असल्यास पद संख्या १० येते.

(२) द्विपद राशीच्या घात विस्तारांत पहिलें पद प्रथम संख्येचें म्हणजे क्ष चे असून त्याचा घातप्रकाशक द्विपद राशीच्या घात प्रकाशकाइतकाच (तोच) असतो. त्यात द्वितीय संख्येचा अवयव नसतो. आणि शेवटचें पद द्वितीय संख्येचें असून त्याचा घातप्रकाशक द्विपद राशीच्या घातप्रकाशकाइतकाच असतो व त्यात प्रथम संख्येचा अवयव नसतो.

(३) द्विपद राशीच्या घात विस्तारात पहिलें आणि शेवटचें पद खेरीजकरून मधल्या प्रत्येक पदात प्रथम संख्या व द्वितीय संख्या ह्या दोन्हीही अवयवरूपानें असतात, आणि त्यांच्या घातप्रकाशकांची बेरीज द्विपद राशीच्या घातप्रकाशका-इतकी असते.

(४) द्विपद राशीच्या घात विस्तारांत प्रथम संख्येचा घातप्रकाशक प्रत्येक पदात एक, एक ह्या संख्येनें कमी होत जातो, आणि द्वितीय संख्येचा घातप्रकाशक एक, एक ह्या संख्येने वाढत जातो.

(५) द्विपद राशीच्या घात विस्तारांत पहिल्या पदाचा गुण (गुणक) १ असतो. इतर कोणत्याही पदाचा गुणक हा त्या पदापूर्वी जें पद असेल त्याचा गुणक, आणि त्याच पदातील प्रथम संख्येचा (क्ष चा) घातप्रकाशक यांच्या गुणाकारास त्याच पदाच्या क्रमसंख्येनें भागून आलेल्या भागाकाराबरोबर असतो. जसें चतुर्घाताच्या घात विस्तारात तिसऱ्या म्हणजे $अ^{२}$ $क्ष^{२}$ यास गुणक आला तो, दुसऱ्या पदाचा गुणक ४ व क्ष ह्या प्रथम संख्येचा घातप्रकाशक ३ यांच्या गुणाकारास पदक्रम २ नें भागून

भागाकार $\frac{४ \times ३}{२} = ६$ येतो तत्परिमित आहे.

१९. वरच्या लेखांत जे पांच नियम दिले आहेत ते प्रत्यक्ष सिद्ध आहेत. तथापि वरच्या नियमाधारें (क्ष+अ) ह्याच पदाचा षड्घात करूं. आणि वरच्या लेखांत ह्याच द्विपद राशीचा पंचघात केलेला आहे त्यांस (क्ष+अ) ह्याच द्विपद राशीनें गुणू आणि दोन्ही षड्घाताची तुलना करूं. प्रथम नियमाधारें षड्घात करूं.

(१) पहिल्या नियमाप्रमाणें षड्घात घातविस्तारात सात पदें निर्माण होतील.

(२) ह्या सात पदांपैकीं पहिलें पद $क्ष^{६}$ हे असेल.

(३) ह्या नियमाप्रमाणें दुसरें पदांत $क्ष^{५}$ असेल व दुसऱ्या संख्येचा ६—५=१ घात असेल म्हणजे दुसरे पदांत $अक्ष^{५}$ हें अवयव आहेत. तिसरें पदांत ह्याप्रमाणेंच $अ^{२}क्ष^{४}$ हें अवयव असतील. ह्याप्रमाणें गुणकाविरहित सर्व पदें खाली लिहिल्या-प्रमाणें होतील :—

$$(क्ष+अ)^{६} = क्ष^{६} + अक्ष^{५} + अ^{२}क्ष^{४} + अ^{३}क्ष^{३} + अ^{४}क्ष^{२} + अ^{५}क्ष + अ^{६}$$

ह्या पदश्रेणींत प्रत्येक पदाचा गुणक तयार करून लिहिला म्हणजे घातविस्तार पूर्ण होईल. ते गुणक पांचव्या नियमाप्रमाणें येतील.

(४) पहिल्या पदाचा गुणक १ आहे आणि कोणत्याही पदाला १ हा गुणक असतो म्हणून तो लिहिण्याची आवश्यकता नाहीं. पहिल्या पदाचा गुणक १ व ह्या पदांत प्रथम संख्येचा घातप्रकाशक ६ यांचा गुणाकार ६ ह्यास भागिले पद क्रम संख्या १ म्हणून

$$\text{दुसऱ्या पदाचा गुणक} = \frac{१ \times ६}{१} = ६.$$

$$\text{ह्याप्रमाणेंच तिसऱ्या पदाचा गुणक} = \frac{१ \times ६}{१} \times \frac{५}{२} = \frac{६ \times ५}{१ \times २} = १५$$

$$\text{तसेंच चवथ्या पदाचा गुणक} = \frac{६ \times ५}{१ \times २} \times \frac{४}{३} = \frac{६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३} = २०$$

$$\text{पांचव्या पदाचा गुणक} = \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३}{१ \times २ \times ३ \times ४} = १५$$

$$\text{सहाव्या पदाचा गुणक} = \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५} = ६$$

$$\text{सातव्या पदाचा गुणक} = \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६} = १$$

एकंदर घातविस्तार खालीं लिहिल्याप्रमाणें $(क्ष+अ)^{६} = क्ष^{६} + ६अक्ष^{५} + १५अ^{२}क्ष^{४} + २० अ^{३}क्ष^{३} + १५ अ^{४}क्ष^{२} + ६अ^{५}क्ष + अ^{६}$.

आणि $(क्ष+अ)^{५}$ ह्या घातविस्तारास प्रत्यक्ष (क्ष+अ) गुणिले तर गुणाकार $(क्ष+अ)^{६}$ ह्याच घातविस्ताराबरोबर येतो. म्हणून वरचे पांच नियम निरपवाद आहेत. द्विपद सिद्धांतांची जी ही सिद्धता केली ती शुद्ध आहे याचें प्रत्यंतर सूक्ष्माक्ष गणिताधारें दिसून येतें.

२०. वरच्या घातविस्तारांत घातप्रकाशक व्यक्त संख्येनें दाखविला आहे. तो सामान्य संख्येच्या रूपानें दाखविल्यानें विस्ताराचें स्वरूप वरच्या पांच नियमाधारें ठरवितां येते, तें सामान्य स्वरूप असें द्विपद राशीनें सामान्य स्वरूप $(क्ष + अ)^{न}$ हें घेऊ

ह्या घातविस्तारात पहिलें पद $= क्ष^{न}$ हें आहे.

दुसरें पद $= + नअक्ष^{न-१}$, तिसरें पद $+ \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} अ^{२} क्ष^{(न-२)}$,

चवथें पद $= \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} अ^{३} क्ष^{(न-३)}$

ह्यावरून—

$$(क्ष + अ)^{न} = क्ष^{न} + न अ क्ष^{न-१} + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} अ^{२} क्ष^{न-२}$$

$$+ \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} अ^{३} क्ष^{न-३}$$ + घातप्रकाशक आणि धन असतां हा द्विपद सिद्धांत सिद्ध आहे.

२१. द्विपद राशीपैकीं पहिली राशी १ ही संख्या असेल तर, त्या घातविस्ताराचें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें होईल. व हें वरच्या पांच नियमाधारेंच सिद्ध होतें. प्रथम संख्या १ असल्यामुळें विवक्षित पदांत पहिल्या संख्येचा घातप्रकाशक किती हा समजणार नाहीं, कारण १ ह्या संख्येचा कोणताही घात केला तरी तो १ ह्या संख्यात्मकच असतो. परंतु विवक्षि पदीं द्वितीय संख्येचा घातप्रकाशक समजतो आणि नियम ३ प्रमाणें प्रथम संख्या क्ष हिचाहि कळतो.

वरच्या लेखांतील विस्तारांत क्ष = १ मानिला तर त्याचें स्वरूप खाली लिहिल्या-प्रमाणें—

$$(१ \times अ)^{न} = १ + नअ + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} अ^{२} +$$

$$\frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} अ^{३} + \ldots\ldots\ldots$$

२२. वरच्या २१ व्या लेखातील समीकरणांत अ जर ऋण असेल तर अ च्या विषम घाताची (२ नीं न भागल्या जाणाऱ्या) पदें ऋण व इतर म्हणजे सम घाताची पदें धन असतात. दोन्हीं पदें ऋण असलीं तरी ह्याच नियमाप्रमाणें घनर्ण पदांचा गुणाकार ह्या नियमाप्रमाणें पदांना चिन्हें धन किंवा ऋण अशी येतात. त्यांचा घातप्रकाशक व गुण यांच्या चिन्हांशी कांहीं संबंध नसतो.

२३. द्विपद राशीचा घातविस्तार करावयाचा असतां, द्विपद राशीला जो घातप्रकाशक असतो तो पूर्ण संख्यांक आणि धन असता घातविस्ताराचे स्वरूप कसें येते हें लेख १८ मधील पांच नियमांनीं स्थापित केलें. आतां आपण असें सिद्ध करूं कीं, द्विपद राशीचा घातप्रकाशक अपूर्ण संख्यांक असतां किंवा ऋण असतां ही घातविस्ताराचें स्वरूप त्याच पांच नियमांनीं स्थापित होतें. ही सिद्धता आपणास घात सिद्धांत आणि प्रत्यक्ष कृति यांच्या आधारें करिता येते. म्हणजे द्विपद राशीच्या अनेक घातांचा गुणाकार भागाकार यामुळें येणारा नवीन घातप्रकाशक ह्यानें त्याच द्विपद राशीच्या वरच्या पांच नियमांनीं घातविस्तार केला असतां त्यांत येणारीं पदें ह्याशीं, त्याच द्विपद राशीच्या प्रत्येक घातप्रकाशकानें जो घात विस्तार येईल त्यांचा प्रत्यक्ष गुणाकार भागाकार केला असतां जी पदें येतील, त्यांचे एकरूपत्व असेल तर तो सिद्धांत सिद्ध आहे असे स्थापित होतें. ही सिद्धता खालीं करून दाखविली आहे.

२४. एकाच द्विपद राशीचें $(क्ष+अ)^{न}$ आणि $(क्ष+अ)^{\frac{1}{न}}$ असें दोन घात आहेत. यांचा आपण गुणाकार करूं, आणि तो गुणाकार घात सिद्धांताप्रमाणें कसा होतो हें पहा—

$$(क्ष+अ)^{न} \times (क्ष+अ)^{\frac{1}{न}} = (क्ष+अ)^{न+\frac{1}{न}}$$

ह्या तीन्ही घातांचा घातविस्तार ह्याच्या पांच नियमांनीं घातविस्तार करूं.

$$(क्ष+अ)^{न} = क्ष^{न} + नअक्ष^{न-१} + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}अ^{२}क्ष^{न-२}$$

$$+\dots\dots(१)$$

$$(क्ष+अ)^{\frac{1}{न}} = क्ष^{\frac{1}{न}} + \frac{1}{न}अक्ष^{\frac{1}{न}-१} + \frac{\frac{1}{न}\left(\frac{1}{न}-१\right)}{१\cdot२}अ^{२}क्ष^{\frac{1}{न}-२}$$

$$+\dots\dots(२).$$

समीकरण (१) व (२) यांचा गुणाकार केला, तेव्हां—

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{\text{न}+\frac{१}{\text{न}}} = \text{क्ष}^{\text{न}+\frac{१}{\text{न}}} + \left(\text{न}+\frac{१}{\text{न}}\right)\text{अक्ष}^{\left(\text{न}+\frac{१}{\text{न}}-१\right)}$$

$$+ \frac{\left(\text{न}-\frac{१}{\text{न}}\right)\left(\text{न}+\frac{१}{\text{न}}-१\right)}{१\cdot२}\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{\left(\text{न}+\frac{१}{\text{न}}-\ \right)} + \ldots\ldots(३).$$

हा गुणाकार येतो आणि (क्ष+अ) चा $\text{न}+\frac{१}{\text{न}}$ हा घातप्रकाशक येऊन पांच नियमाप्रमाणे घातविस्तार केला तर त्याच्या प्रत्येक पदाचें स्वरूप समीकरण (३) मधील प्रत्येक पदाच्या स्वरूपाशी एकरूप आहे. म्हणून समीकरण (२) मध्ये जो आपण $\frac{१}{\text{न}}$ हा अपूर्ण घातप्रकाशक घेतला आणि त्याचा घातविस्तार केला तो बरोबर आहे.

२५. अपूर्ण घातप्रकाशक असतां द्विपद सिद्धांताची सिद्धता केली तशीच ऋण घात प्रकाशकाची सिद्धता करूं.

एकाच राशीचे $(\text{क्ष}+\text{अ})^{\text{न}} \times (\text{क्ष}+\text{अ})^{-\text{न}}$ याचा गुणाकार $(\text{क्ष}+\text{अ})^{\circ}$ म्हणजे १ ही संख्या आहे. आतां दोन्ही घातांचा घातविस्तार करून त्यांचा गुणाकारही जर एक आला तर घातविस्ताराचे पांच नियमहि सिद्ध आणि ऋण घातप्रकाशक असला तरी द्विपद सिद्धांत सिद्ध असें स्थापित होईल. यास्तव तो गुणाकार करूं.

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{\text{न}} = \text{क्ष}^{\text{न}} + \text{नअक्ष}^{\text{न}-१} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२}\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{\text{न}-२}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{-\text{न}} = \text{क्ष}^{-\text{न}} - \text{नअक्ष}^{-\text{न}-१} +$$

$$\frac{-\text{न}(-\text{न}-१)}{१\cdot२}\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{-\text{न}-२} + \ldots\ldots\ldots(२).$$

$$(\text{क्ष}+\text{अ})^{\circ} = \text{पहिलें पद} + \text{दुसरें पद} + \text{तिसरें पद} = \ldots\ldots\ (३).$$

समीकरण (३) मधील प्रत्येक पदाची किंमत काढू.

$$\text{पहिलें पद} = \text{क्ष}^{\text{न}} \times \text{क्ष}^{-\text{न}} = \text{क्ष}^{\text{न}-\text{न}} = \text{क्ष}^{\circ} = १.$$

$$\text{दुसरें पद} = +\,\text{नअक्ष}^{\text{न}-१} \times \text{क्ष}^{-\text{न}} - \text{नअक्ष}^{-\text{न}-१} \times \text{क्ष}^{\text{न}}$$

$$= +\,\text{नअक्ष}^{-१} - \text{नअक्ष}^{-१} = ०.$$

$$\text{तिसरें पद} = +\frac{\text{न}^२ - \text{न}}{१\cdot२}\text{अ}^२\,\text{क्ष}^{\text{न}-२} \times \text{क्ष}^{-\text{न}} - \text{न}^२\text{अ}^२\text{क्ष}^{-२}$$

$$+\frac{+\text{न}^२ + \text{न}}{१\cdot२}\text{अ}^२\,\text{क्ष}^{-\text{न}-२} \times \text{क्ष}^{\text{न}}$$

$$= +\frac{\text{न}^२ - \text{न}}{१\cdot२}\text{अ}^२\text{क्ष}^{-२} - \text{न}^२\text{अ}^२\text{क्ष}^{-२} + \frac{\text{न}^२ + \text{न}}{१\cdot२}\text{अ}^२\text{क्ष}^{-२}$$

$$= \left(\frac{\text{न}^२ - \text{न}}{१\cdot२} - \text{न}^२ + \frac{\text{न}^२ + \text{न}}{१\cdot२}\right)\text{अ}^२\text{क्ष}^{-२} = ०.$$

ह्यावरून उघड सिद्ध होतें कीं, घातप्रकाशक ऋण असला तरी द्विपद सिद्धांताचा घातविस्तार नियमपंचकानें बरोबर होतो.

२६. ऋण घातप्रकाशकानें द्विपद राशीचा घातविस्तार नियम पंचकाने बरोबर येतो त्याची आणखी एक सिद्धता खाली देतों—

$$(१+\text{क्ष})^{\text{म}} \div (१+\text{क्ष})^{\text{म}+१} = (१+\text{क्ष})^{\text{म}-\text{म}-१} = (१+\text{क्ष})^{-१}$$

$$(१+\text{क्ष})^{\text{म}} = १ + \text{मक्ष} + \frac{\text{म}(\text{म}-१)}{१\cdot२}\text{क्ष}^२ + \frac{\text{म}(\text{म}-१)(\text{म}-२)}{१\cdot२\cdot३}\text{क्ष}^३ \ldots (१)$$

$$(१+\text{क्ष})^{\text{म}+१} = १ + (\text{म}+१)\text{क्ष} + \frac{(\text{म}+१)(\text{म})}{१\cdot२}\text{क्ष}^२$$

$$+\frac{(\text{म}+१)(\text{म})(\text{म}-१)}{१\cdot२\cdot३}\text{क्ष}^३ \ldots\ldots (२)$$

(१) ह्या समीकरणास (२) ह्या समीकरणानें भागिलें. ह्या भागाकार दाखविण्याकरितां भागाकारांतील पद व बाकी ह्याप्रमाणें प्रत्येक पद लिहू आणि नंतर भागाकार लिहू.

$(\text{पहिलें पद})^2 \, (\text{भागाकार})^1 = १$

बाकी $= -\text{क्ष} - \text{म}\,\text{क्ष}^2 - (३\,\text{म}^2 - ३\,\text{म})\,\text{क्ष}^3$

भागाकार दुसरें पद $= -\text{क्ष}$

बाकी $= +\text{क्ष}^2 + \text{म}\,\text{क्ष}^3$.

भागाकार तिसरें पद $= +\text{क्ष}^2$

बाकी $= -\text{क्ष}^3$

भागाकार चवथें पद $= -\text{क्ष}^3$

भागाकार $= १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^3 +$ इत्यादि.

आता $(१+\text{क्ष})^{-१} = \dfrac{१}{(१+\text{क्ष})} = १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^3$ इत्यादि.

ह्यावरून घातप्रकाशक ऋण असतांहि द्विपद सिद्धांत सिद्ध आहे.

घातांक

२७. विवक्षित संख्येचा कोणत्या संख्येइतका घात करावा म्हणजे घात करून आलेली संख्या दिलेल्या संख्येबरोबर होईल, त्या घात दाखविणाऱ्या संख्येला त्या दिलेल्या संख्येचा घातांक म्हणतात आणि त्या विवक्षित संख्येला त्या घातांकाचा पाया म्हणतात.

जसें ३ ह्या संख्येचा कोणता घात करावा म्हणजे घात करून आलेली संख्या ८१ होईल ? याठिकाणीं ३ ह्या संख्येचा ४ घात करावा लागतो, म्हणून ४ ह्या संख्येला ८१ ह्या संख्येचा घातांक म्हणतात आणि ह्या घातांकाचा पाया ३ ही संख्या होते. ह्यावरून सामान्यत्वें प ह्या विवक्षित संख्येचा घ घात केला असतां स ही संख्या येते. येथें स ह्या संख्येचा प ह्या पायावरील घ हा घातांक आहे. याचें समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणें दाखविता येतें :—

$$\text{प}^{\text{घ}} = \text{स}$$

२८. वरच्या समीकरणांतील प आणि घ ह्या दोन संख्या दिल्या असतां स ही संख्या कशी करिता येईल याचा विचार घात कार्यात येतो. त्याबद्दल विचार ह्याच प्रकरणांत केला, जसे प $= (१ + \text{फ})$ मानिला तर

$$\text{स} = (१+\text{फ})^{\text{घ}} = १ + \text{घफ} + \frac{\text{घ}(\text{घ}-१)}{१\cdot२}\text{फ}^2$$

ह्याप्रमाणें स ची किंमत कळून येते. ह्याप्रमाणेंच स आणि घ ह्या दोन संख्या दिल्या तर प ची किंमत कशी ठरवितां येईल हाहि विचार त्या घात कार्यातच येतो. तो असा—

$$प^{घ} = स$$

घ संख्यांक मूळ काढिलें तर

$$प = \sqrt[घ]{स} = स^{\frac{1}{घ}}$$

परंतु स आणि प ह्या संख्या दिल्या असता घ ही संख्या कशी प्राप्त होईल हा विचार येथे करावयाचा आहे.

२९. वर दिलेल्या

$$प^{घ} = स$$

ह्या समीकरणांत प चा घ घात केला तर स ही संख्या येते. ह्या ठिकाणीं आपले अव्यक्त पद घ आहे आणि प स ह्या व्यक्त संख्या आहेत. तेव्हां ह्या अव्यक्त पदांचें समीकरण खालच्या पद्धतीनें लिहितात :—

घ = घातांक प पायावरील स संख्येचें.

उजव्या बाजूकडील लेखन संक्षेपें $घा_{प}$ स म्हणजे घा प स ह्या तिन्ही आद्यक्षरांनीं दाखवावयाचे असा संकेत आहे, मात्र मधले अक्षर (पाया दाखविणारें) प हे चालत्या ओळींत न लिहिता किंचित खालीं लिहितात त्याप्रमाणें घातांकांचें लेखन खालीं लिहिल्याप्रमाणे असतें :—

$$घ = घा_{प} स \text{ किंवा } घा_{प} स = घ.$$

आणि हेच समीकरण खाली दाखविल्याप्रमाणे घात प्रकाशक स्वरूपानेंही लिहितात, जसें—

$$स = प^{(घा_{प} स)}$$

३०. (१) कोणत्याही पायावरील १ ह्या संख्येचा घातांक ० असतो. कारण $घा_{प}स = घ$ ह्यांस घात स्वरूपात मांडले तर

$प^{घ} = स$

ह्यांत $स = १$ तर $घ = ०$.

(२) कोणत्याहि संख्येचा त्याच पायावरील (म्हणजे तीच संख्या पाया असतां) घातांक एक ही संख्या म्हणजे १ असतो.

कारण $घा_{प}प = १$ कारण $प^{१} = प$

किंवा $प^{घ} = प$ तर $घ = १$.

३१. एकाच संख्येच्या भिन्न पायावरील घातांकांचा अन्योन्य संबंध.

$क्ष = घा_{अ}म$ आणि $य = घा_{ब}म$ ह्या दोन्ही समीकरणांमध्यें म ह्या एकाच संख्येचे अ आणि ब ह्या भिन्न पायावरील घातांक अनुक्रमें क्ष आणि य हे आहेत. याचा एकमेकांशी कसा संबंध आहे ते पाहूं.

वरचीं समीकरणें घात प्रकाशक पद्धतीनें लिहिलीं तेव्हां

$अ^{क्ष} = म$ आणि $ब^{य} = म$

ह्यावरून $अ^{क्ष} = ब^{य}$ ....(१)

(१) ह्या समीकरणाचें प्रथम य संख्यांक मूळ काढिलें आणि नंतर क्ष संख्यांक मूळ काढिलें तर

$अ^{\frac{क्ष}{य}} = ब$; आणि $ब^{\frac{य}{क्ष}} = अ$

म्हणजे अ ह्या पायावरील ब संख्येचा घातांक $घा_{अ}ब = \frac{क्ष}{य}$.........(२).

आणि ब ह्या पायावरील अ संख्येचा घातांक $घा_{ब}अ = \frac{य}{क्ष}$..........(३).

म्हणून $क्ष = य\,(घा_{अ}ब) = \frac{य}{घा_{ब}अ}$ ....(४)

किंवा $य = क्ष\,(घा_{ब}अ) = \frac{क्ष}{घा_{अ}ब}$..............(५)

(२) व (३) यांचा गुणाकार केला तर

$$\text{घा}_{\text{अ}}\text{ब} \times \text{घा}_{\text{ब}}\text{अ} = \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} \times \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = १ \ldots\ldots\ldots\ldots (६)$$

३२. वरच्या लेखांतील सिद्धांतांच्या सहाय्याने कोणत्याहि संख्येचा एका पायावरील घातांक समजला तर त्याला गुणन किंवा भाजन संस्कार करुन तो दुसऱ्या इच्छित पायावरील करिता येतो.

जसें म ह्या संख्येचा अ ह्या पायावरील घातांक क्ष हा समजला. परंतु आपणास ब ह्या पायावरील य हा घातांक पाहिजे तर क्ष ह्या घातांकाला एका गुणकानें गुणावें लागते. तो गुणक असा की "नव्या पायावरील जुन्या पायाचा घातांक" हा होय. किंवा भाजकाने भागावे लागते. तो भाजक असा की, "जुन्या पायावरील नव्या पायाचा घातांक".

३३. (१) एकाच पायावरील दोन संख्यांच्या घातांकांची बेरीज त्याच संख्यांच्या गुणाकाराच्या घातांकाबरोबर असते. (२) एकाच पायावरील भाज्याच्या घातांकातून भाजकाचा घातांक वजा केला असता जी बाकी राहते ती भागाकाराच्या घातांकाबरोबर असते.

(१) म आणि न ह्या दोन संख्या आहेत, त्यांचे अ ह्या पायावरील घातांक अनुक्रमे क्ष आणि य हे आहेत तर म न ह्या गुणाकाराचा अ याच पायावरील घातांक क्ष + य हा असतो.

जसे $\text{घा}_{\text{अ}}\text{म} = \text{क्ष}$ आणि $\text{घा}_{\text{अ}}\text{न} = \text{य}$

तर $\text{घा}_{\text{अ}}(\text{म} \times \text{न}) = \text{क्ष} + \text{य}.$

$$= \text{घा}_{\text{अ}}\text{म} + \text{घा}_{\text{अ}}\text{न} \qquad (१)$$

लेखन घातप्रकाशक पद्धतीनें लिहिलें तर

$$\text{अ}^{\text{क्ष}} = \text{म} \text{ आणि } \text{अ}^{\text{य}} = \text{न}$$

तेव्हां $\text{मन} = \text{अ}^{\text{क्ष}} \times \text{अ}^{\text{य}} = \text{अ}^{\text{क्ष}+\text{य}}$

म्हणून $\text{घा}_{\text{अ}}(\text{म} \times \text{न}) = \text{क्ष} + \text{य} = \text{घा}_{\text{अ}}\text{म} + \text{घा}_{\text{अ}}\text{न}.$

(२) आणि $\frac{म}{न} = अ^{क्ष} \div अ^{य} = अ^{क्ष-य}$

$$म्हणून \quad घा_{अ}\left(\frac{म}{न}\right) = क्ष - य = घा_{अ}म - घा_{अ}न. \qquad (२)$$

३४. विवक्षित पायावरील, एखाद्या संख्येचा इष्ट संख्यांक घात करून आलेल्या संख्येचा घातांक हा, जो घात केला असेल तो घातप्रकाशक आणि त्या मूळ संख्येचा त्याच पायावरील घातांक ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो.

जसें $\quad घा_{अ}(म^{न}) = य$ आणि $घा_{अ}म = क्ष$

तर $\quad य = न\, क्ष$

लेखन घातप्रकाशक पद्धतीनें लिहिलें तर

$$अ^{य} = म^{न} \text{ आणि } अ^{क्ष} = म$$

$अ^{क्ष} = म$ ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेटचाचा न घात केला

$$तेव्हां \quad \left(अ^{क्ष}\right)^{न} = म^{न} = अ^{न\,क्ष}$$

$$म्हणून \quad घा_{अ}(म^{न}) = न\,क्ष = न \times घा_{अ}म$$

ह्या सिद्धांतात न च्या जागी $\frac{1}{न}$ घेतला तर वरच्या सिद्धांताचें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें होईल :—

विवक्षित पायावरील एखाद्या संख्येचें इष्ट संख्यांक मूळ काढून आलेल्या संख्येचा घातांक हा, जे मूळ काढलें असेल त्या मूलदर्शक अंकानें, त्या पूर्व संख्येच्या त्याच पायावरील घातकास भागून आलेल्या भागाकाराबरोबर असतो.

$$म्हणजे \quad \left(अ^{क्ष}\right)^{\frac{1}{न}} = म^{\frac{1}{न}} = अ^{\frac{1}{न}क्ष}$$

$$म्हणून \quad घा_{अ}(\sqrt[न]{म}) = \frac{1}{न}क्ष = \frac{1}{न}\, घा_{अ}म.$$

३५. संख्यांचे घातांक तयार करण्यास बऱ्याच सिद्धांतांची आवश्यकता आहे, यास्तव त्या सिद्धांताचे विवरण व सिद्धता खालीं देत आहे. हे सिद्धांत नुसते घातांकांच्या उपयोगी आहेत असें नाहीं. ग्रहगति सिद्धांतातील सिद्धांत सिद्ध करण्यास

त्यांची आवश्यकता आहे. त्यापैकींच घातप्रकाशक सिद्धांत हा एक आहे त्याची सिद्धता खालीं देत आहे. पण ती सिद्धता देण्यापूर्वी एक सहाय्यभूत असा सोपा सिद्धांत येथें देतो. तो असा––

गुणकसाम्यपदमाला––एकाच अव्यक्त पदाच्या दोन पदमाला आहेत. अव्यक्त पदाची किंमत कोणतीही असली तरी ह्या पदमाला समान असतील तर त्या अव्यक्ताच्या कोणत्याही एकाच घाताने दर्शित दोन्ही पदमालेतील पदाचे गुणक समान असतात. जसें

य = अ + क क्ष + च क्ष^{२} + ट क्ष^{३} + त क्ष^{४} ··········(१)

आणि य = अ′ + क′ क्ष + च′ क्ष^{२} + ट′ क्ष^{३} + त′ क्ष^{४} ·········(२)

अशा दोन पदमाला आहेत. यांतील क्ष ची कोणतीही किंमत असली तरी वरच्या सर्व पदांची किंमत जी य संख्या ती खालच्या सर्व पदांच्या किंमतीबरोबर असेल तर क्ष च्या ० घाताचे गुणक समान असतील म्हणजे अ = अ′, क्ष चे गुणक समान म्हणजे क = क′ इत्यादि.

समीकरण (१) मधून समीकरण (२) वजा केले तेव्हा

० = (अ – अ′) + (क – क′) क्ष + (च – च′) क्ष^{२} + (ट – ट′) क्ष^{३} + ... (३)

ह्यामध्यें क्ष = ० असेल तर

अ – अ′ = ० म्हणून अ = अ′.

आता समीकरण (३) चें स्वरूप.

० = (क – क′) क्ष + (च – च′) क्ष^{२} + (ट – ट′) क्ष^{३} ······(४)

होहि समीकरणें क्ष च्या कोणत्याहि किंमतीविषयीं खरे आहे. म्हणून समीकरण (४) हे क्ष ने भागितले तर

० = (क – क′) + (च – च′) क्ष + (ट – ट′) क्ष^{२}

ह्यामध्यें क्ष = ० असला तर

क – क′ = ० म्हणून क = क′

ह्याप्रमाणे प्रत्येक पदाचे गुणक समान असतात.

घातप्रकाशक सिद्धांत

३६. अ ही कोणती तरी संख्या आहे. तिचा क्ष ह्या कोणत्या तरी संख्ये-इतका घात करावयाचा आहे. तो $अ^{क्ष}$ असा आपण म्हणू. येथे आम्हास $अ^{क्ष}$ ह्याची किंमत अ संख्या आणि क्ष संख्या यांच्याच पदावलीने समजावी अशी इच्छा आहे. याकरिता असे करूं कीं अ ही एक पदात्मक संख्या आहे, ती $\left\{ १ + (अ - १) \right\}$ ह्या स्वरूपाची द्विपदात्मक घेऊ आणि द्विपद सिद्धांताप्रमाणे घातविस्तार करू. तेव्हा

$$अ^{क्ष} = \left\{ १ + (अ - १) \right\}^{क्ष}$$

ह्यात लेखन सौकर्याकरिता $(अ - १) = ब$ घेऊं

$$\text{तेव्हां} \quad अ^{क्ष} = (१ + ब)^{क्ष}$$

$$(१ + ब)^{क्ष} = १ + क्षब + \frac{क्ष\,(क्ष - १)}{१ \cdot २} ब^{२} + \frac{क्ष\,(क्ष - १)\,(क्ष - २)}{१ \cdot २ \cdot ३} ब^{३}$$
$$+ \frac{क्ष\,(क्ष - १)\,(क्ष - २)\,(क्ष - ३)}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४} ब^{४}$$
$$+ \frac{क्ष\,(क्ष - १)\,(क्ष - २)\,(क्ष - ३)\,(क्ष - ४)}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} ब^{५}.$$

हा घातविस्तार ब ह्या संख्येच्या चढत्या घातावळीचा आहे, तो आम्हास क्ष च्या चढत्या घातावळीचा पाहिजे आहे यास्तव ब च्या पदाला क्ष च्या अवयव रूपाने गुणक आहेत ते पद रूपाने केले—

$$(१ + ब)^{क्ष} = १ + क्षब + \frac{क्ष^{२} - क्ष}{१ \cdot २} ब^{२} + \frac{क्ष^{३} - ३\,क्ष^{२} + २\,क्ष}{१ \cdot २ \cdot ३} ब^{३}$$
$$+ \frac{क्ष^{४} - ६\,क्ष^{३} + ११\,क्ष^{२} - ६\,क्ष}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४} ब^{४} + \quad \text{इत्यादि.}$$

तेव्हां

$$अ^{क्ष} = १ + क्ष\left(ब - \tfrac{१}{२} ब^{२} + \tfrac{१}{३} ब^{३} - \tfrac{१}{४} ब^{४} + \tfrac{१}{५} ब^{५} - \cdots\cdots\right)$$
$$+ क्ष^{२}\left(\tfrac{१}{२} ब^{२} - \tfrac{१}{२} ब^{३} + \tfrac{११}{२४} ब^{४} - \tfrac{५}{१२} ब^{५} + \cdots\cdots\cdots\right)$$
$$+ क्ष^{३}\left(\tfrac{१}{६} ब^{३} - \tfrac{१}{४} ब^{४} + \tfrac{३५}{१२०} ब^{५} - \cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

हृचा सारणींत क्ष ची किंमत कोणतीही असली तरी क्ष च्या १, २, ३ इत्यादि घाताचे गुणक वरचेच येतील. त्या गुणकांची किंमत ब वर अवलंबून राहील. हे गुणक आपण $क_{१}$ $क_{२}$ $क_{३}$ हृचा अक्षरांनी दाखवू तेव्हा सारणीचे स्वरूप.

$$अ^{क्ष} = १ + क_{१}\,क्ष + क_{२}\,क्ष^{२} + क_{३}\,क्ष^{३} + क_{४}\,क्ष^{४} + \cdots\cdots\cdots$$

$क_{१}$ $क_{२}$ $क_{३}$ हृचा गुणकांचा एकमेकांशी संबंध आहे.

$$क_{१} = ब\left(१ - \frac{१}{२}ब + \frac{१}{३}ब^{२} - \frac{१}{४}ब^{३} + \frac{१}{५}ब^{४} - \right)$$

हृचा बरोबरीचा वर्ग करून २ नी भागिले तर

$$\frac{क_{१}^{२}}{२} = ब^{२}\left(१ - ब + \frac{११}{१२}ब^{२} - \frac{५}{६}ब^{३} + \cdots\cdots\right) \times \frac{१}{२}$$

$$= \left(\frac{१}{२}ब^{२} - \frac{१}{२}ब^{३} + \frac{११}{४}ब^{४} - \frac{५}{१२}ब^{५} + \cdots\cdots\right)$$

पण हा गुणाकार करून आलेली श्रेणी $क_{२}$ म्हणजे $क्ष^{२}$ ला जो गुणक आहे त्याबरोबर आहे म्हणजे

$$\frac{क_{१}^{२}}{२} = क_{२}.$$

हृचाप्रमाणे $क_{१} \times क_{२}$ यांचा गुणाकार करून ३ नी भागिले तर $क_{३}$ ची किंमत येते, $क_{१} \times क_{३}$ हृचास ४ नी भागिले तर $क_{४}$ ची किंमत येते.

म्हणजे $\frac{१}{२}क_{१} \times क_{१} = क_{२} = \frac{१}{२}क_{१}^{२}$

$$\frac{१}{३}क_{१} \times क_{२} = क_{३} = \frac{१}{३}क_{१} \times \frac{१}{२}क_{१}^{२} = \frac{१}{२\cdot३}\,क^{३}$$

$$\frac{१}{४}क_{१} \times क_{३} = क_{४} = \frac{१}{४}क_{१} \times \frac{१}{२\cdot३} \times क^{३} = \frac{१}{२\cdot३\cdot४}\,क_{१}.$$

क्रमिक संख्यांचा गुणाकार दाखविण्याची एक सांकेतिक रीति आहे. ती अशी कीं, क्रमिक संख्यापैकीं शेवटच्या संख्येपूर्वी $\lfloor$ असे चिन्ह करून त्या चिन्हांत तो शेवटचा अंक लिहितात, जसे

$१\cdot२ = \lfloor२$; $१\cdot२\cdot३ = \lfloor३$;

$१\cdot२\cdot३\cdot४ = \lfloor४$; $१\cdot२\cdot३\cdot४\cdot५ = \lfloor५$ · इत्यादि.

हृचाप्रमाणे

$$अ^{क्ष} = १ + क_१ क्ष + \frac{क_१^२}{\lfloor २} क्ष^२ + \frac{क_१^३}{\lfloor ३} क्ष^३ + \frac{क_१^४}{\lfloor ४} क्ष^४ + \cdots\cdots$$

हें समीकरण क्ष च्या कोणत्याहि किंमतीविषयीं खरे आहे. ह्या समीकरणास घातप्रकाशक सिद्धांत म्हणतात.

ह्या समीकरणात क्ष ची किंमत $\frac{१}{क_१}$ ही घेतली तर

$$अ^{\frac{१}{क_१}} = १ + १ + \frac{१}{\lfloor २} + \frac{१}{\lfloor ३} + \frac{१}{\lfloor ४} + \cdots\cdots\cdots$$

ही सारणी आपण e ह्या अक्षराने दाखवू म्हणजे

$$अ^{\frac{१}{क}} = e = १ + १ + \frac{१}{\lfloor २} + \frac{१}{\lfloor ३} + \frac{१}{\lfloor ४} + \cdots\cdots\cdots$$

३७. वर जी e संख्येची श्रेणी सिद्ध केली ती अन्य प्रकारानेही सिद्ध करितां येतें. तो प्रकार असा ; $\left(१ + \frac{१}{न}\right)^{न क्ष}$ ह्याचा द्विपद सिद्धांताप्रमाणें घात विस्तार केला.

$$\begin{aligned}\left(१ + \frac{१}{न}\right)^{न क्ष} &= १ + न क्ष \frac{१}{न} + \frac{न क्ष\,(न क्ष - १)}{१ \cdot २} \frac{१}{न^२} \\ &\quad + \frac{न क्ष (न क्ष - १)(न क्ष - २)}{१ \cdot २ \cdot ३} \frac{१}{न^३} + \cdots \\ &= १ + क्ष + \frac{१}{\lfloor २} क्ष^२ \left(१ - \frac{१}{न क्ष}\right) \\ &\quad + \frac{१}{\lfloor ३} क्ष^३ \left(१ - \frac{१}{न क्ष}\right)\left(१ - \frac{२}{न क्ष}\right) \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

ह्या घात विस्तारातील न ही संख्या अमर्याद मोठी मानिली

तेव्हां $\frac{१}{न} = ०$ म्हणून

$$\left(१ + \frac{१}{न}\right)^{न क्ष} = १ + क्ष + \frac{क्ष^२}{\lfloor २} + \frac{क्ष^३}{\lfloor ३} + \cdots\cdots\cdots$$

ह्या श्रेणीतील क्ष ही संख्या १ मानिली तर.

$$\left(१+\frac{१}{न}\right)^{न} = १ + १ + \frac{१}{\lfloor २} + \frac{१}{\lfloor ३} + \cdots\cdots\cdots$$

३८. वर सिद्ध केलेली जी ही e संख्या स्थीर आहे हिची किंमत ९ दशांश स्थलापर्यंत २·७१८२८१८२८ ही आहे. ह्या संख्येमध्ये असा धर्म आहे की हिचा जो घात करावयाचा असेल तो घातविस्तार घातप्रकाशकाच्या श्रेणीत तयार होतो जसें

$$e^{क्ष} = \left\{\left(१+\frac{१}{न}\right)^{न}\right\}^{क्ष} = \left(१+\frac{१}{न}\right)^{न\,क्ष}$$

$$= १ + क्ष + \frac{क्ष^{२}}{\lfloor २} + \frac{क्ष^{३}}{\lfloor ३} + \cdots\cdots\cdots$$

संख्यांचे घातांक तयार करून जी कोष्टकें बनलेली आहेत ती तयार करण्याचे साधन ही e संख्या आहे. घातांक तयार करण्याकरिता जी समीकरणें सिद्ध केली आहेत ती खालच्या लेखांत दाखविली आहेत.

३९. लेख ३, ६ मध्ये दाखविलें आहे कीं

$$अ^{क_{१}} = e \quad \text{यावरून}$$

$$अ = e^{क_{१}}$$

म्हणून $\quad घा_{e}\,अ = क_{१}$

$$अ^{क्ष} = e^{क_{१}क्ष} = १ + क_{१}क्ष + \frac{क_{१}^{२}}{\lfloor २}\,क्ष^{२} + \frac{क_{१}^{३}}{\lfloor ३}\,क्ष^{३}$$

$$अ^{क्ष} = १ + (घा_{e}अ)\,क्ष + \frac{१}{\lfloor २}\,(घा_{e}अ)^{२}\,क्ष^{२} + \frac{१}{\lfloor ३}\,(घा_{e}अ)^{३}\,क्ष^{३} + \cdots\cdots\cdots$$

तसेच $\quad क_{१} = ब - \frac{१}{२}ब^{२} + \frac{१}{३}ब^{३} - \frac{१}{४}ब^{४} + ५\,ब^{५}$

आणि $\quad अ = १ + ब$

म्हणून $\quad घा_{e}अ = घा_{e}(१+ब) = क_{१}$

तेव्हा $\quad घा_{e}(१+ब) = ब - \frac{१}{२}ब^{२} + \frac{१}{३}ब^{३} - \frac{१}{४}ब^{४} + \frac{१}{५}ब^{५} +$ इत्यादि.

ब च्या ठिकाणी — ब लिहिला तर

$घा_{e}\,(१-ब) = -ब - \frac{१}{३}ब^{२} - \frac{१}{२}ब^{३} - \frac{१}{४}ब^{४} - \frac{१}{५}ब^{५} -$ इत्यादि.

४०. वरच्या लेखांत घातांकाची जीं दोन समीकरणें सिद्ध केली त्यांच्याच सहाय्यानें घातांकाची उत्पत्ति होऊन ते व्यवहारांत आलें आहे. आणि वरच्या विवरणांत कळून आलें आहे कीं, ह्या घातांकाच्या समीकरणास आधार घातप्रकाशक सिद्धांताचा आहे. वरची घातांकांची दोन समीकरणें येथे पुनः लिहून त्यांच्या सहाय्यानें दुसरी अनेक समीकरणें सिद्ध होतात ती दाखवित आहे. ह्या समीकरणांचा उपयोग कृति सुलभ व्हावी ह्याकडे होतो. ही सर्व समीकरणें खालीं दिल्याप्रमाणे :—

४१. $घा_e\,(१+ब) = ब - \frac{१}{२}ब^२ + \frac{१}{३}ब^३ - \frac{१}{४}ब^४ + \frac{१}{५}ब^५ + \cdots\cdots (१)$

$घा_e\,(१-ब) = -ब - \frac{१}{२}ब^२ - \frac{१}{३}ब^३ - \frac{१}{४}ब^४ - \frac{१}{५}ब^५ - \cdots\cdots (२)$

$घा_e\left(\frac{१+ब}{१-ब}\right) = घा_e\,(१+ब) - घा_e\,(१-ब)$ लेख समीकरण (२)

समी. (१) मधून समी. (२) वजा केलें तर

$$घा_e\,(१+ब) - घा_e\,(१-ब) = २\left(ब + \frac{१}{३}ब^३ + \frac{१}{५}ब^५ + \cdots\right)\cdots(३)$$

ह्या समीकरणांत $ब = \frac{म-न}{म+न}$ ही किंमत घेऊन समीकरणांत लिहीली,

$$\frac{१+ब}{१-ब} = \left(१ + \frac{म-न}{म+न}\right) \div \left(१ - \frac{म-न}{म+न}\right)$$

$$= \frac{२म}{म+न} \times \frac{म+न}{२न} = \frac{म}{न}$$

$$घा_e\left(\frac{१+ब}{१-ब}\right) = घा_e\,(१+ब) - घा_e\,(१-ब) = घा_e\frac{म}{न}$$

म्हणून $घा_e\frac{म}{न} = २\left\{\frac{म-न}{म+न} + \frac{१}{३}\left(\frac{म-न}{म+न}\right)^३ + \frac{१}{५}\left(\frac{म-न}{म+न}\right)^५ + \cdots\right\}\cdots(४)$

न = १ मानिला तर

$$घा_e\,म = २\left\{\frac{म-१}{म+१} + \frac{१}{३}\left(\frac{म-१}{म+१}\right)^३ + \frac{१}{५}\left(\frac{म-१}{म+१}\right)^५ + \cdots\right\}\cdots(५)$$

समीकरण (४) मध्ये म = न + १ मानिला तर $\frac{म-न}{म+न} = \frac{१}{२न+१}$

$$घा_e\left(\frac{न+१}{न}\right) = घा_e\,(न+१) - घा_e\,न$$

$$= २\left\{\frac{१}{२न+१} + \frac{१}{३}\left(\frac{१}{२न+१}\right)^३ + \frac{१}{५}\left(\frac{१}{२न+१}\right)^५ + \cdots (६)\right.$$

घातांक कोष्टक रचना

४२. घातांकासंबंधीं सिद्ध झालेले सिद्धांत वरच्या लेखांत दिले आहेत. ह्या सिद्धांतांच्या सहाय्यानें घातांक कोष्टक कसें तयार केलें याची माहिती देणें आवश्यक आहे. ती सर्व माहिती येथें देण्याचें प्रयोजन नाहीं कारण तो स्वतंत्र विषय असून त्यावर सविस्तर विवरणाचा ग्रंथ पाहिजे. त्या ग्रंथाची रूपरेषा कशी असावी हेच येथें दाखवित आहे.

४३. लेख ४१ मधील समीकरण ६ च्या सहाय्यानें १, २, ३ इत्यादि क्रमिक संख्यांचे e ह्या पायावरील घातांक शोधिता येतात.

जसें न = १ मानिला तर

$$\text{घा}_e\ २ - \text{घा}_e\ १ = २\left\{\frac{१}{३} + \frac{१}{३\ (३)^{३}} + \frac{१}{५\ (३)^{५}} + \cdots\cdots\right.$$

$$= \cdot ६९३१४७१७९.$$

$$\text{आणि घा}_e\ १ = ०.$$

$$\text{म्हणून घा}_e\ २ = .६९३१४७१७९.$$

समीकरण (६) मध्यें न = २ मानिले तर

$$\text{घा}_e\ ३ - \text{घा}_e\ २ = २\left\{\frac{१}{५} + \frac{१}{३} \times \frac{१}{(५)^{३}} + \frac{१}{५} \times \frac{१}{(५)^{५}} + \cdots\right.$$

$$= .४०५४६५११९.$$

$$+\ \text{घा}_e\ २ = .६९३१४७१७९.$$

$$\text{घा}_e\ ३ = १.०९८६१२२९८.$$

$$२\ \text{घा}_e\ ३ = \text{घा}_e\ ९ = २.१९७२२४५९६.$$

समीकरण (६) मध्यें न = ९ मानिलें तर

$$\text{घा}_e\ १० - \text{घा}_e\ ९ = २\left\{\frac{१}{१९} + \frac{१}{३}\left(\frac{१}{१९}\right)^{३} + \frac{१}{५}\left(\frac{१}{१९}\right)^{५} + \cdots\cdots\right.$$

$$= .१०५३६०५१५.$$

$$+\ \text{घा}_e\ ९ = २.१९७२२४५९६.$$

$$\text{घा}_e\ १० = २.३०२५८५१११.$$

४४. व्यवहारांत आपण ज्या संख्या वापरितो त्या दशगुणोत्तर पद्धतीच्या आहेत. याकरितां आपणास व्यवहारांत ज्या घातांकांचा उपयोग करावयाचा ते घातांक १० ह्या पायावरीलच पाहिजे आहेत. ह्याकरितां वर जे घातांक तयार केले त्याप्रमाणें प्रत्येक आवश्यक संख्येचा घातांक e ह्या पायांवरच तयार करून ते १० ह्या पायावरचे बनवावे लागतात. ते बनविण्याची कृति लेख ३१/३२ वरून ठरली आहे. ३ ह्या संख्येचा e ह्या पायावरील घातांक तयार केला पण आपणास पाहिजे १० ह्या पायावरील. याकरितां त्यांस e ह्या पायावरील १० ह्या संख्येचा घातांक तयार करून त्यानें भागिलें पाहिजे. हा भाजक खाली दिल्याप्रमाणे आहे. हा भाजक म्हणजे e ह्या पायावरील १० चा घातांक २.३०२५८५१११ हा होय. किंवा

$$\frac{१}{२\cdot३०२५८५१११} = \cdot४३४२९४४८१.$$

ह्यावरून स्पष्ट आहे कीं e ह्या पायावरील इष्ट संख्येचा घातांक काढून त्यास ·४३४२९४४८१ नें गुणावें म्हणजे तो घातांक १० ह्या पायावरील होतो. ह्याप्रमाणें संख्यांचें घातांक तयार करून त्यांचे कोष्टक तयार केलेलें असतें.

प्रकरण चवथें

गणितशास्त्रांतील मुख्य सिद्धांत

सरलरेषा त्रिकोणमिति

४५. त्रिकोणमिति हा शुद्धगणिताचा एक भाग आहे. त्रिकोणमितीचा विषय हा अत्यंत महत्त्वाचा आहे. गणितशास्त्र महासागरांतील ही नौका आहे आणि ज्योतिर्गणिताचा हा प्राण आहे. त्रिकोणमितीत त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन ह्यांच्यामध्ये असलेल्या संबंधाचा, तसेच सामान्यतः सरलरेषा कोनांचे मापनाचा विचार केलेला असतो. त्रिकोणमितीचे तीन भाग होतात, पहिल्या भागात सरल रेषात्रिकोणाचा विचार केलेला असतो. दुसऱ्या भागात गोलाच्या पृष्ठावरील त्रिकोणाचा विचार केलेला असतो आणि तिसऱ्या भागात ज्या आणि चाप यांच्या अन्योन्य संबंधाचा विचार असतो. ह्यापैकी तिसऱ्या भागातील विषयाचा समावेश मुख्यत्वे पहिल्याच भागात केला जातो.

४६. कोन आणि त्याच्या बाजू यांचा एकत्रित विचार करण्यास त्रिकोण हीच आकृति योग्य आहे. त्यांतून काटकोन त्रिकोणच उपयोगी आहे. कारण काट-कोन त्रिकोणाच्या बाजूंचा एकमेकीशीं असलेला संबंध भूमितीमध्ये सिद्ध झाला आहे. काटकोन त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असल्यामुळें इतर दोन कोनांची बेरीज एक काटकोन असते. काटकोना समोरील बाजू एक रेषापरिमाण म्हटले तर इतर दोन बाजूच्या लांब्या त्याच रेषा परिमाणानें ठरतात, त्या ज्या संख्या येतात त्या दोहींपैकीं एकीला भुजज्या व दुसरीला कोभुजज्या असे म्हणतात.

४७. त्रिकोणमिति हा विषय महत्त्वाचा असून फार मोठा आहे. यास्तव ह्या ग्रंथांत तो विषय तितका विस्तृत असा आणता येत नाहीं. त्यांतील सिद्धांत संक्षेपेकरून येथे दाखविलें आहेत. व्यवहारांत कोन हा अंश कला विकला यांनीं दाखविला मापिला जातो. परंतु शास्त्रीय विचारांत तो सरळ आणि वक्र रेषेनेहि मापण्याची पद्धति आहे. कित्येक प्रसंगीं एकादा कोन मोजावयाचा असतों तो कोन एखाद्या त्रिकोणाचा होईल असा त्रिकोण घेऊन त्या कोनाचें मापन, त्या त्रिकोणाच्या बाजू मोजून ठरवावें लागते. तसेंच एखादा कोन वर्तुळ मध्याशी होईल असें वर्तुळ काढून त्या वर्तुळाची त्रिज्या आणि त्या कोना समोरील वर्तुळाचा कंस यांच्या लांब्या विवक्षित रेषा परिमाणानें मोजून त्यांचें जें गुणोत्तर होईल त्यानें तो कोन मापितात.

४८. एकाच वर्तुळातील मध्यकोण ज्या कंसावर असतात त्या कंसांच्या लांबीशी ते प्रमाणांत असतात, असा भूमितीचा सिद्धांत आहे. ह्या सिद्धांताच्या आधारानें

वर्तुळ परीघाच्या भागानें कोन मापिता येतो. सर्व परीघ ह्याच्यावर म्हणजे मध्यबिंदूशीं ४ काटकोनांचा किंवा ३६० अंशांचा कोन असतो. $\frac{१}{२}$ परीघावर १८० अंशांचा आणि $\frac{१}{४}$ परिघावर ९० अंशांचा कोन असतो. यावरून कंसाने कोन मापिता येतो. कंसानें कोन मापण्यासंबंधी एक नवीन माप स्वीकारले आहे त्याला 'वृत्तपरिमाण' हें नांव ठेविले आहे. ज्या कंसाची लांबी त्रिज्येइतकी आहे त्या कंसावरचा मध्यकोन १ माप आहे असें म्हणतात. वर्तुळाचा परीघ त्रिज्येच्या २π इतक्या पटीबरोबर असतो. म्हणून तो कोन वृत्तपरिमाणानें २π इतकीं मापें असतो. वर्तूळाचा परीघ व्यासाच्या π इतक्या पटीबरोबर म्हणजे ३·१४१५९२६५ ह्या संख्येइतक्या पटीबरोबर असतो आणि त्रिज्येच्या २ $\times$ π = ६·२८३१८५३० म्हणजे ३६० अंशांचा कोन ६·२८३१८५३० इतकी मापें असतो. तेव्हां वृत्तपरिमाण हें माप $\frac{३६०}{६\cdot२८३१८५३०}$

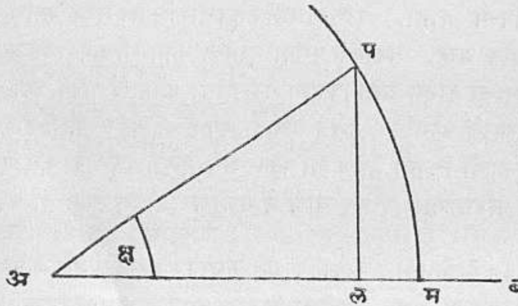
= ५७·२९५७७९५ अंशांचे आहे,

तसेच १ वृत्तपरिमाण = ३४३७·७४६७७०८ कलांचे आहे,

= २०६२६४·८०६२४७१ विकलांचे आहे.

कोनाची भुजज्यादि गुणोत्तरें

४९. कोन केवढाही असो त्याचें मापन प्रत्यक्ष असें बहुधा करितां येत नाहीं. यंत्रांमध्ये कोणमापक असतात, पण सर्वत्र कोनांचें मापन रेषेनेच करावे लागते, यास्तव तो कोन काटकोन त्रिकोणांत घेऊन त्याचा भुज, किंवा कोटि मोजून त्या कोनाचें मापन करितात. भुज आणि कोटि तसेच कर्ण यांची लक्षणें सर्वश्रुत आहेत. तीच खालीं दिलेल्या आकृतीत घेतली आहेत.



ह्या आकृतीत ब अ प हा एक कोन आहे आणि तो क्ष अक्षराने दाखविला आहे. क्ष कोनाच्या अ प बाजूतील प बिंदू पासून अ ब वर प ल लंब केला आहे. म्हणून अ ल प हा काटकोन त्रिकोण झाला आहे. ह्या काटकोन त्रिकोणाचा अ प हा कर्ण आहे, प ल हा भुज आहे, आणि अ ल हा कोटि आहे. अ प, प ल आणि अ ल ह्या तिन्ही रेषा एकाच रेषा परिमाणाने मोजल्या आहेत. तेव्हा ब अ प कोनाची गुणोत्तरें खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतील :—

ब अ प हा कोन ३० अंशाचा आहे आणि अ प ल कोन ६० अंशाचा आहे. अर्थात् अ प ल त्रिकोण समभुज त्रिकोणाचे अर्ध आहे आणि त्यामुळें प ल बाजू ही अ प च्या $\frac{१}{२}$ आहे, आणि अ ल बाजू ही अ प च्या $\sqrt{\frac{३}{४}}$ किंवा $\frac{\sqrt{३}}{२}$ आहे. कारण $(\text{अ प})^२ = (\text{प ल})^२ + (\text{अ ल})^२$ ह्यावरून ३० अंशाच्या क्ष कोनाची गुणोत्तरें कशीं होतात पहा.

$\frac{\text{प ल}}{\text{अ प}} = \frac{\text{भुज}}{\text{कर्ण}}$ ह्याला क्ष कोनाची भुजज्या म्हणतात. ती $\frac{१}{२}$ आहे.

$\frac{\text{अ ल}}{\text{अ प}} = \frac{\text{कोटि}}{\text{कर्ण}}$ ह्याला क्ष कोनाची कोभुजज्या म्हणतात. ती $\frac{\sqrt{३}}{२}$ आहे.

$\frac{\text{प ल}}{\text{अ ल}} = \frac{\text{भुज}}{\text{कोटि}}$ ह्याला क्ष कोनाची स्पर्शरेषा म्हणतात. ती $\frac{१}{\sqrt{३}}$ आहे.

$\frac{\text{अ ल}}{\text{प ल}} = \frac{\text{कोटि}}{\text{भुज}}$ ह्याला क्ष कोनाची कोस्पर्शरेषा म्हणतात. ती $\sqrt{३}$ आहे.

$\frac{\text{अ प}}{\text{अ ल}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोटि}}$ ह्याला क्ष कोनाची छेदनरेषा म्हणतात. ती $\frac{२}{\sqrt{३}}$ आहे.

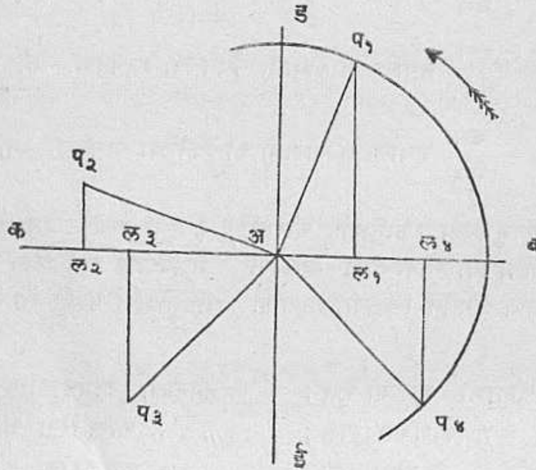
$\frac{\text{अ प}}{\text{प ल}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{भुज}}$ ह्याला क्ष कोनाची कोछेदनरेषा म्हणतात. ती २ आहे.

आणि कोभुजज्या (कोणत्याहि कोनाची) १ ह्या संख्येतून वजा केली तर राहणाऱ्या बाकीला त्या कोनाचा शर म्हणतात. भुजज्यादि नांवें लेखन सौकर्याकरितां नेहमी संक्षिप्त रीतीनें लिहावी लागतात. ती संक्षिप्त पद्धति खालीं दाखविलीं आहे :—

क्ष कोनाची भुजज्या भुक्ष ;	क्ष कोनाची कोभुजज्या कोभुक्ष ;
,, ,, स्पर्शरेषा स्पक्ष ;	,, ,, कोस्पर्शरेषा कोस्पक्ष ;
,, ,, छेदनरेषा छेक्ष ;	,, ,, कोछेदनरेषा कोछेक्ष.

५०. वरच्या लेखांत दाखविलेला क्ष कोन काटकोन त्रिकोणाचा, काटकोना-खेरीज असलेला, अर्थात् ९० अंशापेक्षां कमी असा आहे. हा कोन घेऊन भुजज्यादि गुणोत्तरांच्या व्याख्या दाखविल्या आहेत. त्यावरून ९० अंशापेक्षां जास्त अंशाच्या कोनाच्या भुजज्यादि व्याख्या लक्षात येत नाहींत. याकरिता त्या लक्षणामध्यें कांहीं भेद ठेविला आहे त्याचें स्पष्टीकरण केलें पाहिजे. तसेच कोन निरनिराळे असून भुजज्यादि गुणोत्तरें सारखी दिसतात. ह्याचेंहि स्पष्टीकरण दिलें पाहिजे. ह्या गोष्टीचा खुलासा खालच्या लेखांत केला आहे.

५१. क ब ही एक अमर्याद स्थीर रेषा आहे आणि तिच्यामध्यें अ हा एक स्थीर बिंदु आहे. दुसरी रेषा चल आहे तिचें एक टोंक अ बिंदुशीं स्थीर आहे. ह्या चल रेषेचें दुसरें टोंक, प बिंदु आहे. जेव्हां अप चल रेषा अ ब शी मिळून जाते म्हणजे दोहींची दिशा अ ब ही एकच होते तेव्हां अ ब, अ प यांच्या मध्यें कोन ० अंशाचा होतो. अ प रेषा अ ब च्या वरच्या अंगास फिरेल तर होणारा कोन धन (+) समजावा, आणि खालच्या अंगाला फिरेल तर होणारा कोन ऋण (—) समजावा असा संकेत आहे. तसेच अ ब रेषा किंवा अमर्याद सर्व ब क रेषा ह्चियावर प बिंदुपासून टाकलेला प ल लंब कब च्या वरच्या अंगास असेल तरतो लंब किंवा भुज धन समजावा, आणि प ल लंब किंवा भुज क ब च्या खालच्या अंगास असला तर तो ऋण समजावा असा संकेत आहे. तसेंच अ ल कोटि अ पासून ब कडे (उजव्या हाताकडे) असेल तर तो धन आणि अ पासून क कडे (डाव्या हाताकडे) असेल तर तो ऋण समजावा असाही संकेत आहे.



५२. भुज कोटि हे शब्द काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूंना लावण्याची पद्धति आहे. परंतु त्यांची अर्थमर्यादा वाढवून खालीं लिहिल्याप्रमाणें त्या शब्दांचे अर्थ मानिले आहेत. भ्रमण करणाऱ्या अ प रेषेच्या प टोकापासून क ब वर टाकलेल्या प ल लंबास भुज, आणि तो लंब क ब ला ज्या बिंदुत मिळेल त्या बिंदुचे अ पासून जे अ ल अंतर त्याला कोटि म्हणतात. ह्या खुलाशावरून लक्षांत येईल कीं, लेख ४९ मध्यें दिलेल्या व्याख्या कोणत्याहि कोनास लागू आहेत. ३६० अंशाचे म्हणजे एका भगणाचे चार समान भाग करून त्या प्रत्येक भागास 'पाद' ही संज्ञा दिलेली आहे. विवक्षित कोन अमक्या पादीं आहे असें म्हणण्याची पद्धति आहे. ब अ $प_१$ कोन ९० अंशापर्यंत असेल तर तो कोन पहिले पादीं आहे असें म्हणतात. कोन ९० अंशापेक्षां जास्त आणि १८० अंशापर्यंत असेल तर तो कोन दुसरें पादीं आहे असें म्हणतात. ह्या प्रमाणेच १८० अंशापासून २७० अंशापर्यंत असलेल्या कोनास तृतीय पादीं आणि २७० ते ३६० अंशापर्यंत असलेल्या कोनास चतुर्थ पादीं असलेला कोन असें म्हणतात. प्रथम पादीं कोन असता भुज $प_१$, $ल_१$ धन आहे आणि कोटि $अल_१$ हाही धनच आहे म्हणून ह्या पादांतील भुजज्यादि सहाही गुणोत्तरें धन आहेत. विशेष लक्षांत ठेवण्याची गोष्ट अशी कीं, अ प ही चल रेषा कोणत्याहि पादांत असो ती धनच समजावी. दुसऱ्या पादांत ब अ $प_२$ हा कोन आहे ह्या कोनाचा भुज $प_२ल_२$ हा आहे. हा भुज धनच आहे परंतु अ $ल_२$ हा कोटि ऋण आहे. यामुळे दुसऱ्या पादीं कोन असता भुजज्या आणि कोछेदनरेषा ही दोन गुणोत्तरें धन असतात आणि राहिलेली चार गुणोत्तरें ऋण असतात. तिसरें पादीं असलेल्या व चवथ्या पादीं असलेल्या कोनास बहिर्वक्रकोन म्हटले आहे. तिसऱ्या पादीं ब अ $प_३$ हा कोन आहे. ह्या कोनाचा भुज $प_३$ $ल_३$ हा ऋण आहे आणि अ $ल_३$ हा कोटिही ऋणच आहे म्हणून ह्या तिसरें पादीं असणाऱ्या कोनाची स्पर्शरेषा आणि कोस्पर्शरेषा ही दोन गुणोत्तरें धन असतात आणि बाकीची ऋण असतात. चवथें पादीं ब अ $प_४$ हा कोन आहे ह्याचा भुज $प_४ल_४$ हा ऋण आहे, परंतु कोटि अ $ल_४$ हा धन आहे म्हणून कोभुजज्यादि आणि छेदनरेषा ही दोन गुणोत्तरें धन असून बाकी ऋण असतात.

५३. कोन धन असता त्याची भुजज्यादि गुणोत्तरें प्रत्येक पादांत कशी धनर्ण असतात ह्याचें स्पष्टीकरण वरच्या लेखांत केलें आहे. तसेच कोन कोणत्याही पादीं असता त्या कोनाचे भुज कोटि कोणते, आणि ते कोणत्या पादीं धन आणि कोणत्या पादीं ऋण असतात याचेंही स्पष्टीकरण केलें. आता कोन ऋण असला तर त्याची गुणोत्तरें कशी असतात याचा खुलासा करावयाचा आहे. हा खुलासा, तो ऋण कोन प्रत्येक पादांत असता त्याचे भुज कोटि धनर्ण जसे असतील त्याप्रमाणे भुजज्यादि धनर्ण होतील. ह्या पद्धतीनें ऋण कोनांचीं गुणोत्तरें कशी धनर्ण असतात हे सहज समजून येईल. जसे ऋण ६० अंशांचा कोन हा चवथ्या पादीं

असणार त्याचा भुज ऋण कोटि धन असतो त्याप्रमाणे गुणोत्तर धनर्ण असणार. अ ही कोनाची अंश संख्या आहे, आणि ती ० अंशापासून ३६० अंशापर्यंत कोणती तरी आहे. पण ही ऋण संख्या आहे. तेव्हां अधिक धन अ अंशाच्या गुणोत्तराने ऋण अ कोनाची गुणोत्तरें खालीं दाखविली आहेत :—

भु (—अ) = — भुअ, कोस्प (—अ) = — कोस्पअ,

कोभु (—अ) = + कोभुअ, छे (—अ) = + छेअ,

स्प (—अ) = — स्पअ. कोछे (—अ) = — कोछेअ.

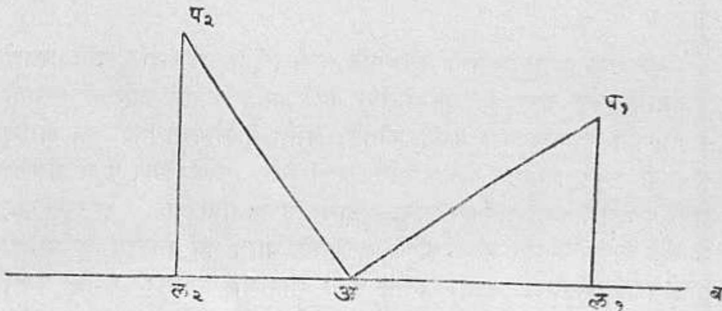
५४. ज्या दोन कोनांची बेरीज ९० अंश असते त्या दोन कोनांस एकमेकांचे कोटिकोन म्हणतात. त्यांच्या भुजज्यादि गुणोत्तरांचा संबंध खालीं लिहिल्या-प्रमाणें असतो. जसे अ कोन आणि (९०—अ) कोन हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तेव्हां—

भुअ = कोभु (९० — अ) ; कोभु अ = भु (९० — अ) ;

स्पअ = कोस्प (९० — अ) ; कोस्प अ = स्प (९० — अ) ;

छेअ = कोछे (९० — अ) ; कोछे अ = छ (९० — अ).

५५. विवक्षित कोन आणि त्रिभाधिक तोच कोन यांच्या भुजज्यादि गुणोत्तरांचा अन्योन्य संबंध. विवक्षित कोन अ अंशाचा आहे, आणि त्रिभाधिक अ कोन म्हणजे (९० अंश+अ) यांच्या भुजज्यादिकांच्या अन्योन्य संबंध ठरवावयाचा.



अप ही भ्रमण करणारी रेषा आहे हिनें बअप$_१$ कोन केला आहे. अप रेषेनें आणखी ९० अंश भ्रमण केल्याने अप रेषा अप$_२$ ह्या स्थितींत आली आहे. प$_१$ल$_१$ प$_२$ल$_२$, हे लंब काढिले. अप$_१$ल$_१$ हा काटकोनत्रिकोण अप$_२$ल$_२$ काटकोनत्रिकोणाशी एकरूप आहे. आणि

$$\text{बअप}_२ \text{ हा कोन} = \text{बअप}_१ \text{ कोन} + ९० = \text{अ} + ९०^\circ$$

$$\text{भु}(९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{प}_२\text{ल}_२}{\text{अप}_२} = \frac{\text{अल}_१}{\text{अप}_१} = \text{कोभुअ},$$

$$-\text{कोभु}(९०^\circ + \text{अ}) = \frac{-\text{अल}_२}{\text{अप}_२} = \frac{\text{प}_१\text{ल}_१}{\text{अप}_१} = \text{भुअ},$$

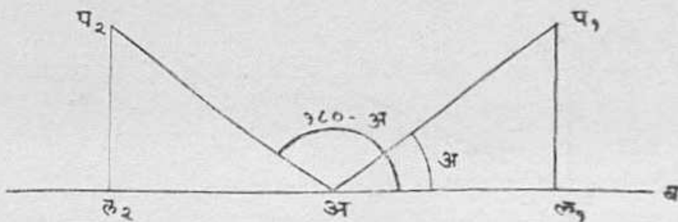
$$-\text{स्प}(९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{प}_२\text{ल}_२}{-\text{अल}_२} = \frac{\text{अल}_१}{\text{प}_१\text{ल}_१} = \text{कोस्पअ},$$

$$-\text{कोस्प}(९०^\circ + \text{अ}) = \frac{-\text{अल}_२}{\text{प}_२\text{ल}_२} = \frac{\text{प}_१\text{ल}_१}{\text{अल}_१} = \text{स्पअ},$$

$$-\text{छे}(९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{अप}_२}{-\text{अल}_२} = \frac{\text{अप}_१}{\text{प}_१\text{ल}_१} = \text{कोछेअ},$$

$$\text{कोछे}(९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{अप}_२}{\text{प}_२\text{ल}_२} = \frac{\text{अप}_१}{\text{प}_१\text{ल}_१} = \text{छेअ}.$$

५६. विवक्षित कोन आणि त्याचा पूरककोन यांच्या भुजज्यादि गुणोत्तरांचा अन्योन्य संबंध. विवक्षित कोन (१८०—अ) अंशांचा आहे आणि त्याचा पूरक कोन अ अंशांचा आहे, तर ह्या कोनांच्या भुजज्यादि गुणोत्तरांचा अन्योन्य संबंध ठरवावयाचा.



बअप$_२$ हा विवक्षित कोन आहे. आणि प$_२$अल$_२$ हा त्याचा पूरक कोन आहे. पण हा अब रेषेला आरंभ करून मापिलेला नाहीं. यास्तव अल$_२$ बरोबर अल$_१$ रेषा केली, ल$_१$ पासून अब वर लंब केला, आणि तो ल$_२$प$_२$ बरोबर करून अप$_१$ सांधले तेव्हां प$_१$अल$_१$ हा त्रिकोण प$_२$अल$_२$ यांशी एकरूप झाला. म्हणून प$_१$अल$_१$ हा कोन अ कोनाबरोबर आहे. ह्यावरून—

$$\text{भु}\ (१८०^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{प}_२\text{ल}_२}{\text{अप}_२} = \frac{\text{प}_१\text{ल}_१}{\text{अप}_१} = \text{भुअ},$$

$$-\text{कोभु}\ (१८०^\circ - \text{अ}) = \frac{-\text{अल}_२}{\text{अप}_२} = \frac{\text{अल}_१}{\text{अप}_१} = \text{कोभुअ},$$

$$-\text{स्प}\ (१८०^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{प}_२\text{ल}_२}{-\text{अल}_२} = \frac{\text{प}_१\text{ल}_१}{\text{अल}_१} = \text{स्पअ},$$

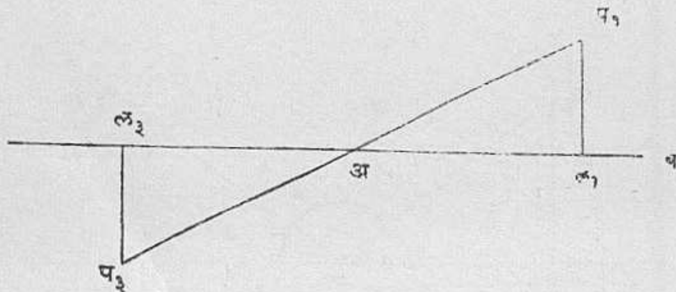
$$-\text{कोस्प}\ (१८०^\circ - \text{अ}) = \frac{-\text{अल}_२}{\text{प}_२\text{ल}_२} = \frac{\text{अल}_१}{\text{प}_१\text{ल}_१} = \text{कोस्पअ},$$

$$-\text{छे}\ (१८०^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{अप}_२}{-\text{अल}_२} = \frac{\text{अप}_१}{\text{अल}_१} = \text{छेअ},$$

$$\text{कोछे}\ (१८०^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{अप}_२}{\text{प}_२\text{ल}_२} = \frac{\text{अप}_१}{\text{प}_१\text{ल}_१} = \text{कोछेअ}.$$

यावरून पाहतां कोणताहि कोन आणि त्याचा पूरककोन यांच्या भुजज्यादि गुणो-त्तरांच्या केवल संख्या समान असतात, आणि भुजज्या आणि कोछेदनरेषा यांचीं चिन्हें ही एकच असतात, परंतु इतर गुणोत्तरांचीं चिन्हें भिन्न असतात.

५७. विवक्षित कोन आणि षडभाधिक तोच कोन याच्या भुजज्यादि गुणोत्तरांचा अन्योन्य संबंध. विक्षित कोन अ अंशाचा आहे, आणि षडभाधिक तोच कोन (१८०° + अ) इतक्या अंशांचा आहे यांच्या भुजज्यादिकांचा अन्योन्य संबंध.



ब अ प$_१$ हा विवक्षित म्हणजे इच्छिलेला अ अंशांचा कोन आहे, आतां अ प$_१$ ही भ्रमण करणारी रेषा अ प$_१$ पासून १८०° भ्रमण करून अ प$_३$ ह्या स्थितीत आहे. तर ब अ प$_३$ हा षडभाधिक अ अंशांचा कोन आहे. तेव्हां

$$— \text{भु}\ (१८०^\circ + \text{अ}) = \frac{—\text{प}_३\text{ल}_३}{\text{अ प}_३} = \frac{\text{प}_१\text{ल}_१}{\text{अ प}_१} = \text{भुअ}$$

$$— \text{कोभु}\ (१८०^\circ + \text{अ}) = \frac{—\text{अ ल}_३}{\text{अ प}_३} = \frac{\text{अ ल}_१}{\text{अ प}_१} = \text{को भु अ}$$

$$\text{स्प}\ (१८०^\circ + \text{अ}) = \frac{—\text{प}_३\text{ल}_३}{—\text{अ ल}_३} = \frac{\text{प}_१\text{ल}_१}{\text{अ ल}_१} = \text{स्प अ}$$

$$\cdot\cdot\ \text{कोस्प}\ (१८०^\circ + \text{अ}) = \frac{—\text{अ ल}_३}{—\text{प}_३\text{ल}_३} = \frac{\text{अ ल}_१}{\text{प}_१\text{ल}_१} = \text{कोस्प अ}$$

$$— \text{छे}\ (१८०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{अ प}_३}{—\text{अ ल}_३} = \frac{\text{अ प}_१}{\text{अ ल}_१} = \text{छे अ}$$

$$— \text{को छे}\ (१८०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{अ प}_३}{—\text{प}_३\text{ल}_३} = \frac{\text{अ प}_१}{\text{प}_१\text{ल}_१} = \text{को छे अ.}$$

५८. भुजज्यादि गुणोत्तरांच्या लक्षणावरून कांहीं सिद्धांत सिद्ध होतात. ते खालीं दिल्याप्रमाणें :—

$$\text{अभु} \times \text{कोछेअ} = १ \quad (१), \quad \text{स्पअ} \times \text{कोस्पअ} = १ \quad (३),$$

$$\text{कोभुअ} \times \text{छेअ} = १ \quad (२), \quad \text{भुअ} \times \text{कोभुअ} = \text{स्पअ} \quad (४),$$

$$\text{कोछेअ} \div \text{छेअ} = \text{कोस्पअ} \quad (५).$$

तसेंच अ प$_१$ ल$_१$ हा काटकोन त्रिकोण आहे म्हणून

$$\text{भुज}^२ + \text{कोटि}^२ = \text{कर्ण}^२$$

ह्या सिद्धांतावरून खालचें सिद्धांत सिद्ध होतात :—

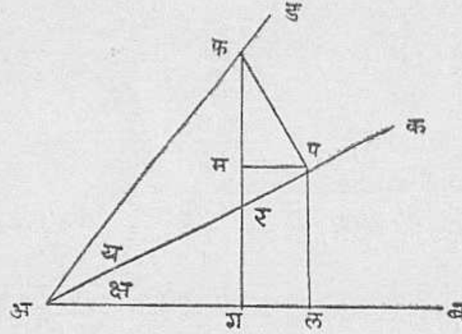
$$\text{भु}^२\text{अ} + \text{कोभु}^२\text{अ} = १ \quad (६),$$

$$१ + \text{कोस्प}^२\text{अ} = \text{कोछे}^२\text{अ} \quad (७),$$

$$\text{स्प}^२\text{अ} + १ = \text{छे}^२\text{अ} \quad (८).$$

दोन कोनांच्या बेरीज व वजाबाकी यांची भुजज्यादि गुणोत्तरें

५९. क्ष आणि य ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या दिली आहे तर (क्ष + य) ह्या कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या ठरवावयाची.



ब अ क हा क्ष अंशांचा कोन आहे आणि क अ ड हा य अंशांचा कोन आहे तर ब अ ड ह्या कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या ठरवावयाची. अ ड रेषेंत फ बिंदु घेतला, फ पासून अ ब वर फ ग आणि अ क वर फ प लंब काढिले. आणि अ क रेषेंमधील प बिंदूपासून अ ब वर प ल आणि फ ग वर प म लंब काढिले.

ह्या आकृतीत फ र प आणि अ र ग हे दोन्ही काटकोन त्रिकोण असून फ र प व अ र ग हे कोन समान आहेत म्हणून प फ म कोन र अ ग कोनाबरोबर म्हणजे क्ष कोनाबरोबर आहे.

$$\text{ब अ ड कोन} = (\text{क्ष} + \text{य}) \text{ कोन.}$$

तेव्हां लक्षणाप्रमाणें

$$\text{भ}\ (\text{क्ष} + \text{य}) = \frac{\text{फग}}{\text{अफ}} = \frac{\text{मग} + \text{फम}}{\text{अफ}} = \frac{\text{मग}}{\text{अफ}} + \frac{\text{फम}}{\text{अफ}},$$

$$= \frac{\text{मग}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अप}} + \frac{\text{फम}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{पफ}},$$

$$= \frac{\text{पल}}{\text{अप}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अफ}} + \frac{\text{फम}}{\text{पफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{अफ}}, \qquad [\text{मग} = \text{पल}]$$

$$= \text{भक्ष} \cdot \text{कोभुय} + \text{कोभुक्ष} \cdot \text{भुय} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{कोभु}\ (\text{क्ष} + \text{य}) = \frac{\text{अग}}{\text{अफ}} = \frac{\text{अल} - \text{गल}}{\text{अफ}} = \frac{\text{अल}}{\text{अफ}} - \frac{\text{गल}}{\text{अफ}},$$

$$= \frac{\text{अल}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अप}} - \frac{\text{गल}}{\text{अफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{पफ}},$$

$$= \frac{\text{अल}}{\text{अप}} \times \frac{\text{अप}}{\text{अफ}} - \frac{\text{मप}}{\text{पफ}} \times \frac{\text{पफ}}{\text{अफ}}, \qquad [\text{गल} = \text{मप}]$$

$$= \text{कोभुक्ष} \cdot \text{कोभुय} - \text{भुक्ष} \cdot \text{भुय} \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

६०. क्ष आणि य ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या दिलीं तर (क्ष—य) ह्या कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या ठरवावयाची.

ब अ क हा क्ष अंशांचा कोन आहे, आणि क अ ड हा य अंशांचा कोन आहे, तेव्हां ब अ ड हा (क्ष—य) अंशांचा कोन आहे. ह्या (क्ष—य) कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या ठरवावयाची. अ ड रेषेंत फ बिंदु घेतला, फ पासून अ ब वर फ ग आणि अ क वर फ प लंब केले. तसेच अ ल रेषेमधील प बिंदूपासून ग फ वाढवून तिजवर प म लंब केला आणि प बिंदूपासून अ ब वर प ल लंब केला.

अ प म ह्या कोनांतून म प ल, अ प फ हे काटकोन काढून टाकिलें तर म प फ कोन अ प ल कोनाबरोबर राहतो. अर्थात ह्या कोनांचे कोटिकोन प फ म व प अ ल हे समान आहेत. म्हणजे प फ म कोन क्ष कोनाबरोबर आहे. तेव्हा लक्षणाप्रमाणे

$$भु\ (क्ष - य) = \frac{फग}{अफ} = \frac{मग - मफ}{अफ} = \frac{मग}{अफ} - \frac{मफ}{अफ},$$

$$= \frac{मग}{अप} \times \frac{अप}{अप} - \frac{मफ}{अफ} \times \frac{पफ}{पफ},$$

$$= \frac{मग}{अप} \times \frac{अप}{अफ} - \frac{मफ}{पफ} \times \frac{पफ}{अफ}, \qquad [मग = पल]$$

$$= भुक्ष \cdot कोभुय - कोभुक्ष \cdot भुय \cdots\cdots\cdots (३)$$

$$कोभु\ (क्ष - य) = \frac{अग}{अफ} = \frac{अल + लग}{अफ} = \frac{अल}{अफ} + \frac{लग}{अफ},$$

$$= \frac{अल}{अफ} \times \frac{अप}{अप} + \frac{लग}{अफ} \times \frac{पफ}{पफ},$$

$$= \frac{अल}{अफ} \times \frac{अप}{अफ} + \frac{लग}{पफ} \times \frac{पफ}{अफ}, \qquad [लग = पम]$$

$$= कोभुक्ष \cdot कोभुय + भुक्ष \cdot भुय \cdots\cdots\cdots (४)$$

६१. वरच्या लेखांतील समीकरण (३) व (४) ही लेख ५९ मधील समीकरण (१) व (२) यांमध्यें य ह्या धन कोनाच्या जागीं—य हा ऋण कोन लिहिल्यानेंही सिद्ध होतात.

वरची चार समीकरणें, क्ष आणि य हे कोन कोणत्याहि पादांत असोत, धन असोत किंवा ऋण असोत त्यांची सिद्धता आकृति द्वारा किंवा बीजगणित योजनेने संदेहरहित करितां येतें. ह्या चार समीकरणाच्या संयोग वियोगानें व अवांतर योजनेने पुष्कळसे सिद्धांत सिद्ध होतात. ते सिद्धांत म्हणजेच समीकरणें खालच्या लेखांत सिद्ध करून दाखविलीं आहेत. हीं वरचीं चार समीकरणें खालीं एकत्र लिहून दाखविलीं आहेत :—

$$भु\ (क्ष + य) = भुक्ष\ कोभुय + कोभुक्ष\ भुय \quad \cdots (१).$$

$$कोभु\ (क्ष + य) = कोभुक्ष\ कोभुय - भुक्ष\ भुय \cdots (२).$$

$$भु\ (क्ष - य) = भुक्षकोभुय - कोभुक्षभुय \quad \cdots (३).$$

$$कोभु(क्ष - य) = कोभुक्ष\ कोभुय + भुक्ष\ भुय \quad \cdots (४).$$

६२. समीकरण (१) व (३) यांची बेरीज आणि वजाबाकी केली, तसेच समीकरण (२) व (४) यांची बेरीज आणि वजाबाकी केली तर खालीं दिलेलीं चार समीकरणें तयार होतात :—

$$\text{भु}(\text{क्ष} + \text{य}) + \text{भु}(\text{क्ष} - \text{य}) = २\ \text{भुक्ष कोभुय} \quad \cdots (५).$$

$$\text{भु}(\text{क्ष} + \text{य}) - \text{भु}(\text{क्ष} - \text{य}) = २\ \text{कोभुक्ष भुय} \quad \cdots (६).$$

$$\text{कोभु}(\text{क्ष} + \text{य}) + \text{कोभु}(\text{क्ष} - \text{य}) = २\ \text{कोभुक्ष} \cdot \text{कोभुय} \quad \cdots (७).$$

$$\text{कोभु}(\text{क्ष} + \text{य}) - \text{कोभु}(\text{क्ष} - \text{य}) = -\ २\ \text{भुक्ष} \cdot \text{भुय} \quad \cdots (८).$$

समीकरणें (५) ते (८) मध्ये (क्ष + य) च्या ठिकाणी अ आणि (क्ष — य) च्या ठिकाणी ब लिहिला तर—

$$\text{भुअ} + \text{भुब} = २\ \text{भु}\ \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{कोभु}\ \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \quad \cdots (९).$$

$$\text{भुअ} - \text{भुब} = २\ \text{कोभु}\ \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{भु}\ \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \quad \cdots (१०).$$

$$\text{कोभुअ} + \text{कोभुब} = २\ \text{कोभु}\ \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{कोभु}\ \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \quad \cdots (११).$$

$$\text{कोभुअ} - \text{कोभुब} = -\ २\ \text{भु}\ \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२} \times \text{भु}\ \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} \quad \cdots (१२).$$

समीकरण (१) व (२) ह्यामध्ये क्ष = य मांनिला तर—

$$\text{भु}\ २\ \text{क्ष} = २\ \text{भुक्ष कोभुक्ष} \quad \cdots (१३).$$

$$\text{कोभु}२\text{क्ष} = \text{कोभु}^{२}\text{क्ष} - \text{भु}^{२}\text{क्ष} \quad \cdots (१४).$$

समीकरण (१४) मध्यें क्ष च्या ठिकाणी $\frac{\text{क्ष}}{२}$ लिहिला तर—

$$१ + \text{कोभुक्ष} = \text{भु}^{२}\frac{\text{क्ष}}{२} + \text{कोभु}^{२}\frac{\text{क्ष}}{२} + \text{कोभु}^{२}\frac{\text{क्ष}}{२} - \text{भु}^{२}\frac{\text{क्ष}}{२}$$

$$१ + \text{कोभुक्ष} = २\text{को भु}^{२}\frac{\text{क्ष}}{२} \quad \cdots (१५).$$

$$१ - \text{कोभुक्ष} = २\ \text{भु}^{२}\ \frac{\text{क्ष}}{२} \quad \cdots (१६).$$

६३. दोन कोनांच्या बेरजेची भुजज्या आणि कोभुजज्या प्रत्येक कोनाच्या भुजज्या आणि कोभुजज्या यांच्या किंमतीने दाखविल्या, आतां स्पर्शरेषा आणि कोस्पर्शरेषा दाखवूं.

$$\text{स्प}\ (\text{अ} + \text{ब}) = \frac{\text{भु}\ (\text{अ} + \text{ब})}{\text{कोभु}\ (\text{अ} + \text{ब})} = \frac{\text{भु अ को भु अ} + \text{को भु ब भु ब}}{\text{को भु अ को भु ब} - \text{भु अ भु ब}}$$

अंशाला आणि छेदाला कोभुअ कोभुब ने भागिले तर

$$\text{स्प}\ (\text{अ} + \text{ब}) = \frac{\frac{\text{भु अ}}{\text{कोभुअ}} + \frac{\text{भुब}}{\text{कोभुब}}}{१ - \frac{\text{भुअ}}{\text{कोभुअ}} \times \frac{\text{भुब}}{\text{कोभुब}}.} = \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प ब}}{१ - \text{स्पअ स्पब}} \quad \cdot\cdot (१७).$$

$$\text{तसेंच स्प}(\text{अ} - \text{ब}) = \frac{\text{स्प अ} - \text{स्प ब}}{१ + \text{स्पअ स्पब}} \quad \cdot\cdot (१८).$$

समीकरण (१७) मध्ये अ = ब मानिला तर

$$\text{स्प २अ} = \frac{२\ \text{स्पअ}}{१ - \text{स्प}^{२}\ \text{अ}} \quad \cdot\cdot (१९).$$

समीकरण (१७) व (१८) मध्ये ब = ४५° मानिले तर — ४५° ची स्पर्श रेषा १ असते. आणि कोस्पर्श रेषाहि १ च असते.

$$\text{स्प}\ (\text{अ} + ४५^{\circ}) = \frac{१ + \text{स्पअ}}{१ - \text{स्पअ}} \quad \cdot\cdot (२०).$$

$$\text{स्प}\ (\text{अ} - ४५^{\circ}) = \frac{\text{स्पअ} - १}{\text{स्पअ} + १} \quad \cdot\cdot (२१).$$

त्याचप्रमाणें

$$\text{कोस्प}\ (\text{अ} + \text{ब}) = \frac{\text{कोस्पअ कोस्पब} - १}{\text{कोस्पअ} + \text{कोस्पब}} \quad \cdot\cdot (२२).$$

$$\text{आणि कोस्प}\ (\text{अ} - \text{ब}) = \frac{\text{कोस्पअ कोस्पब} + १}{\text{कोस्पअ} - \text{कोस्पब}} \quad \cdot\cdot (२३).$$

$$\text{कोस्प २-अ} = \frac{\text{कोस्प}^{२}\ \text{अ} - १}{२\ \text{कोस्पअ}} \quad \cdot\cdot (२४).$$

$$\text{स्पअ} + \text{स्पब} = \frac{\text{भुअ}}{\text{कोभुअ}} + \frac{\text{भुब}}{\text{कोभुब}} = \frac{\text{भुअ कोभुब} + \text{कोभुअ भुब}}{\text{कोभुअ कोभुब}}$$

$$= \frac{\text{भु}(\text{अ} + \text{ब})}{\text{कोभुअ कोभुब}} \quad \cdot\cdot(२६).$$

वरच्याच प्रमाणें $\text{स्पअ} - \text{स्पब} = \dfrac{\text{भु}\ (\text{अ} - \text{ब})}{\text{कोभुअ कोभुब}}$ ··(२७).

समीकरण (१६) ला (१५) ने भागिलें तर (त्यात क्ष चे जागी २ क्ष घ्या).

$$\text{स्पक्ष} = \frac{१ - \text{कोभु २क्ष}}{१ + \text{कोभु २क्ष}} \quad \cdot\cdot(२८).$$

समीकरण (१३) ला $१ = \text{भु}^{२}\text{क्ष} + \text{कोभु}^{२}\text{क्ष}$ ने भागिलें तर

$$\text{भु २क्ष} = \frac{\text{२ भु कोभुक्ष}}{\text{भु}^{२}\text{क्ष} + \text{कोभु}^{२}\text{क्ष}} = \frac{\text{२ स्पअ}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}} \quad \cdot\cdot(२९).$$

ह्याप्रमाणे (१४) ला भागिले तर

$$\text{कोभु२क्ष} = \frac{\text{कोभु}^{२}\text{क्ष} - \text{भु}^{२}\text{क्ष}}{\text{कोभु}^{२}\text{क्ष} + \text{भु}^{२}\text{क्ष}} = \frac{१ - \text{स्प}^{२}\text{क्ष}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{क्ष}} \quad \cdot\cdot(३०).$$

भुजज्यादि गुणोत्तरांच्या किंमती

६४. कोनाची अंश संख्या आणि त्याच कोनाची भुजज्यादि गुणोत्तरें यांचा एकमेकांशीं जो संबंध आहे तो सरळ नसून फारच गुंतागुतीचा आहे. हा संबंध पुढें दाखविण्यांत येईल. येथे कांहीं कोनाच्या भुजज्यादि गुणोत्तराचें संपादन करून दाखविलें आहे.

३० अंश कोनाचीं भुजज्यादि गुणोत्तरें लेख ४९ मध्यें दिलीं आहेत. पण लेख ५० वरून $(९०^\circ - ३०^\circ) = ६०$ अंशाच्या कोनाची गुणोत्तरें समजतात. जसें—

$$\text{भु } ६०^\circ = \text{कोभु } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{कोभु } ३०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{कोभु } ६०^\circ = \text{भु } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{भु } ३०^\circ = \frac{१}{२}$$

$$\text{स्प } ६०^\circ = \text{कोस्प } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{कोस्प } ३०^\circ = \sqrt{३}$$

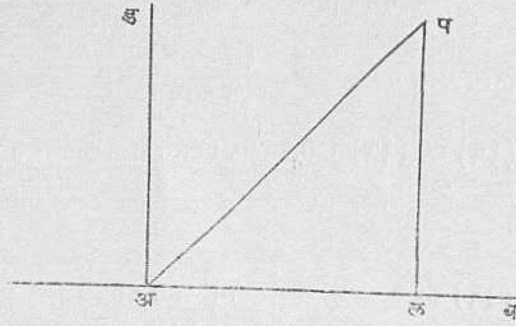
$$\text{कोस्प } ६०^\circ = \text{स्प } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{स्प } ३०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$\text{छे } ६०^\circ = \text{कोछे } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{कोछे } ३०^\circ = २$$

$$\text{कोछे } ६०^\circ = \text{छे } (९०^\circ - ६०^\circ) = \text{छे } ३०^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}}$$

६५. कोन ४५ अंशाचा आहे. त्याची भुजज्यादि गुणोत्तरें ठरवावयाची.

अब रेखेवर अड लंब काढिला. ब अ ड कोनास दुभागणारी अप रेषा काढिली.



प बिंदुपासून अ ब वर प ल लंब काढिला.

प अ ल कोन ४५ अंशाचा आहे, तसाच अ प ल हाहि ४५ अंशाचा आहे म्हणून प ल = अ ल आहे. आणि

$$\text{अप}^२ = \text{पल}^२ + \text{अल}^२$$
$$= २\ \text{पल}^२ = २\ \text{अल}^२$$

तेव्हां

$$\text{भु}\ ४५^\circ = \frac{\text{पल}}{\text{अप}} = \sqrt{\frac{\text{पल}^२}{\text{अप}^२}} = \sqrt{\frac{\text{पल}^२}{२\ \text{पल}^२}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{१}{२}} = \text{कोभु}\ ४५^\circ$$

$$\text{स्प}\ ४५^\circ = \frac{\text{पल}}{\text{अल}} = १ = \text{कोस्प}\ ४५^\circ$$

६६. भ्रमण करणारी अ प रेषा अ ड ला मिळाली म्हणजे ब अ प कोन ९० अंशाचा झाला तर प ल रेषा प अ बरोबर होईल, आणि अ ल कोटि ० होईल. यावरून ९० अंशाची भुजज्या १ होते आणि कोभुजज्या ० होते. स्पर्श रेषा $= \frac{१}{०} = \infty$ म्हणजे अनंत. ∞ हे चिन्ह अनंत शब्दाचें दर्शक आहे. कोस्पर्श रेषा $= \frac{०}{१} = ०$. छेदन रेषा $= \frac{१}{०} = \infty$ म्हणजे अनंत. आणि कोछेदन रेषा $= \frac{१}{१} = १$.

कोन ० अंश किंवा १८० अंश असता पल भुज ० असतो आणि अ ल कोटि अ प बरोबर असतो. तेव्हां ० आणि १८० अंशाचा कोन असता त्यांचीं भुजज्यादि गुणोत्तरें वाचकांच्या सहज लक्षांत येतील.

वरच्या लेखनांत तयार केलेले गुणोत्तरें आणि त्यावरून सुलभ रीतीनें म्हणजे सहज साध्य भुजज्यादि गुणोत्तरें खालच्या कोष्टकांत दिली आहेत.

	०	३०	४५	६०	९०	१२०	१३५	१५०	१८०
भुजज्या	०	$\frac{१}{२}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	१	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{१}{२}$	०
कोभुजज्या	१	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{१}{२}$	०	$-\frac{१}{२}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	—१
स्पर्श रेषा	०	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	१	$\sqrt{३}$	∞	$-\sqrt{३}$	—१	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	०
कोस्पर्श रेषा	∞	$\sqrt{३}$	१	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	०	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	—१	$-\sqrt{३}$	∞
छेदन रेषा	१	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{२}$	२	∞	—२	$-\sqrt{२}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	—१
को छेदन रेषा	∞	२	$\sqrt{२}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	१	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{२}$	२	∞

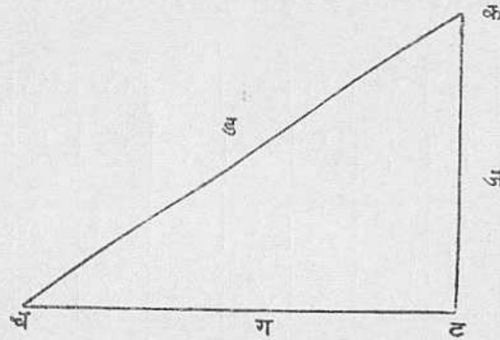
६७. त्रिकोणमितीचे एथपर्यंत जे सिद्धांत सिद्ध केले त्यावरून हे स्पष्ट कळते कीं, (१) शून्यापासून ४५ अंशापर्यंतच्या सर्व कोनांची गुणोत्तरें समजलीं (तयार केलीं) म्हणजे त्यावरूनच हव्या त्या कोनाचीं गुणोत्तरें तयार होतात, आणि (२) कोणत्याहि कोनाच्या भुजज्यादि सहा गुणोत्तरांपैकीं एक समजले तर बाकीची पांच तयार करितां येतात. ह्या दोन्ही मुद्यांचा आभ्यासूंनीं विचार केला तर त्यांस त्यांतील विषय सहज लक्षांत येण्यासारखा आहे.

त्रिकोणाच्या बाजू व त्या बाजूसमोरच्या कोनांची भुजज्यादि गुणोत्तरें यांचा अन्योन्य संबंध.

६८. काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू आणि त्या बाजूसमोरच्या कोनाच्या भुजज्यादि गुणोत्तराचा अन्योन्य संबंध.

क च ट हा काटकोन त्रिकोण आहे आणि त्यांचा ट कोन काटकोन आहे.

(त्रिकोणाचे तिन्ही कोन क च ट अक्षरांनीं व तिन्ही बाजू ग ज ड अक्षरांनीं दाखविण्याचा संकेत केला आहे. त्यात क कोनासमोर ग बाजु, च कोनासमोर ज बाजु, आणि ट कोनासमोर ड बाजु असा संकेत केला आहे. तथापि कांहीं प्रसंगीं तो संकेत सोडूनहि लिखाण होईल.)



वरील लेखाप्रमाणे—

$$\frac{\text{कट}}{\text{कच}} = \frac{\text{ज}}{\text{ड}} = \text{भुच किंवा कोभुक.}$$

म्हणून ज = ड भुच किंवा ज = ड कोभुक.

तसेच

$$\frac{\text{चट}}{\text{कच}} = \frac{\text{ग}}{\text{ड}} = \text{भुक किंवा कोभुच.}$$

म्हणून ग = ड भुक किंवा ग = ड कोभुच.

$$\text{ह्याचप्रमाणें } \frac{\text{ज}}{\text{ग}} = \text{कोस्पक किंवा स्पच.}$$

म्हणून ज = ग कोस्पक किंवा ज = ग स्पच.

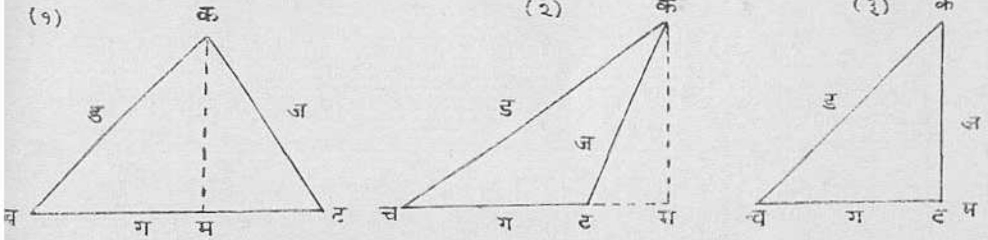
$$\text{आणि } \frac{\text{ग}}{\text{ज}} = \text{कोस्पच किंवा स्पक.}$$

म्हणून ग = ज स्पक किंवा ग = ज कोस्पच.

६९. कोणत्याहि त्रिकोणाच्या बाजू, त्यांच्या समोरच्या कोनांच्या भुजज्येशीं प्रमाणांत असतात. म्हणजे

$$\frac{\text{भुक}}{\text{ग}} = \frac{\text{भुच}}{\text{ज}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}} .$$

असें सिद्ध करावयाचें.



क च ट हा त्रिकोण आहे, ह्या त्रिकोणाच्या क कोनबिंदूपासून ग बाजूवर (किंवा ती ग बाजु वाढवून तिजवर) क म लंब केला. तेव्हां (१) (२) क म = ड × भुच आणि कम = ज × भुट म्हणून ड × भुच = ज × भुट किंवा

$$\frac{\text{भुच}}{\text{ज}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}}$$

ह्याप्रमाणेच च बिंदुपासून ज बाजूवर लंब टाकिला तर

ग × भुट = ड × भुक किंवा

$$\frac{\text{भुट}}{\text{ड}} = \frac{\text{भुक}}{\text{ग}}$$

ह्यावरून $\frac{\text{भुच}}{\text{ज}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}} = \frac{\text{भुक}}{\text{ग}}$

(३) जर ट कोन काटकोन असेल तर भुट = १ आणि

भुक = $\frac{\text{ग}}{\text{ड}}$; आणि भुच = $\frac{\text{ज}}{\text{ड}}$

म्हणून = $\frac{\text{भुक}}{\text{ग}} = \frac{\text{भुच}}{\text{ड}} = \frac{१}{\text{ड}} = \frac{\text{भुट}}{\text{ड}}$

७०. कोणत्याहि त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंचा त्याच्या कोनाच्या कोभुजज्याशीं संबंध.

कचट त्रिकोणाच्या ट कोनाच्या कोभुजज्याशी संबंध, वरच्या लेखातील आकृति १ पहा.

$$\text{ड}^2 = \text{चम}^2 + \text{कम}^2 = (\text{ग}-\text{मट})^2 + \text{कम}^2$$
$$= \text{ग}^2 - २\,\text{मट} \times \text{ग} + (\text{मट}^2 + \text{कम}^2).$$
$$= \text{ग}^2 - २\,\text{मट} \times \text{ग} + \text{ज}^2$$

परंतु म ट = ज कोभुट म्हणून

$$\text{ड}^2 = \text{ग}^2 + \text{ज}^2 - २\,\text{गज कोभुट} \quad \cdot\cdot(१)$$

$$\text{कोभुट} = \frac{\text{ग}^2 + \text{ज}^2 - \text{ड}^2}{२\text{ग}\cdot\text{ज}} \quad \cdot\cdot(२).$$

आकृति (२) मध्ये $\text{चम}^2 = (\text{ग} + \text{म ट})^2$. पण कोभुट ऋण म्हणून

$$\text{कोभुट} = \frac{\text{ग}^2 + \text{ज}^2 - \text{ड}^2}{२\text{ग}\cdot\text{ज}}$$

ह्याचप्रमाणें, कोणत्याहि कोनाची कोभुजज्या ठरवितां येते.

७०-अ. त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यामधील कोन ही दिली असतां त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ तयार करावयाचे.

लेख ६९ मधील आकृति (१), (२), (३) पहा.

कचट त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ हे चट पाया आणि कम उंची यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर असते, म्हणजे--

त्रिकोणाचें क्षेत्र $= \frac{१}{२}$ चट $\times$ कम.

पण क म = ड भु च , च ट = ग. यावरून

त्रि क्षे त्र $= \frac{१}{२}$ ग ड भुच.

७१. त्रिकोणाची कोणतीहि बाजु ही, त्या बाजुच्या प्रत्येक टोंकाशीं असलेल्या कोनाच्या कोभुजज्येस, त्याच टोंकाशीं असलेल्या बाजूनें गुणून जे दोन गुणाकार येतात त्याच्या बेरजेबरोबर असते.

लेख ६९ आकृति (१) पहा

$$\text{ग} = \text{चम} + \text{मट}$$
$$= \text{डकोभुच} + \text{जकोभुट}$$

आकृति (२) मध्यें

ग = चम — मट पण

— मट = — कोभु (१८० — ट) × ज

ग = डकोभुच + जकोभुट

ह्याचप्रमाणें ज = डकोभुक + गकोभुट

आणि ड = जकोभुक + गकोभुच

७२. त्रिकोणमिति हा मोठा महत्त्वाचा विषय असून तो फार विस्तीर्ण आहे. त्यांतील मुख्य मुख्य सिद्धांत वर सिद्ध केले आहेत. हे सिद्धांत मूलरूप असल्या-मुळें यांच्या आधारानें त्रिकोणाचे अवयव संपादन वगैरे कार्यें करितां येतात. वर दिलेल्या विवेचनाशिवाय कोन आणि कंस म्हणजे ज्या आणि चाप वगैरे विषय सूक्ष्मांश गणिताचे सिद्धांत सिद्ध केल्यावर द्यावयाचा आहे.

प्रकरण पांचवें

गणितशास्त्रांतील मुख्य सिद्धांत

गोलीय त्रिकोणमिती

व्याख्या

७३. (१) ज्या धनाकृतीची मर्यादा एकाच वक्र पातळीने दाखविली जाते, आणि तिच्यामध्यें असा एक बिंदु असतो कीं, त्यापासून त्या वक्र पातळींतील अनेक बिंदुपर्यंत कितीहि सरळ रेषा काढल्या तरी त्या सर्व समान असतात. त्या धनाकृतीला 'गोल' असें म्हणतात आणि ज्या एका बिंदुपासून अनेक सरळ रेषा काढिल्या त्या बिंदुला गोलाचा 'मध्य' म्हणतात आणि त्या काढिलेल्या प्रत्येक सरळ रेषेला त्या गोलाची 'त्रिज्या' म्हणतात. त्रिज्या मध्यबिंदुकडे वाढविली आणि ती वक्रपृष्ठाला मिळाली असता जी दोन रेषांनी एक रेषा होते तिला त्या गोलाचा 'व्यास' म्हणतात.

(२) गोल सरळ पातळीनें छेदिला असता त्याचे जें छिन्न होतें तें वर्तुळ असतें. ती छेदक पातळी गोलाच्या मध्यांतून गेली तर जें वर्तुळ होतें त्यास 'महावृत्त' म्हणतात आणि मध्येतर बिंदुतून गेली तर जे वृत्त होते त्यास 'लघुवृत्त' म्हणतात. ज्या पातळीच्या छेदनानें हीं वृत्तें होतात त्या पातळीला त्या महावृत्ताची किंवा लघुवृत्ताची 'पातळी' म्हणतात. महावृत्ताच्या पातळीवर त्याच्या मध्य बिंदुपासून काढिलेला लंब किंवा लघुवृत्ताच्या पातळीवर त्याच्या मध्य बिंदुपासून काढिलेला लंब, गोलाच्या पृष्ठास दोहीकडे मिळाला असता गोलाचा व्यास होतो त्यास त्या महावृत्ताचा किंवा लघुवृत्ताचा 'आंस' म्हणतात. महावृत्त व लघुवृत्त यांच्या पातळ्या एकमेकांशीं समांतर असतील तर दोहींचा आंस एकच होतो. प्रत्येकाच्या आंसाच्या टोकास त्या वृत्ताचा 'ध्रुव' म्हणतात.

ध्रुव

लघु वृत्त

महा वृत्त

आंस

महा वृत्त

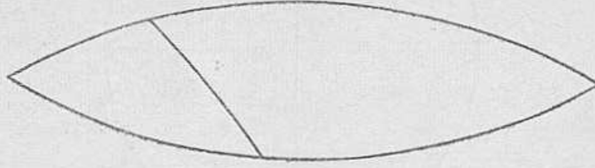
ध्रुव

ह्या आकृतीत महावृत्त, लघुवृत्त, आंस, व्यास ध्रुव हे दाखविले आहेत.

७४. लघुवृत्ताच्या परीघातील प्रत्येक बिंदुपासून कोणता तरी एक ध्रुव समान अंतरावर असतो. आणि महावृत्ताच्या परीघातील प्रत्येक बिंदुपासून दोन्ही ध्रुव प्रत्येकी ९०, ९० अंशावर असतात. ध्रुवापासून महावृत्ताच्या परीघापर्यंत काढलेला कंस परीघावर लंब असतो. गोलावर दोन महावृत्तें काढिले तर ती एकमेकास दोनच ठिकाणीं छेदितात व त्यामुळें प्रत्येक वृत्ताचे दोन समान भाग होतात. दोन महावृत्तें एकमेकास छेदितात तेव्हां त्यांच्या छेदन बिंदूशीं जो कोन (वक्र रेषा मध्ये) होतो तो, त्या वृत्ताच्या पातळ्यामधील कोनाएवढा असतो म्हणून तो कोन छेदन बिंदूतून दोन्ही वृत्तास (वर्तुळास) दोन स्पर्श रेषा काढिल्या तर त्यामधील कोनाएवढा असतो.

७५. एका महावृत्तानें गोल कापिला असता त्याचे दोन समान भाग होतात. तो गोल (दोन्ही भाग एकत्र असा) दुसऱ्या महावृत्तानें कापिला तर गोलाचे चार भाग होतात. त्यापैकीं एक भाग पाहिला तर त्याला एक वक्र पृष्ठ असून दोन सरळ पृष्ठें असतात. सरळ पृष्ठें ही दोन अर्धवर्तुळें असतात. ह्या दोन अर्धवर्तुळाच्या मर्यादा दाखविणारी सरळ रेषा गोलाचा व्यास असते. ह्या व्यासाला छेदणारी व गोल मध्यांतून जाणारी अशा सरळ पातळीने सगळा गोल किंवा वरच्या चार भागापैकी कोणता तरी एक भाग कापिला तर सगळ्या गोलाचे आठ भाग किंवा एका भागाचे दोन भाग होतील. हा एक भाग म्हणजे गोलाचा आठवा भाग ह्याला चार पृष्ठें असतात. तीन सरळ पृष्ठें आणि एक वक्र पृष्ठ. ह्यापैकी वक्र पृष्ठाची

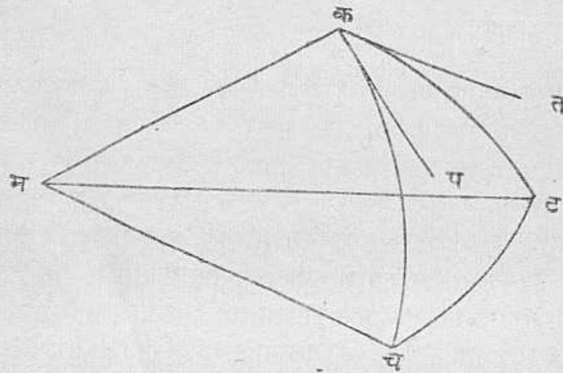
जी आकृती तो गोलीय त्रिकोण होय. गोलाच्या एकाच व्यासातून कितीही सरळ पातळ्यांनी गोल कापिला तरी त्रिकोण न होता त्या भागाला दोन सरळ पृष्ठें अर्धवर्तुळात्मक असून एक वक्र पृष्ठ असते पण त्याला कोन व्यासाग्राशी असे दोन असतात. ते कोन समान असतात. हें वक्र पृष्ठ कागदाच्या सरळ पातळीवर सरळ करून दाखविले तर ते "तिमि" च्या आकाराचे असते. जसें, ह्या तिमीचे दोन्ही



कोन समान असतात. कारण ते कोन दोन्ही छेदक पातळ्यामधील कोनाबरोबर असतात. ह्या तिमीच्या दोन्ही बाजू गोलाच्या परीघाच्या म्हणजे महावृत्ताच्या अर्धाबरोबर असतात. अर्थात तिमीच्या बाजूचे दोन भाग केले तर जे दोन कोन होतात ते एकमेकांचे पूरक कोन असतात. तिमीच्या कोनबिंदूखेरीज तिला छेदणारा महावृत्ताचा कंस काढिला तर तिमीचे दोन गोलीय त्रिकोण होतात.

गोलीय त्रिकोण

७६. गोलाच्या मध्यांतून तीन पातळ्या गेल्यानें गोलाचा असा एक भाग तयार होतो कीं, त्या भागास एक वक्र पृष्ठ असते. त्याला तीन समद्विभुज त्रिकोणाच्या तीन सरळ पातळ्यांच्या मर्यादा असून तिहींचा शिरोबिंदु एकच असतो मात्र समद्विभुज त्रिकोणाचे पाये वक्र रेषात्मक महावृत्ताचे कंस हे असतात. ह्या तिन्ही कंसांनीं मर्यादिलेल्या वक्रपृष्ठाला 'गोलीय-त्रिकोण' म्हणतात.



ह्या आकृतीमध्ये एक घन त्रिकोण शंकूची आकृति दाखविली आहे. म हा गोलाचा मध्य आहे. व त्रिकोण शंकूचें अग्र आहे. म क, म ट, म च ह्या गोलाच्या त्रिज्या आहेत. ह्या घनाकृतीची मर्यादा चार पृष्ठाकृतींनीं दाखविली आहे. त्या चार पृष्ठांपैकीं क म च, च म ट, ट म क हे तीन त्रिकोण आहेत. चवथे पृष्ठ क च ट हा गोलीय त्रिकोण होय. गोलिय त्रिकोणाचा कोन हा, कोन करणाऱ्या वक्र रेषांशीं कोनबिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा काढिल्या असतां त्या स्पर्शरेषांनीं होणाऱ्या कोनाएवढा असतो. जसें, आकृतीतील क कोन हा कत कप ह्याच्यामधील त क प कोना एवढा असतो.

वरच्या व्याख्यावरून उघड आहे कीं, गोलीय त्रिकोणाची प्रत्येक बाजू वर्तुळाच्या परीघापेक्षां कमी असते. गोलीय त्रिकोणाच्या कोणत्याहि दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षां जास्त असते. गोलीय त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असल्या तर त्या बाजूसमोरील कोन समान असतात आणि गोलीय त्रिकोणाचे दोन कोन समान असेल तर, त्या कोनासमोरील बाजू समान असतात. गोलीय त्रिकोणाच्या मोठ्या बाजूसमोरील कोन, लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षां मोठा असतो आणि गोलीय त्रिकोणाच्या मोठ्या कोनासमोरील बाजू लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.

गोलीय त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूचा, त्या बाजूच्या ज्या अंगास त्रिकोण आहे त्या आसाचा ध्रुव ह्याप्रमाणें तिन्ही बाजूचे ध्रुव घेऊन त्यामधून जाणारीं महावृत्तें काढिल्यानें तो त्रिकोण होतो त्यास त्या मूळ त्रिकोणाचा 'ध्रुवक त्रिकोण' म्हणतात.

एक गोलीय त्रिकोण दुसऱ्या गोलीय त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण आहे, तर तो दुसरा त्रिकोण पहिल्या त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण असतो.

जसें क च ट त्रिकोणाचा ख छ ट ध्रुवक त्रिकोण आहे, ह्या घनाकृतीची मर्यादा चार पृष्ठाकृतींनीं दाखविली आहे. त्या चार पृष्ठाकृतिपैकीं कमच, चमट, टमक हे तीन त्रिकोण आहेत. चवथे पृष्ठ क च ट हा गोलीय त्रिकोण होय. गोलीय त्रिकोणाचा कोन हा, कोन करणाऱ्या वक्र रेषांशीं कोनबिन्दुस्थळीं स्पर्शरेषा काढिल्या असता त्या स्पर्शरेषांनीं होणाऱ्या कोनाएवढा असतो. जसें आकृतीतील क कोन हा कत कप ह्यांच्यामधील त क प कोनाएवढा असतो.

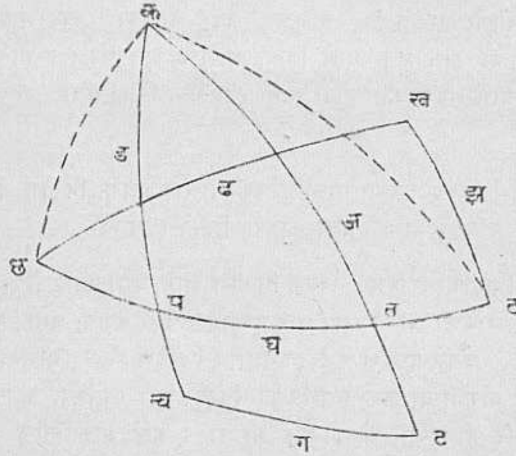
७७. वरच्या व्याख्येवरून उघड आहे कीं, गोलीय त्रिकोणाची प्रत्येक बाजू वर्तुळाच्या परीघापेक्षां कमी असते. गोलीय त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूची बेरीज तिसरीपेक्षां जास्त असते. गोलीय त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असल्या तर त्या बाजूसमोरील कोन समान असतात. आणि गोलीय त्रिकोणाचे दोन कोन

समान असेल तर त्या कोनासमोरील बाजू समान असतात. गोलीय त्रिकोणाच्या मोठ्या बाजूसमोरील कोन, लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो आणि गोलीय त्रिकोणाच्या मोठ्या कोनासमोरील बाजू लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.

७८. गोलीय त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूचा, त्या बाजूच्या ज्या अंगास त्रिकोण आहे त्या अंगचा ध्रुव ह्याप्रमाणें तिन्ही बाजूचे ध्रुव घेऊन त्यामधून जाणारीं महावृत्तें काढिल्यानें जो त्रिकोण होतो त्यास त्या मूळ त्रिकोणाचा 'ध्रुवक त्रिकोण' म्हणतात.

एक गोलीय त्रिकोण दुसऱ्या गोलीय त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण आहे, तर तो दुसरा त्रिकोण पहिल्या त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण असतो.

जसे कचट त्रिकोणाचा खछठ ध्रुवक त्रिकोण आहे, तर कचट त्रिकोण खछठ त्रिकोणाचा ध्रवक त्रिकोण होईल.



क छ आणि क ठ हे महावृत्ताचे कंस काढिले. आता छ हा क ट ह्या कंसाचा ध्रुव आहे. कछ = ९० अंश लेख ७४ प्रमाणें, तसेच ठ हा कच कंसाचा ध्रुव आहे म्हणून कठ = ९० अंश लेख ७४ प्रमाणें, यास्तव क हा छ ठ कंसाचा ध्रुव आहे व तो ठ छ च्या ज्या बाजूस त्रिकोण आहे त्याच बाजूस आहे. ह्याप्रमाणेंच

च हा खठ चा ध्रुव आहे आणि ट हा खछ चा ध्रुव आहे. म्हणून कचट त्रिकोण खछट त्रिकोणाचा ध्रुवक त्रिकोण आहे. म्हणून पत = क कोन, कट चा छ ध्रुव आहे म्हणून छत = ९० अंश. (ध्रुवापासून त्याच्या वृतावरील प्रत्येक बिंदु ९० अंशावर असतो. आणि वृत्तावरील दोन बिंदुमधील अंतर हें त्या बिंदुतून गेलेले दोन कंस ध्रुवात मिळाले असतां त्या ठिकाणीं जो कोन होईल त्या कोनाबरोबर असते.) त्याचप्रमाणे पठ = ९० अंश आहे.

आतां छत + पठ = छठ + पत = १८० परंतु पत = क
म्हणून छठ + क = १८०

म्हणून क कोन छठ चा पूरक कोन आहे.

ह्याप्रमाणेच छ कोन कट चा पूरक कोन आहे. ह्यावरून ध्रुवक त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन हे मूळ त्रिकोणाचे अनुक्रमे कोन आणि बाजू एकमेकांचे पूरक कोन असतात.

सामान्यत्वे कोणत्या त्रिकोणाची कोणती बाजू कोणत्या त्रिकोणाच्या कोणत्या कोनाची पूरक असते हे खालीं दाखविल्याप्रमाणें :—

कचट हा मूळ त्रिकोण त्याचे कचट हे कोन आणि गजड ह्या त्याच्या बाजू आहेत, तसेच खछठ हा ध्रुवक त्रिकोण त्याचे ख छ ठ हे कोन आणि घ झ ढ ह्या त्याच्या बाजू आहेत. (आकृति पहा.) तेव्हा त्यांचे संबंध खालच्याप्रमाणे आहेत :—

१८० अंशाच्या जागीं π म्हणजे वर्तुळ परीघाचे अर्ध त्यांचे वृत्त परिमाण यास 'पाय' म्हणतात तें योजिलें आहे.

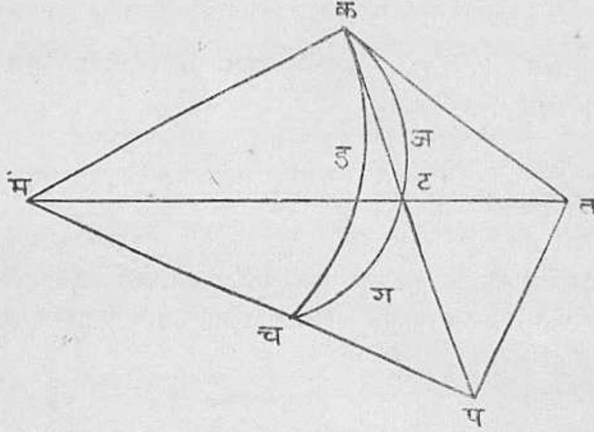
ख = π — ग घ = π — क

छ = π — ज झ = π — च

ठ = π — ड ढ = π — ट

गोलीय त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन यांचा परस्पर संबंध

७९. गोलीय त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू आणि कोणत्याही एका कोनाची कोभुजज्या यांचा परस्पर संबंध.



क च ट हा एक गोलीय त्रिकोण आहे. त्याच्या क कोनाच्या कोभुजज्येचा तिन्ही बाजूंशीं म्हणजे ग ज ड बाजूंशीं संबंध कसा आहे तो सिद्ध करावयाचा आहे.

म हा गोलाचा मध्य आहे. त्यापासून क च ट बिंदूपर्यंत क म, च म, ट म रेषा काढिल्या आहेत. ह्या गोलाच्या त्रिज्या आहेत. क बिंदूतून ड कंसाला क प स्पर्शरेषा काढिली, आणि ज कंसाला क बिंदूतून क त स्पर्शरेषा काढिली. ड ज हे कंस वर्तुळ पादापेक्षां कमी आहेत (९० अंशापेक्षां कमी आहेत) असे माना. यामुळें क प, म च रेषा एकमेकीस मिळतील आणि क त म ट रेषा ह्याही एकमेकीस मिळतील. त्या अनुक्रमें प त बिंदूत मिळतात असे घेऊं.

प क त कोन च क ट म्हणजे क कोनाबरोबर आहे.

$$पत^2 = कप^2 + कत^2 - २\ कप.कत\ \text{कोभुक}\ [\text{ले. ७० (१)}].$$

$$पत^2 = मप^2 + मत^2 - २\ मप.मत\ \text{कोभुज}\ पमत\ \text{वरच्याप्रमाणें}.$$

परंतु पमत कोन = ग कोन.

खालच्या समीकरणातून वरचे समीकरण वजा केले तेव्हा

$$० = \text{मप}^2 — \text{कप}^2 + \text{मत}^2 — \text{कत}^2.$$

$$— २\ \text{मप.मत कोभुग} + २\ \text{कप.कत कोभुक}\ (\text{अ}).$$

कप कत ह्या वर्तुळाच्या स्पर्शरेषा क बिंदूत वर्तुळाला स्पर्श करितात. आणि वर्तुळाची स्पर्शरेषा स्पर्शबिंदूतून काढिलेल्या त्रिज्येवर लंब असते. ह्यावरून मक त्रिज्येवर कप कत ह्या रेषा लंब आहेत. म्हणून मकप आणि मकत हे कोन काटकोन आहेत. तेव्हां—

$$\text{मप}^2 — \text{कप}^2 = \text{मक}^2;\quad \text{तसेच}\quad \text{मत}^2 — \text{कत}^2 = \text{मक}^2.$$

ह्या किंमती (अ) समीकरणात ठेवून २ नी समीकरण भागिले.

$$० = \text{मक}^2 — \text{मप.मत}\ \ \text{कोभुग} + \text{कप.कत}\ \ \text{कोभुक}$$

$$\text{कोभुग} = \frac{\text{मक}}{\text{मप}} \times \frac{\text{मक}}{\text{मत}} + \frac{\text{कप}}{\text{मप}} \times \frac{\text{कत}}{\text{मत}} \times \text{कोभुक}$$

ह्यामध्यें $\frac{\text{मक}}{\text{मप}} = \text{कोभु पमक} = \text{कोभुड}$

$$\frac{\text{मक}}{\text{मत}} = \text{कोभु तमक} = \text{कोभुज}$$

$$\frac{\text{कप}}{\text{मप}} = \text{भुपमक} = \text{भुड}$$

$$\frac{\text{कत}}{\text{मत}} = \text{भु तमक} = \text{भुज}$$

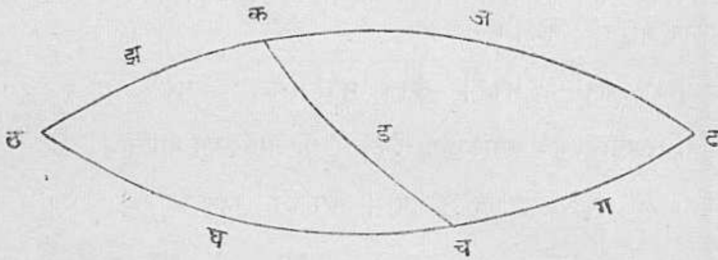
ह्या किंमती ज्याच्या त्या स्थानीं लिहिल्या म्हणजे,

$$\text{कोभुग} = \text{कोभुड.कोभुज} + \text{भुड.भुज कोभुक} \cdots\cdots (१)$$

८०. वरच्या लेखांत जो सिद्धांत सिद्ध केला त्यात क कोन करणाऱ्या बाजू वर्तुळ पादापेक्षां कमी आहेत असें मानिलें आहे. आता त्या बाजूपैकीं एक किंवा

दोन्ही वर्तुळ पादापेक्षां जास्त किंवा बरोबर असल्या तरी त्या सिद्धांतास बाध येत नाही हें येथें दाखवित आहे.

(१) क कोन करणाऱ्या दोन बाजूंपैकीं एक बाजू ९० अंशापेक्षां जास्त आहे असें घेऊं. समजा क ट म्हणजे ज बाजू वर्तुळ पादापेक्षां जास्त आहे. क च ट त्रिकोण लेखन सौकर्याकरिता आम्ही कागदाच्या पातळीवर पसरून दाखविला आहे. त्याची क च म्हणजे ड बाजू वर्तुळ पादापेक्षां कमी असून क ट वर्तुळ पादापेक्षां जास्त आहे. ट क आणि ट च ह्या दोन्ही वाढविल्या त्या ठ बिंदूत एकमेकीस मिळाल्या. तेव्हा लेख ७५ प्रमाणे ही तिमी आहे. हिचे दोन गोलीय त्रिकोण झाले आहेत.



पैकी क च ट हा दिलेला त्रिकोण विचारांत न घेता क ठ च हा त्रिकोण विचारांत घेऊं. ह्या त्रिकोणाचा ठ क च कोन क ठ, क च ह्या बाजू (वर्तुळ पादापेक्षां कमी असलेल्या) ह्यास वरच्या लेखातील सिद्धता लागू आहे म्हणून

कोभुघ = कोभुझ.कोभुड + भुझ.भुड.कोभुठकच. पण लेख ७५ प्रमाणे

$$\text{कोभुघ} = \text{कोभु}\ (१८०^\circ - \text{ग}) = -\text{कोभुग}$$
$$\text{कोभुझ} = \text{कोभु}\ (१८०^\circ - \text{ज}) = -\text{कोभुज}$$
$$\text{कोभु ठकच} = \text{कोभु}\ (१८०^\circ - \text{क}) = -\text{कोभुक}$$
$$\text{भुझ} = \text{भु}\ (१८०^\circ - \text{ज}) = \text{भुज}$$

ह्या किंमती वरच्या समीकरणांत ठेविल्या तर,

$$-\text{कोभुग} = (-\text{कोभुज}) \times \text{कोभुड} + \text{भुज} \times \text{भुड} \times (-\text{कोभुक})$$
$$\text{कोभुग} = \text{कोभुज.कोभुड} + \text{भुज.भुड.कोभुक}.$$

ह्याच सिद्धतेप्रमाणें सिद्ध करिता येते कीं त्रिकोणाच्या बाजू लहान मोठ्या असल्या तरी हा सिद्धांत सिद्ध आहे.

वरचा सिद्धांत क कोनासंबंधी सिद्ध केला. तो प्रत्येक कोनासंबंधी वरच्याच पद्धतीनें सिद्ध होतो.

८१. लेख ७८ मध्ये ध्रुवक त्रिकोणाची व्याख्या व धर्म सांगितले आहेत. कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाला ध्रुवक त्रिकोण असतोच आणि ध्रुवक त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन मूळ त्रिकोणाचे अनुक्रमे कोन व बाजू एकमेकांचे पूरक असतात. म्हणजे गोलीय त्रिकोणाची बाजू आणि त्या बाजूचा ध्रुव बिंदुस्थळीं असलेला ध्रुवक त्रिकोणाचा कोन याची बेरीज १८० अंश असते. वरच्या लेखांत गोलीय त्रिकोणाच्या एका कोनाच्या कोभुजज्येचे सिद्धांत सिद्ध केले तेच सिद्धांत ध्रुवक त्रिकोणाच्या धर्माच्या सहाय्यानें एका बाजूच्या कोभुजज्येच्या रूपाचे सिद्ध होतात. त्यावरून—

$$\text{कोभुग} = \text{कोभु}\ (\pi - \text{ख}) = -\ \text{कोभुख}$$

$$\text{कोभुज} = \text{कोभु}\ (\pi - \text{छ}) = -\ \text{कोभुछ}$$

$$\text{कोभुड} = \text{कोभु}\ (\pi - \text{ठ}) = -\ \text{कोभुठ}$$

$$\text{कोभुक} = \text{कोभु}\ (\pi - \text{घ}) = -\ \text{कोभुघ}$$

$$\text{भुज} = \text{भु}\ (\pi - \text{छ}) = +\ \text{भुछ}$$

$$\text{भुड} = \text{भु}\ (\pi - \text{ठ}) = +\ \text{भुठ}$$

लेख ७८ मध्ये खछठ हा ध्रुवक त्रिकोण आहे तो आपण मूळ त्रिकोण समजून वरच्या लेखांतील कोनाच्या कोभुजज्येच्या समीकरणाचें स्वरूप लिहूं तें असें,

$$\text{कोभुघ} = \text{कोभुढ.कोभुझ} + \text{भुछ.भुझ कोभुख}$$

ह्या समीकरणात वर लिहिलेली बरोबरीची पदें लिहूं.

$$-\ \text{कोभुक} = \text{कोभुट.कोभुच} + \text{भुट.भुच}(-\ \text{कोभुग})$$

चिन्ह बदलून

$$\text{कोभुक} = -\text{कोभुट.कोभुच} + \text{भुट. भुच कोभुग}$$

ह्याप्रमाणेच इतर सिद्धांत सिद्ध करता येतात.

८२. वरच्या दोनतीन लेखांत जे सिद्धांत सिद्ध केले ते खालीं एकत्र लिहिले आहेत आणि ते कोणत्याही गोलीय त्रिकोणास लागू आहेत :—

$$\text{कोभुग} = \text{कोभुज कोभुड} + \text{भुज भुड कोभुक} \quad \cdots (१)$$

$$\text{कोभुज} = \text{कोभुग कोभुड} + \text{भुग भुड कोभुच} \quad \cdots (२)$$

$$\text{कोभुड} = \text{कोभुज कोभुग} + \text{भुज भुग कोभुट} \quad \cdots (३)$$

$$\text{कोभुक} = -\text{कोभुच कोभुट} + \text{भुच भुट कोभुग} \quad \cdots \quad (४)$$

$$\text{कोभुच} = -\text{कोभुक कोभुट} + \text{भुक भुट कोभुज} \quad \cdots \quad (५)$$

$$\text{कोभुट} = -\text{कोभुच कोभुक} + \text{भुच भुक कोभुड} \quad \cdots \quad (६)$$

८३. गोलीय त्रिकोणाच्या कोनांच्या भुजज्या त्या कोनासमोरील बाजूंच्या भुजज्येशी प्रमाणांत असतात.

वरच्या लेखातील समीकरण (१) वरून

$$\text{कोभुक} = \frac{\text{कोभुग} - \text{कोभुज कोभुड}}{\text{भुज. भुड}}$$

$$\text{भु}^2\text{क} = १ - \frac{(\text{कोभुग} - \text{कोभुज कोभुड})^2}{\text{भु}^2\text{ज भु}^2\text{ड}}$$

$$= \frac{\text{भु}^2\text{ज भु}^2\text{ड} - (\text{कोभुग} - \text{कोभुज कोभुड})^2}{\text{भु}^2\text{ज भु}^2\text{ड}}$$

$$\text{भु}^2\text{क} = \frac{(१ - \text{कोभु}^2\text{ज})(१ - \text{कोभु}^2\text{ड}) - (\text{कोभुग} - \text{कोभुज कोभुड})^2}{\text{भु}^2\text{ज भु}^2\text{ड}}$$

$$\text{भु}^2\text{कभु}^2\text{जभु}^2\text{ड} = \begin{cases} १ - \text{कोभु}^2\text{ज} - \text{कोभु}^2\text{ड} + \text{कोभु}^2\text{ज कोभु}^2\text{ड} \\ - \text{कोभु}^2\text{ग} + २\,\text{कोभुग कोभुज कोभुड} - \text{कोभु}^2\text{ज कोभु}^2\text{ड} \end{cases}$$

$$= १ - \text{कोभु}^2\text{ग} - \text{कोभु}^2\text{ज} - \text{कोभु}^2\text{ड} = २\,\text{कोभुग कोभुज कोभुड}$$

$$\frac{\text{भु}^2\text{क}}{\text{भु}^2\text{ग}} = \frac{१ - \text{कोभु}^2\text{ग} - \text{कोभु}^2\text{ज} - \text{कोभु}^2\text{ड} + २\,\text{कोभुग कोभुज कोभुड}}{\text{भु}^2\text{ग भु}^2\text{ज भु}^2\text{ड}}$$

ह्याचप्रमाणे $\frac{\text{भु}^2\text{च}}{\text{भु}^2\text{ज}}$ किंवा $\frac{\text{भु}^2\text{ट}}{\text{भु}^2\text{ड}}$ ची किंमत काढिली तर उजवीकडचा अपूर्णांक निव्वळ सारखा येतो म्हणून,

$$\frac{\text{भु}^2\text{क}}{\text{भु}^2\text{ग}} = \frac{\text{भु}^2\text{ज}}{\text{भु}^2\text{ज}} = \frac{\text{भु}^2\text{ट}}{\text{भु}^2\text{ड}}$$

वर्गमूळ काढिले तर,

$$\frac{\text{भुक}}{\text{भुग}} = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}} = \frac{\text{भुट}}{\text{भुड}} \quad (७)$$

म्हणून गोलीय त्रिकोणाच्या कोनांच्या भुजज्या त्या कोनासमोरील बाजूंच्या भुजज्येशीं प्रमाणांत असतात.

८४. गोलीय त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन यांचा एकमेकांशी असलेला संबंध दाखविणारे कोस्पर्शरेषात्मक सिद्धांत.

लेख ८२ मधील (१) हा सिद्धांत पहा.

कोभुग = कोभुड कोभुज + भुड. भुज कोभुक.

ह्या समीकरणास भुग.भुज ने भागिलें,

$$\frac{\text{कोभुग}}{\text{भुग भुज}} = \frac{\text{कोभुड कोभुज}}{\text{भुग भुज}} + \frac{\text{भुड}}{\text{भुग}} \times \text{कोभुक} \cdots (\text{अ})$$

$$\frac{\text{भुक}}{\text{भुग}} = \frac{\text{भुट}}{\text{भुड}}$$

तेव्हा भुक × भुड = भुग × भुट

ह्या बरोबरीला भुक × भुग ने भागिले तेव्हां,

$$\frac{\text{भुड}}{\text{भुग}} = \frac{\text{भुट}}{\text{भुक}}$$

ह्यास कोभुक नें गुणिलें तर,

$$\frac{\text{भुड}}{\text{भुग}} \times \text{कोभुक} = \frac{\text{भुट}}{\text{भुक}} \times \text{कोभुक} = \text{भुट कोस्पक} \cdots (\text{ब})$$

लेख ८२, समीकरण (३) ह्यास $\frac{\text{कोभुज}}{\text{भुग.भुज}}$ ह्या पदानें गुणिलें.

कोभुड = कोभुज कोभुग + भुज भुग कोभुट

$$\frac{\text{कोभुड कोभुज}}{\text{भुज. भुग}} = \text{कोभु}^{2}\text{ज} \ \frac{\text{कोभुग}}{\text{भुग भुज}} + \text{कोभुज कोभुट} \cdots (\text{क})$$

(अ) समीकरणातील उजवीकडचे पेटचातील पदांच्या किंमती (ब) आणि (क) ह्या समीकरणात आहेत त्या (अ) समीकरणात ठेवू.

$$\frac{\text{कोभुग}}{\text{भुग. भुज}} = \text{कोभु}^{2}\text{ज} \ \frac{\text{कोभुग}}{\text{भुग . भुज}} + \text{कोभुट कोभुज} + \text{भुट कोस्पक}$$

$$\frac{\text{कोस्पग}}{\text{भुज}} - \text{कोभु}^{2}\text{ज} \ \frac{\text{कोस्पग}}{\text{भुज}} = \text{कोभुट कोभुज} + \text{भुट कोस्पक.}$$

$$\frac{\text{कोस्पग}}{\text{भुज}} (१ - \text{कोभु}^{2}\text{ज}) = \text{कोभुट कोभुज} + \text{भुट कोस्पक}$$

कोस्पग भुज = कोभुट कोभुज + भुट कोस्पक.

हा जो सिद्धांत सिद्ध केला ह्याप्रमाणेंच आणखी दोन सिद्धांत सिद्ध होतात. आणि ध्रुवक त्रिकोणाच्या धर्मानें आणखी तीन सिद्धांत सिद्ध होतात.

८५. वरच्या दोन लेखांत सिद्ध केलेले सहा सिद्धांत खालीं दिले आहेत :—

कोस्पग भुज = कोभुट कोभुज + भुट कोस्पक ·· ·· (८)

कोस्पज भुग = कोभुट कोभुग + भुट कोस्पच ·· (९)

कोभुज भुड = कोभुक कोभुड + भुक कोस्पच ·· (१०)

कोस्पड भुज = कोभुक कोभुज + भुक कोस्पट ·· (११)

कोस्पड भुग = कोभुच कोभुग + भुच कोस्पट ·· (१२)

कोस्पग भुड = कोभुच कोभुड + भुच कोस्पक ·· (१३)

८६. गोलीय त्रिकोणमितीचे आणखी कांहीं सिद्धांत सिद्ध होतात ते खाली सिद्ध केलें आहेत :—

लेख ८३ मधील सिद्धांत पहा.

$$\frac{\text{भुक}}{\text{भुग}} = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}}$$

म्हणजे भुक : भुग :: भुच : भुज

मध्य विनिमयाने भुक : भुच :: भुग : भुज

उपाग्र संयोगाने भुक + भुच : भुच :: भुग + भुज : भुज

$$\text{भुक} + \text{भुच} = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}} (\text{भुग} + \text{भुज}) \qquad (\text{अ})$$

ह्याचप्रमाणे उपाग्रवियोगानें.

$$\text{भुक} - \text{भुच} = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}} (\text{भुग} - \text{भुज}) \qquad (\text{ब})$$

लेख ८२ मधील समीकरण (४) व (५) वरून

$$\begin{aligned}\text{कोभुक} + \text{कोभुच} &= - \text{कोभुच कोभुट} - \text{कोभुक कोभुट} \\ &\quad + \text{भुचभुट कोभुग} + \text{भुकभुट कोभुग} \\ &= - (\text{कोभुच} + \text{कोभुक})\ \text{कोभुट} \\ &\quad + (\text{भुच कोभुग} + \text{भुक कोभुज})\ \text{भुट}\end{aligned}$$

$$(१ + \text{कोभुट})(\text{कोभुक} + \text{कोभुच}) = \text{भुट} (\text{भुचकोभुग} + \text{भुककोभुज})$$

$$(\text{कोभुक} + \text{कोभुच}) = \frac{\text{भुट}}{१ + \text{कोभुट}} \, (\text{भुच कोभुग} + \text{भुक कोभुज}) \quad (\text{क})$$

लेख ६२, समीकरण (९) व (१०) हयांस (११) नें भागिलें तर

$$\frac{\text{भुअ} + \text{भुब}}{\text{कोभुअ} + \text{कोभुब}} = \text{स्प} \, \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}$$

$$\text{आणि} \quad \frac{\text{भुअ} - \text{भुब}}{\text{कोभुअ} + \text{कोभुब}} = \text{स्प} \, \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२}$$

$$\text{म्हणून} \; \frac{\text{भुक} + \text{भुच}}{\text{कोभुक} + \text{कोभुच}} = \text{स्प}\tfrac{१}{२}(\text{क} + \text{च}) \; \text{आणि} \; \frac{\text{भुक} - \text{भुच}}{\text{कोभुक} + \text{कोभुच}} = \text{स्प}\tfrac{१}{२}(\text{क} - \text{च})$$

समीकरण (अ) आणि (ब) हयास (क) नें प्रत्येकीं भागिलें असतां डावीकडे जे पेटे येतात त्यांच्या किंमती तयार केल्या आहेत, पण उजवीकडच्या पेटयांचें स्पष्टीकरण करावयाचें आहे.

$$\text{स्प} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{क} + \text{च}) = \frac{\text{भुच}}{\text{भुज}} \, \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भुच कोभुग} + \text{भुक कोभुज}} \times \frac{१ + \text{कोभुट}}{\text{भुट}}$$

$$= \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भुज कोभुग} + \text{भुज} \, \dfrac{\text{भुक}}{\text{भुच}} \, \text{कोभुज}} \times \frac{१ + \text{कोभुट}}{\text{भुट}}$$

$$\text{पण भुज} \, \frac{\text{भुक}}{\text{भुच}} \, \text{कोभुज} = \text{भुग कोभुज}$$

$$\text{आणि भुग कोभुज} + \text{भुज कोभुग} = \text{भु}(\text{ग} + \text{ज})$$

$$\text{तसेंच} \; \frac{१ + \text{कोभुट}}{\text{भुट}} = \frac{२ \, \text{कोभु}^{२}\tfrac{\text{ट}}{२}}{२ \, \text{भु}\tfrac{\text{ट}}{२} \, \text{कोभु}\tfrac{\text{ट}}{२}} = \frac{\text{कोभु}\tfrac{\text{ट}}{२}}{\text{भु}\tfrac{\text{ट}}{२}} = \text{कोस्प}\tfrac{\text{ट}}{२}$$

$$\text{स्प} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{क} + \text{च}) = \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भु} \, (\text{ग} + \text{ज})} \, \text{कोस्प}\tfrac{\text{ट}}{२}$$

$$\text{तथापि} \; \frac{\text{भुग} + \text{भुज}}{\text{भु} \, (\text{ग} + \text{ज})} = \frac{२ \, \text{भु} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{ग} + \text{ज}) \times \text{कोभु} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{ग} - \text{ज})}{२ \, \text{भु} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{ग} + \text{ज}) \times \text{कोभु} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{ग} + \text{ज})}$$

$$\text{म्हणून स्प} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{क} + \text{च}) = \frac{\text{कोभु} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{ग} - \text{ज})}{\text{कोभु} \, \tfrac{१}{२} \, (\text{ब} + \text{ज})} \times \text{कोस्प} \, \tfrac{\text{ट}}{२} \ldots\ldots (१४)$$

$$\text{आणि}\ \frac{\text{भुग} - \text{भुज}}{\text{भु}\ (\text{ग} + \text{ज})} = \frac{२\ \text{भु}\ \frac{१}{२}\ (\text{ग} - \text{ज})\ \text{कोभु}\ \frac{१}{२}\ (\text{ग} + \text{ज})}{२\ \text{भु}\ \frac{१}{२}\ (\text{ग} + \text{ज})\ \text{कोभु}\ \frac{१}{२}\ (\text{ग} + \text{ज})}$$

$$\text{म्हणून स्प}\ \tfrac{१}{२}(\text{क} - \text{च}) = \frac{\text{भु}\ \frac{१}{२}\ (\text{ग} - \text{ज})}{\text{भु}\ \frac{१}{२}\ (\text{ग} + \text{ज})} \times \text{कोस्प}\ \frac{\text{ट}}{२} \ldots\ldots (१५)$$

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करतां येतें कीं,

$$\text{स्प}\ \tfrac{१}{२}\ (\text{ग} + \text{ज}) = \frac{\text{कोभु}\ \frac{१}{२}\ (\text{क} - \text{च})}{\text{कोभु}\ \frac{१}{२}\ (\text{क} + \text{च})}\ \text{स्प}\frac{\text{ड}}{२} \ldots\ldots\ldots (१६)$$

$$\text{आणि स्प}\ \tfrac{१}{२}\ (\text{ग} - \text{ज}) = \frac{\text{भु}\ \frac{१}{२}\ (\text{क} - \text{च})}{\text{भु}\ \frac{१}{२}\ (\text{क} + \text{च})}\ \text{स्प}\frac{\text{ड}}{२} \ldots\ldots\ldots (१७)$$

८७. गोलीय त्रिकोणमितीचे एथपर्यंत जे सिद्धांत सिद्ध केले ते कोणत्याही त्रिकोणासंबंधीं सत्य आहेत अशा प्रकारें सिद्ध केले आहेत. तेव्हां काटकोन त्रिकोणाचाही त्यांत समावेश होत आहे. म्हणून वरच्या प्रत्येक सिद्धांतात ट कोन काटकोन आहे असें मानिल्यानें काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यामध्ये असणाऱ्या संबंधाचे सिद्धांत कळून येतात. ज्या सिद्धांतात ट कोन येईल तेथें त्याची भुजज्या १ घ्यावी आणि कोभुजज्या ० घ्यावी, म्हणजे तो सिद्धांत काटकोन त्रिकोणास लागू होईल. ते सिद्धांत खाली दाखविले आहेत. वरच्या १७ सिद्धांतापैकीं ज्या सिद्धांतावरून काटकोन त्रिकोणाचा सिद्धांत तयार होतो त्याचा क्रमांक पूर्वीं देऊन त्यापुढें तो सिद्धांत लिहिला आहे.

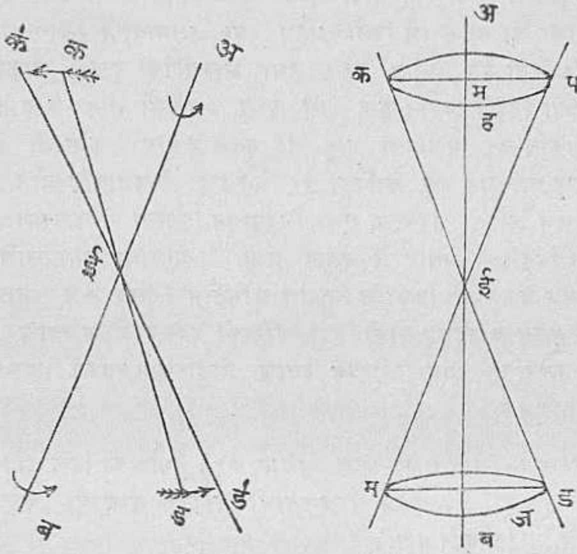
(३)	कोभुड	=	कोभुज.कोभुग … … …	(१)
(४)	कोभुक	=	भुच.कोभुग … … …	(२)
(५)	कोभुच	=	भुक.कोभुज … … …	(३)
(६)	कोभुड	=	कोस्पच.कोस्पक… … …	(४)
(७)	भुग	=	भुक.भुड … … …	(५)
(७)	भुज	=	भुच.भुड … … …	(६)
(८)	स्पग	=	भुज.स्पक … … …	(७)
(९)	स्पज	=	भुग.स्पच … … …	(८)
(११)	स्पज	=	कोभुक.स्पड … … …	(९)
(१२)	स्पग	=	कोभुच.स्पड … … …	(१०)

प्रकरण सहावें

गणित शास्त्रांतील प्रमुख सिद्धांत

वर्तुळ शंकुच्छिन्न

८८. एक अमर्याद सरळ रेषा आहे, ही रेषा दिशांतर न करितां स्वतां सभोवतीं भ्रमण करीत आहे. ह्या रेषेतील एका बिंदूमधून दुसरी एक सरळ रेषा गेली आहे. ही रेषा पूर्व रेषेला बद्ध अशी आहे, यास्तव पूर्व रेषेच्या भ्रमणानें ती तिच्या सभोवती फिरते. ही रेषा पूर्व रेषेवर लंब नाहीं लघुकोन करणारी आहे. ह्या रेषा फिरण्यानें जी घनाकृति उत्पन्न होते तिला 'शंकु' म्हणतात. हा डमरूच्या आकाराचा दोन शंकु एकत्रित असा होतो. खालील आकृतीत अब ही स्वतां सभोवती फिरणारी रेषा हिला कईफ किंवा डईग शंकूचा आंस म्हणतात. कईड ही बद्ध रेषा हिच्या फिरण्यानें शंकु उत्पन्न झाले आहेत. कईड मधील क बिंदूतून जाणारी आणि अब रेषेवर म्हणजे आंसावर लंब अशा पातळीनें शंकु कापिला असतां कहफ आकृति उत्पन्न होते. ह्या आकृतीला शंकुच्छिन्न म्हणतात. ह्या च्छिन्नानें झालेली कहफ आकृति ही वर्तुळ आहे.



कारण म मध्य करून कम त्रिज्येनें हें वर्तुळ निघालें आहे. कहफ वर्तुळास किंवा गजड वर्तुळास शंकुचा पाया म्हणतात. ई बिंदु दोन्ही शंकूचा शिरोबिंदु आहे.

८९. (१) कईड ह्या बद्ध रेषेशीं, तिच्या कोणत्याहि स्थितींत, तिच्याशीं समांतर अशा सरळ पातळीनें शंकूला छेदिलें असतां जी आकृति उत्पन्न होते त्या आकृतीला 'परवलय' असें म्हणतात.

(२) सरळ पातळी, दोहोंपैकीं एकाच शंकूला छेदिते ती अशी कीं, आसाशी काटकोन न करितां व समांतर नसतां तिर्यकोण करिते आणि कईड ह्या बद्ध रेषेच्या सर्व स्थितींना छेदिते (सर्व पृष्ट वेधाना छेदिते) अशा छेदनानें जी आकृति उत्पन्न होते तिला 'दीर्घवलय' (किंवा दीर्घवर्तुळ) म्हणतात.

(३) आंसाशी समांतर अशा सरळ पातळीनें दोन्ही शंकु कापिलें तेव्हां, ई ला ई ह्या शिरोबिंदूच्या दोहीकडे जी दोन च्छिन्नें होतात (त्याची दोही मिळून एकच आकृति) त्यांना 'उद्वलय' म्हणतात.

९०. वरच्या लेखांत ज्या शंकुच्छिन्नाकृति लिहिल्या आहेत त्यांचा विचार ज्योतिःशास्त्रांत फार महत्त्वाचा आहे. गतिशास्त्राचा सामान्यत्वें विचार करितांना परवलय, दीर्घवलय आणि उद्वलय तिहिंचा विचार करावा लागतो, पण ग्रहांच्या गतीचा विचार करितांना दीर्घ वलयाकृती चिंतनीय असते. ह्या तिन्ही आकृतींची जी वर लक्षणें दिलीं आहेत त्या लक्षणांवरून त्यांच्याविषयींचे सिद्धांत सिद्ध करितां येत नाहींत, परंतु ह्या आकृतींपैकीं प्रत्येक आकृति एका विशेष प्रकारच्या बिंदूचें निधान आहे असें ठरते. वरच्या तीन आकृतिशिवाय चवथी एक आकृति वर दाखविली आहे ती वर्तूळ हे होय. आंसाशी काटकोन करणाऱ्या सरळ पातळीनें शंकु कापिला तर वर्तुळ ही च्छिन्नाकृति होते. तेंही एक बिंदुनिधानच आहे. 'दिलेल्या एका बिंदूपासून दिलेल्या रेषेइतक्या अंतरा-वर असणाऱ्या बिंदूचें जे निधान तें वर्तुळ होय.' वर्तुळाला ह्याप्रमाणे बिंदु-निधानाचें स्वरूप देऊन त्या विषयींचे सिद्धांत भूमितीमध्यें सिद्ध केलें त्याप्रमाणेंच परवलय, दीर्घवलय व उद्वलय यांची बिंदुनिधानाचीं स्वरूपें घेऊन त्यांचे सिद्धांत सिद्ध करावें लागतात. यासाठीं प्रथम त्याची बिंदुनिधान स्वरूपें काय आहेत तीं ठरविलीं पाहिजेत.

९१. परवलय—याचे लक्षण लेख मधील (१) ह्या अंकीं दिलें आहे. त्या लक्षणाप्रमाणें शंकूचा छेद करून परवलयाची आकृति खालच्या आकृतिमध्ये दाखविली आहे. (आकृति पहा.)

ईसड हा शंकु आहे. दुसरा शंकु ह्या आकृतींत दाखविला नाहीं. क्षमपन ही छेदक सरळ पातळी आहे. ही पातळी ईफक्ष ह्या पृष्ट वेधाशी समांतर अशी आहे. ह्या पातळीनें शंकूला छेदिल्यामुळें होणाऱ्या च्छिन्नाचा शभप हा भाग दिसत आहे. हा भाग परवलयाचा आहे तेव्हां परवलयाच्या वक्र रेषेंत कोणते गुण आहेत हें पाहूं.

(१) ह्या आकृतीत ईस हा शंकूचा आंस आहे. आणि त्या आंसावर लंब

असणारी दसड रेषा आहे. ह्या रेषांमधून जाणाऱ्या सरळ पातळीन हा शंकू कापिला असतां आपणांकडील त्याचा अर्धा भाग आकृतीत दाखविलेला दिसत आहे. दपड हें अर्ध वर्तुळ शंकूच्या वर्तुळ पायाचे अर्ध आहे. इस आणि दसड ह्या रेषा कागदाच्या पातळींत आहेत. शंकूचा कागदाच्या पलीकडचा अर्धा भाग आकृतींत दाखविलेला नाहीं.

(२) जोड शंकुपैकीं एक संपूर्ण शंकु ईद रेषेशीं समांतर असणाऱ्या आणि कागदाच्या पातळीवर लंब असणाऱ्या, सरळ पातळीनें छेदिला आहे. ह्या छेदक

पातळीतील शनह ही एक रेषा आहे. ही शनह रेषा कागदाची पातळी व छेदक पातळी ह्या दोन्ही पातळ्यांची छेदक रेषा आहे. ही रेषा ईद म्हणजे शंकूचा पृष्ट वेध ह्याशी समांतर आहे. शभप ही छिन्नाकृति परवलयाची आहे.

(३) ईशन हा कोन दुभागला आणि दुभागणारी रेषा ईस रेषेला मिळेपर्यंत वाढविली ती ध बिंदूने ईस आंसाला मिळाली. ध बिंदूतून शन वर धक लंब काढिला. कध ईदला मिळेपर्यंत वाढविली, ती फ बिंदूत ईहला मिळाली. ध मध्य करून धफ त्रिज्येनें फगक वर्तुळ काढिलें, हें वर्तुळ ईद, ईड आणि शन ह्या तिन्ही रेषांस स्पर्श करीत आहे. हें वर्तुळ ईस आंसासभोंवती फिरल्यानें गोल बनला आहे व तो शंकूच्या वक्रपृष्टाला आंतून स्पर्श करीत आहे. त्या स्पर्श करणाऱ्या बिंदूचे फलग वर्तुळ बनते. ह्या वर्तुळाची पातळी, दपड ह्या पायाच्या वर्तुळांच्या पातळीशी समांतर आहे.

(४) शन रेषा दड रेषेला न बिंदूत मिळते. न बिंदू कागदाच्या पातळींत आणि छदल पातळींतही आहे. छदक पातळीनें पायाच्या दपड वर्तुळाला प बिंदूत छेदिलें आहे. पन बिंदु सांधले. पन ही रेषा लंब पातळींत असल्यामुळें दड रेषेंवर लंब आहे. फग आणि नश ह्या वाढविल्या. त्या क्ष बिंदूत एकमेकीस मिळतात. क्ष बिंदूपासून फक्ष रेषेवर क्षम लंब काढिला. अर्थात क्षम रेषा नपभ ह्या म्हणजे छेदक पातळींतच असली पाहिजे.

(५) क्षमशी पम समांतर काढिली तेव्हां क्षनपम हा समांतर भुज चौकोन झाला. म्हणून

पम = नक्ष = दफ. [कारण दफक्षम समांतर भु. चौ.]

ईदड शंकु हा ईद ह्या बद्ध रेषेच्या भ्रमणानें उत्पन्न झाला आहे. द बिंदू प बिंदूपर्यंत भ्रमण करीत आला तर फ बिंदु ल स्थानीं येईल, आणि द बिंदु ड स्थानीं आला तर फ बिंदु ग स्थानीं येईल यावरून

दफ = पल = डग

प बिंदूपासून ध गोलाला पक पल ह्या दोन स्पर्श रेषा काढिल्या आहेत त्या परस्पर समान आहेत. म्हणून

पम = पक.

पनक्ष हा कोन काटकोन आहे म्हणून पनक्षम हा काटकोन चौकोन आहे, म्हणून पम ही रेषा क्षम वर लंब आहे.

(६) प बिंदु दपड ह्या पायाच्या वर्तुळाच्या परीघावरचा बिंदु असून शभप ह्या परवलयाच्या वक्र रेषेवर आहे. दपड पाया ई बिंदुकडे नेला तर प बिंदुही

तिकडे सरेल. (श बिंदुपर्यंतच ई कडे सरेल) ह्यावरून ठरते कीं, प बिंदू-पासून क बिंदुपर्यंत अंतर हें प पासून क्षम वर टाकलेल्या लंबाइतके असते. ह्यावरून ठरते कीं, प बिंदु शभप ह्या परवलयांच्या वक्र रेषेवर कोठेही असो

पक = पम

ह्या विवरणांतील बिंदु रेषादिकांची नामावली खाली दिल्याप्रमाणें आहे :—

क बिंदु = परवलयाचें केंद्र, पम रेषा = कोटी,
श बिंदु = ,, चा शिरोबिंदु, पन रेषा = भुज,
शकन रेषा = ,, चा अक्ष, पक रेषा = केंद्रांतर किंवा केंद्र ग त्रिज्या.
क्षम रेषा = ,, ची नायिका, ध गोल = केंद्रीय गोल.
शन रेषा = ,, चीच्छिन्न मध्यरेषा.

बिंदुनिधान.

९२. बिंदुनिधान म्हणजे अमुक प्रकारच्या बिंदूंचा सांठा. परवलय हे रेषाकृति, बिंदुनिधान आहे. "केंद्र आणि नायिका ह्यापासून समान अंतरावरच्या बिंदूंचें निधान 'परवलय' हें आहे."

यांत्रिक पद्धतीनें परवलयाची आकृति कशी काढितां येते तें खालीं दाखविलें आहे :—

य
म
ख
प
न
भ
भ$_3$
भ$_2$
क्ष
श
क

क हें केंद्र आणि क्षम ही नायिका दिली आहे. तर परवलय काढा. यमख हा गुण्या आहे. मख इतक्या लांबीचा रेशमी दोरा ख ठिकाणीं पक्का बांधिला आहे. व त्याचें दुसरें टोक क ठिकाणीं पक्के बांधिलें आहे. प ही पेन्सिल दोऱ्याला दाबून गुण्याला चिटकून धरली आहे. गुण्याची दुसरी मय बाजू नायिकेला चिकटून वर सारली म्हणजे श भ प ही परवलयाची आकृति तयार होते.

ह्या आकृतीत कप = पम; कभ = भन; आहे म्हणजे प बिंदूचें नायिकेचे अंतर (रेषा आणि बिंदु यांमधील अंतर म्हणजे त्या बिंदूपासून त्या रेषेवरचा लंब) पम आणि केंद्रांतर पक समान आहे. याप्रमाणे भ $भ_१$ $भ_२$ या बिंदूंचें केंद्रांतर व नायिकांतर समान आहे. यावरून $शभ_२$-$भ_१$ ही रेषा नायिका व केंद्र यापासून समान अंतर असणाऱ्या बिंदूंचे निधान आहे.

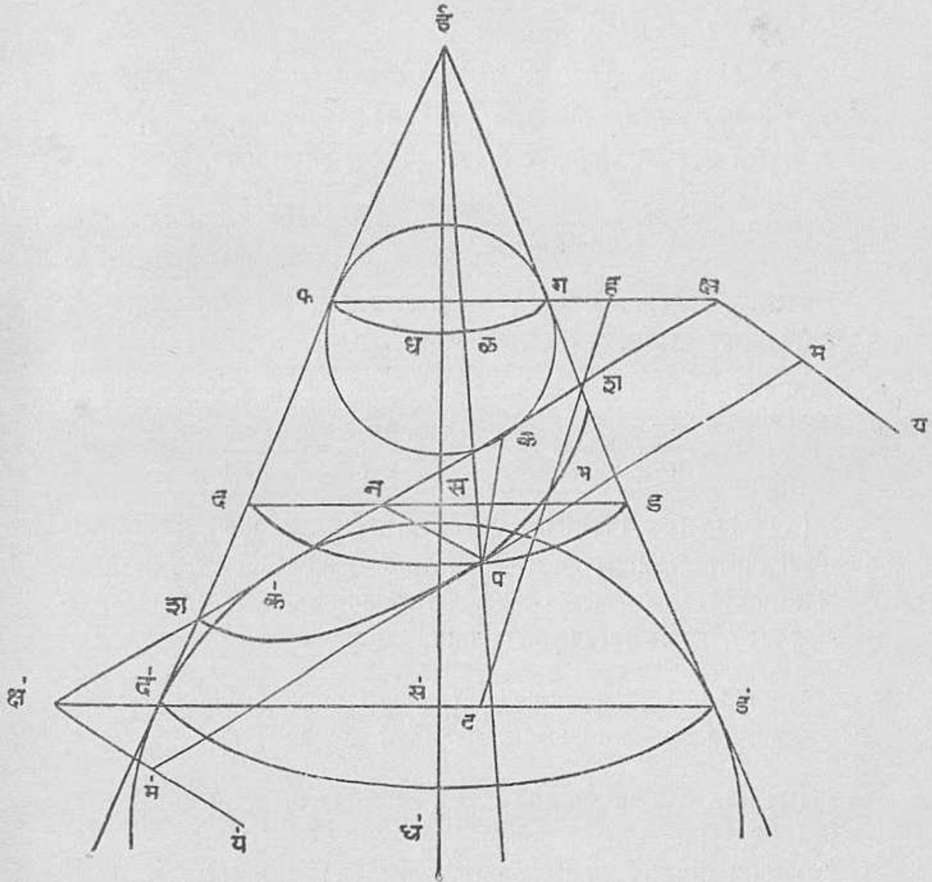
९३. परवलयाचे अनेक सिद्धांत आहेत ते पुढें सिद्ध करावयाचे आहेत. ह्या शंकुच्छिन्नाचे आधारभूत लक्षण वर सिद्ध केले आहे, तसेच दीर्घवलय आणि उद्वलय यांचीं लक्षणें सिद्ध करावयाचीं आहेत. तीं शंकुच्छिन्नेंही बिंदूंचीं निधानेंच आहेत. ह्याचें स्पष्टीकरण खाली करीत आहे.

९४. दीर्घवलय.—याचें लक्षण लेख ८९ मध्ये (२) ह्या अंकीं दिलें आहे. त्या लक्षणाप्रमाणें शंकूचा छेद करून दीर्घवलयाची आकृति खालच्या आकृतीमध्यें दाखविली आहे. (आकृति पहा.)

ईदड हा शंकु आहे, दुसरा शंकु ह्या आकृतींत दाखविला नाहीं. क्षमम' क्ष' ही छेदक पातळी आहे. ही पातळी आंसाशीं समांतर नाहीं आणि पृष्ट वेधाशींही समांतर नाहीं तसेंच हीं पातळीं दुसऱ्या शंकूला छेदित नाहीं, व स्पर्शही करीत नाही. ह्या पातळीनें शंकूला छेदिल्यामुळें होणाऱ्या चिन्हाचा शभपश' हा भाग दिसत आहे. हा भाग दीर्घवलयाचा दिसत आहे. तेव्हां दीर्घवलयाच्या वक्ररेषेंत कोणकोणते गुण आहेत तें सिद्ध करूं.

(१) ह्या आकृतींत ईस हा शंकूचा आंस आहे. आणि त्या आसावर लंब असणारी दसड रेषा आहे. ह्या रेषांमधून जाणाऱ्या सरळपातळीनें हा शंकु कापिला असता आपणाकडील त्याचा अर्धा भाग आकृतींत दाखविलेला दिसत आहे. दपड हें अर्धवर्तुळ शंकूच्या वर्तुळपायाचें अर्ध आहे. इस आणि दसड रेषा कागदाच्या पातळींत आहेत. शंकूचा कागदाच्या पलीकडचा अर्धा भाग आकृतींत दाखविलेला नाहीं.

(२) जोड शंकुपैकीं एक शंकु, ईस आसाशी किंवा ईद ईड पृष्ठबंधांशीं समांतर नाहीं अशा, आणि कागदाच्या पातळीवर लंब अशा, सरळपातळीने छेदिला आहे. ह्या छेदक पातळीतील शनशं ही रेषा कागदाच्या पातळीतही आहे. म्हणजे ही रेषा दोन्ही पातळ्यांची छेदकरेषा आहे, ह्या रेषेला " च्छिन्न मध्य रेषा " म्हणावें. ह्या छेदनानें छेदक पातळीवर " शभपशं " ही वक्र रेषा दिसत आहे. हा दीर्घवलयाचा अर्धा भाग आहे.



(३) लेख ९१ मधील स्पष्टीकरणांतील विभागांक (३) प्रमाणें. ध केंद्रगोल काढून क केंद्र ठरविलें. त्याप्रमाणेंच द' शं न कोन दुभागून धं केंद्र गोल काढिला आणि कं केंद्र ठरविले.

(४) लेख ९१ मधील स्पष्टीकरणांतील विभागांक (४) प्रमाणें.

(५) क्षन शीं पम समांतर केली तेव्हां

पम = नक्ष

ईदड शंकु हा ईद ह्या बद्ध रेषेच्या भ्रमणानें उत्पन्न झाला आहे. द बिंदु प बिंदुपर्यंत भ्रमण करीत आला तर फ बिंदु ल स्थानी येईल, आणि द बिंदु ड स्थानी आला तर फ बिंदु ग स्थानी येईल. ह्यावरून—

दफ = पल = डग

प बिंदूपासून घ गोलाला पक पल ह्या दोन स्पर्शरेषा काढिल्या आहेत. गोलाला त्या बाहेरील एका बिंदूपासून वाटेल तितक्या स्पर्शरेषा काढितां येतात, व त्या सर्व समान असतात म्हणून—

पल = पक

पनक्ष कोन काटकोन आहे, म्हणून पनक्षम हा काटकोन चौकोन (अर्थात समांतरभुज चौकोन) आहे. म्हणून पम ही रेषा क्षम वर लंब आहे.

ह्यावरून—

$$\frac{पक}{पम} = \frac{पल}{पम} = \frac{पल}{नक्ष} = \frac{डग}{नक्ष}$$

(६) दोन सरूप त्रिकोणांपैकीं एका त्रिकोणाच्या बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूंशीं प्रमाणांत असतात, त्या अशा प्रकारें प्रमाणांत असतात कीं, त्या प्रमाणांत समान कोना समोरच्या बाजू एकास्पद असतात. गशक्ष आणि डशन हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत कारण, गक्ष नड ह्या रेषा समांतर आहेत. तेव्हां

गक्षन कोन = शनड कोन , व शडन कोन = शगक्ष कोन; गशक्ष कोन = डशन कोन

म्हणून, गश : शक्ष :: शड : नश ······· (अ).

(७) चार राशी प्रमाणांत असले तर ते, (१) मध्य विनिमयानें प्रमाणांत असतात, (२) अग्र संयोगानें प्रमाणांत असतात, (३) उपाग्र संयोगानें प्रमाणांत असतात, (४) संयोग वियोगानें प्रमाणांत असतात, आणि (५) व्युत्क्रमणाने ही प्रमाणांत असतात. यांचीं उदाहरणें खालीं दिलीं आहेत :—

क : च : : ट : त हे चार राशी प्रमाणांत आहेत,

(१) क : ट : : च : त मध्य विनिमयानें प्रमाणांत आहेत,

(२) क + च : च : : ट + त : त अग्र संयोगानें प्रमाणांत आहेत,

(३) क : क + च : : ट : ट + त उपाग्र संयोगानें प्रमाणांत आहेत,

(४) क + च : क—च : : ट + त : ट—त सं. वियोगाने प्रमाणांत आहेत,

(५) च : क : : त : ट व्युत्क्रमणानें प्रमाणांत आहेत.

(८) विभागांक (६) मधील (अ) ह्या प्रमाणांत

गश : शक्ष : : शड : नश.

मध्य विनिमयानें गश : शड : : शक्ष : नश.

अग्र संयोगानें गश + शड : शड : : शक्ष + नश : नश.

रूप भेदानें गड : शड : : नक्ष : नश.

मध्य विनिमयानें गड : नक्ष : : शड : नश.

परंतु—

गड = पल = पक. [विभागांक (५)]

आणि नक्ष=पम.

म्हणून पक : पम : : गश : शक्ष.

रूप भेद $\frac{\text{पक}}{\text{पम}} = \frac{\text{गश}}{\text{शक्ष}} = \frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}}$ [गश = कश].

(९) शभप ह्या दीर्घ वलयाच्या वक्र रेषेवर प बिंदु कोठेंही असला तरी त्या बिंदूपासून च्छिन्नमध्य रेषेचा जो शशं भाग त्यावर लंब काढिला तर (वक्र रेषेवर प सोडून पं घेतला) तो पं नं लंब, आणि पं पासून क्षम चें लंबातर पं मं ही घेऊन वरच्याप्रमाणेंच सिद्धता केली तर—

$$\frac{\text{पं क}}{\text{पं मं}} = \frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}}$$

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, शभप शं ही दीर्घवर्तुळाची वक्र रेषा अशी आहे कीं, त्या वक्र रेषेंतील कोणत्याहि बिंदूपासून क ह्या केंद्रबिंदूचें अंतर पक आणि क्षम रेषेचें लंबांतर पम यांचें गुणोत्तर, कश : शक्ष ह्या एकाच गुणोत्तराबरोबर असतें.

येथेंही क हें केंद्र आणि क्षम ही नायिका आहे. आणि परवलयासंबंधीं रेषाबिंदूना जी नामावली योजिली तीचीच योजना दीर्घवर्तुळांतही आहे. परंतु दीर्घ वर्तुळाला दुसरे एक केंद्र आणि दुसरी एक नायिका आहे. त्याचें विवरण पुढें केलें आहे.

(१०) द' श' न कोन दुभागून दुभागणारी रेषा ईस ह्या शंकूच्या अक्षाला मिळेपर्यंत वाढविली, ती ईस ला ध' बिंदूंत मिळाली. ध' मध्य करून च्छिन्नमध्य रेषा हिला स्पर्श करणारें वर्तुळ काढिलें, वगैरे विवेचन लेख मधील स्पष्टीकरणातील विभागांक (३) प्रमाणें क' केंद्र ठरविलें. ध' केंद्र गोल ईद रेषेला द' बिंदूंत स्पर्श करितो दडशी द'ड' समांतर काढिली. शश' च्छिन्न मध्य रेषा श' कडे वाढविली ती ड'द'ला क्ष' बिंदूंत मिळाली. श'क्ष'वर क्ष'म' लंब किंवा क्षम शी समांतर केली. शमप वक्र रेषेवरील कोणत्याही प बिंदूपासून क्ष'म'वर पम' लंब केला आणि पक' सांधले. द'श'क्ष' आणि दश'न हे दोन सरूप त्रिकोण घेऊन ह्याच लेखांतील विभागांक (५) ते (९) प्रमाणे सिद्ध होते कीं—

$$\frac{\text{पक}'}{\text{पम}'} = \frac{\text{क}'\text{श}'}{\text{श}'\text{क्ष}'}$$

ह्याप्रमाणें सिद्ध होते कीं क' केंद्र आणि क्ष'म' ही नायिका आहे. ह्याप्रमाणें दीर्घ वलयाला दोन केंद्रें, दोन शिरोबिंदु आणि दोन नायिका असतात.

९५. **बृहदक्ष.**—दीर्घ वर्तुळाच्या एका शिरोबिंदूपासून दुसऱ्या शिरोबिंदूपर्यंत च्छिन्न मध्य रेषेचा जो भाग शश' त्याला त्या दीर्घ वर्तुळाचा 'बृहदक्ष' म्हणतात. बृहदक्षाचे समान दोन भाग करणारा जो बिंदू त्याला दीर्घ वर्तुळाचा मध्य म्हणतात.

संगत.—दीर्घ वर्तुळाच्या मध्याच्या एकाच अंगास असणाऱ्या केंद्र शिरोबिंदु व नायिका यास परस्परांचे संगत म्हणतात.

९६. दीर्घ वलयाच्या एका शिरोबिंदूपासून तत्संगत केंद्र व नायिका यांचीं अंतरें दुसऱ्या शिरोबिंदूपासून तत्संगत केंद्र व नायिका यांच्या अंतरांशीं अनुक्रमें समान असतात.

श ह्या शिरोबिंदूशीं क केंद्र आणि क्षय नायिका संगत आहे, आणि श' ह्या शिरोबिंदूशी क' केंद्र आणि क्ष'य' नायिका ही संगत आहेत. तर कश आणि शक्ष ही अंतरें अनुक्रमें क'श' आणि श'क्ष' ह्या अंतराशीं समान असतात. असें सिद्ध करावयाचें आहे. आकृति पहा.—

शक + कक' = शक'.

२ शक + कक' = शक' + शक.

परंतु शक' = शड' [ध' गोलांच्या स्पर्श रेषा.]

म्हणून २ शक + कक' = शड' + शक = शड' + गश = गड'.

तसेंच श'क' + कक' = श'क.

२ श'क' + कक' = श'क' + श'क.

परंतु श'क = श'फ' [ध गोलाच्या स्पर्श रेषा].

म्हणून २ श'क' + कक' = श'क' +श'क = द'श' + श'फ = द'फ.

पण गड' = फद'.

म्हणून २ शक + कक' = २ श'क' = कक'.

यास्तव शक = श'क'.

किंवा कश = क'श'.

हईद रेषेशी श बिंदूतून हशड ही समांतर रेषा काढिली. हशक्ष त्रिकोण द'श'क्ष' त्रिकोणाशीं एकरूप आहे असे सिद्ध करावयाचे आहे. फक्ष आणि ड'क्ष' ह्या समांतर रेषांस क्षक्ष' रेषा छेदिते म्हणून शक्षह कोन = श'क्ष'द' कोन आणि त्याच समांतर रेषांस ईद' रेषा छेदिते.

म्हणून क्षफद' कोन = फद'क्ष' कोन.

आणि क्षफद' कोन = क्षहश कोन [कारण हट शी फद समांतर].

म्हणून क्षहश कोन = क्ष'द'क्ष कोन.

तसेंच ईफग कोन = ईगफ कोन = शगह कोन.

पण ईफग कोन = गहश कोन [हट फद समांतर].

म्हणून शगह कोन = गहश कोन.

यास्तव शग बाजु = शह बाजु.

आतां हशक्ष आणि द'श'क्ष' ह्या दोन त्रिकोणांत पहिल्याचे शक्षह आणि शहक्ष कोन व शह बाजू हे अवयव दुसऱ्याचे श'क्ष'द' आणि श'द'क्ष' हे कोन व श'द' बाजु ह्या अवयवाशीं अनुक्रमें समान आहेत म्हणून हे दोन त्रिकोण एकरुप आहेत. यास्तव

शक्ष = श'क्ष'.

९७. दीर्घ वलयाच्या परीघावर कोठें तरी प हा एक बिंदु आहे, तर दोन्ही केंद्रांपासून जीं त्या बिंदूचीं पक पक' हीं अंतरें त्यांची बेरीज शश' ह्या बृहदक्षाबरोबर असते.

पक = पल आणि पक' = पर

पक + पक' = पल + पर = गड' = गश + शड'.

पण गश = क'श' आणि शड' = शक'.

म्हणून पक + पक' = शक' + क'श' = शश'.

शश' बृहदक्षाचे समान दोन भाग करणारा जो ध बिंदु त्यापासून बृहदक्षावरच लंब काढिला, व तो लंब दीर्घ वलयाच्या परीघाला वव' बिंदूंत मिळाला, तेव्हां ह्या वव' रेषेला दीर्घवर्तुळाचा लघ्वक्ष म्हणतात.

९८. दीर्घवर्तुळाच्या वक्ररेषेत पुढील धर्म असतात.

(१) दीर्घवर्तुळाच्या वक्ररेषेतील म्हणजे परीघांतील प्रत्येक बिंदूचें, कोणत्या एका केंद्रापर्यंत असलेलें पक अंतर आणि त्याच केंद्राशी संगत अशा नायिकेपर्यंत लंबांतर पम यांचें गुणोत्तर एकाच सम अपूर्णांक संख्येइतके असतें. म्हणजे

$$\frac{\text{पक}}{\text{पम}} = \frac{\text{प'क}}{\text{प'म}}, = \text{एक ह्या संख्येपेक्षां कमी असा अपूर्णांक.}$$

(२) दीर्घवर्तुळाच्या बृहदक्षाचा मध्य घ बिंदु ह्यापासून दोन्हीं केंद्रें समान अंतरांवर असतात, तशाच दोन्ही नायिकाही समान अंतरावर असतात.

(३) दीर्घवर्तुळाच्या वक्ररेषेतील एका बिंदूपासून दोन्ही केंद्रांपर्यंत असलेल्या अंतरांची बेरीज बृहदक्षाबरोबर असते.

बिंदु निधान

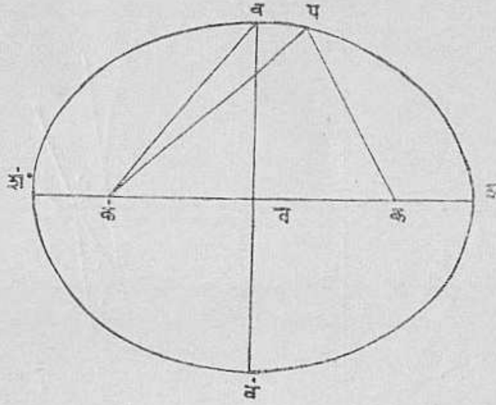
९९. दीर्घवर्तुळ हें एका प्रकारच्या बिंदुचे निधान आहे. ते असें—ज्याचा पाया एकच आहे, व त्यावर अनेक त्रिकोण काढिले आहेत, ते त्रिकोण असे आहेत की, त्याच्या पायाखेरीज इतर दोन बाजूंची बेरीज दिलेल्या (पायापेक्षा जास्त अशा) रेषेबरोबर असेल.

यांत्रिक पद्धतीने दीर्घवलयाची आकृति कशी काढिता येते ते खाली दाखविले आहे.

आकृति काढणें

श'श हा बृहदक्ष आणि क'क ही केंद्रे दिली आहेत, तर दीर्घवलय काढावयाचे. एक जाड कागदाचा तुकडा घेऊन त्यावर श'श एवढी रेषा काढा. त्या रेषेवर श'श क'क आणि घ बिंदुंच्या खुणा करा, आणि ह्या रेषेवरच कागदाच्या तुकड्याला घडी पाडा. नंतर चांगला रेशमी दोरा घेऊन सुईमध्ये ओवून त्या दोऱ्याचे एक टोक कागदाच्या तुकड्याला शिवून पक्के गुंतवा. सुईने क बिंदूत भोंक पाडून दोरा कागदाच्या तुकड्याच्या दुसऱ्या भागास काढा व क' बिंदूत भोंक पाडून दोरा पहिल्या अंगास घ्या. क'क मधील दोरा क'श + कश इतक्या

लांबीचा ठेवून दुसरें टोक कागदाच्या पट्टीला पक्के शिवा. ही कागदाची दुहेरी पट्टी श'श बृहदक्षावर जुळवा. दोन्यामध्ये पेन्सिलीचे टोक ठेवून ते श'श रेषेच्या वरच्या अंगास दोरा ढिला न पडू देता फिरवा. म्हणजे



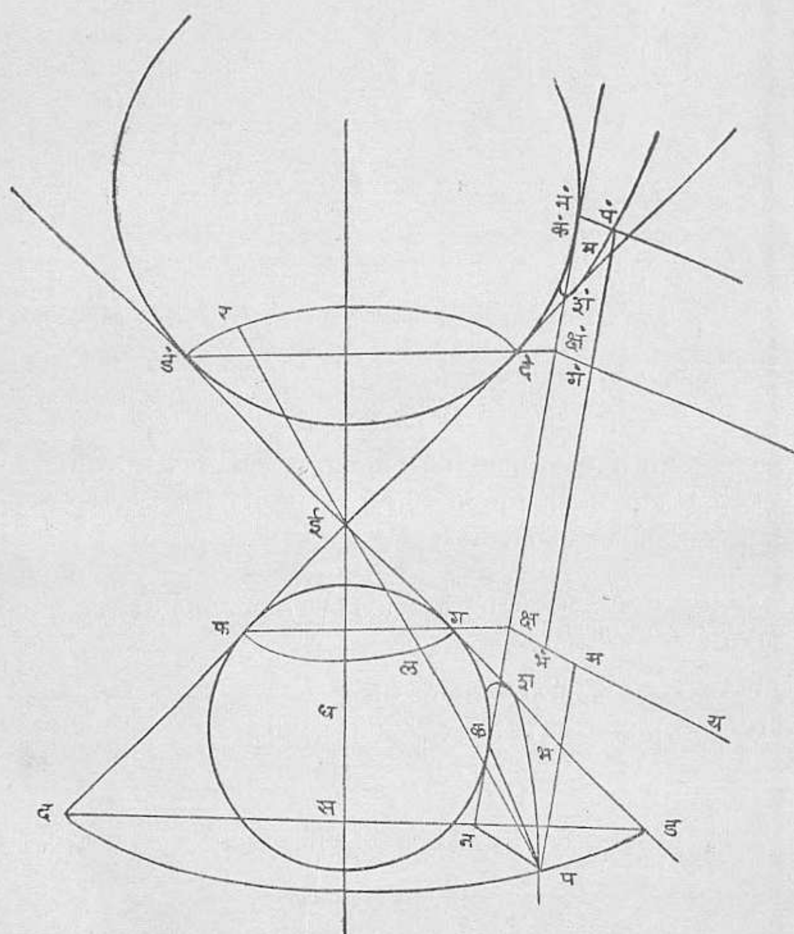
श'शच्या वरच्या अंगाचे दीर्घवलयाची आकृति तयार होईल. नंतर कागदाची दुहेरी पट्टी श'शला जुळवून खालच्या अंगाची दीर्घवलयाची आकृति काढा. म्हणजे श'वपशव' ही दीर्घवलयाची आकृति तयार होईल.

१००. लघ्वक्षाचे व टोंक आणि क केंद्र (कोणतेही) यास सांधणारी रेषा बृहदक्षाच्या (शव हृचा) अर्धा बरोबर असते.

हा सिद्धांत वरच्या आकृतीत सिद्ध झालाच आहे.

कारण वक' + वक = २ वक' = शश'

वक' = श' घ.



१०१. उद्वलय--याचें लक्षण लेख ८९ मधील (३) ह्या अंकीं दिलें आहे. त्या लक्षणाप्रमाणें शंकूचा छेद करून उद्वलयाची आकृति वरच्या आकृतीत दाखविली आहे. (आकृति पहा.)

ईदड आणि ई द' ड' हे दोन शंकूंचें युग्म आहे. क्षनपम ही छेदक पातळी आहे. ही पातळी कोणत्याही पृष्ठ वेधाशी समांतर नसून दोन्ही शंकूंला कापित आहे. नक्ष क्ष' न' ही च्छिन्नमध्यरेषा आहे. दोन्ही शंकूंला छेदिल्यामुळें शभप आणि श' भ' प' ह्या वक्ररेषा च्छिन्नाकृतीचा भाग दिसत आहे. ह्या वक्ररेषा उद्वलयाच्या आहेत. तेव्हां उद्वलयाच्या वक्ररेषांमध्ये कोणकोणते गुण आहेत तें सिद्ध करूं.

लेख ९४ मध्यें दीर्घवलयाच्या वक्ररेषेविषयीं ज्या गोष्टी सिद्ध केल्या त्याप्रमाणेंच उद्वलयाच्या वक्ररेषांसंबंधीं सिद्ध होतात. त्याच्यांत भिन्नत्व इतकेच कीं, दीर्घ-वर्तुळांत एक रेषा पमपेक्षां कमी असते आणि उद्वलयांत पक रेषा पम पेक्षां मोठी असते.

लेख ९७ मध्यें--

पल = पक आणि पर = पक'

तेव्हां पर — पल = पक' — पक = गड' = शड' — गश

पण गश = कश आणि शडं = शक'

म्हणून शडं — गश = शक' — कश = शकं — क'श' = शशं

यास्तव पक' — पक = शश'

१०२. उद्वलयाच्या शिरोबिंदुमध्यें सांपडलेला जो अक्षाचा शश' भाग त्यास त्या उद्वलयाचा "पादाक्ष" असें म्हणावें.

पादाक्षाला दुभागणारा जो घ बिंदु त्याला त्या उद्वलयाचा मध्य असें म्हणावें.

उद्वलयाच्या मध्याच्या दोहों बाजूंस ज्या दोन वक्ररेषा त्यास त्या उद्वलयाच्या शाखा म्हणतात.

१०३. उद्वलयाच्या वक्ररेषेंत पुढील धर्म असतात :—

(१) उद्वलयाच्या वक्ररेषेंतील प्रत्येक बिंदूचें, एका केंद्रापर्यंत असलेलें पक अंतर आणि त्याच केंद्राशीं संगत अशा नायिकेपर्यंत लंबांतर पम यांचें गुणोत्तर एकाच विषम अपूर्णांक संख्येइतकें असतें. म्हणजे

$$\frac{\text{पक}}{\text{पम}} = \frac{\text{प'क}}{\text{प'म'}} = \text{एक ह्या संख्येपेक्षां जास्त अपूर्णांक.}$$

(२) उद्वलयाच्या पादाक्षाचा मध्य घ बिंदु ह्यापासून दोन्ही केंद्रें समान अंतरावर असतात तशाच दोन्ही नायिकाही समान अंतरावर असतात.

(३) उद्वलयाच्या वक्ररेषेतील एका बिंदूपासून दोन्ही केंद्रांपर्यंत असलेल्या अंतरांची वजाबाकी पादाक्षाबरोबर असते.

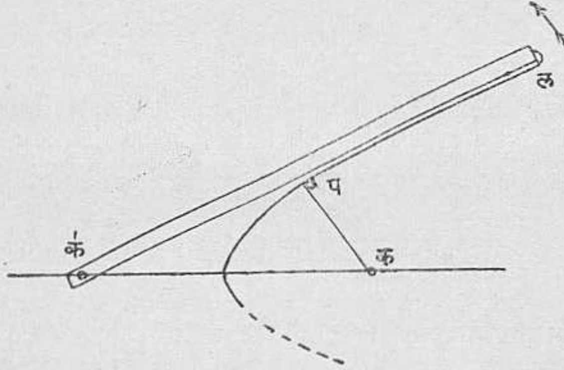
बिंदु निधान

१०४. उद्वलय हें एका प्रकारच्या बिंदूंचीं निधानें आहे. ते असें—

अशा बिंदूंचें निधान कोणते कीं, त्या प्रत्येक बिंदूपासून दिलेल्या दोन बिंदूंपर्यंत असलेल्या अंतरांची वजाबाकी दिलेल्या त्या दोन बिंदूंमधील अंतराबरोबर असेल.

यांत्रिक पद्धतीनें उद्वलयाची आकृति कशी काढिता येते तें खाली दाखविलें आहे :—

रेषा आखण्याची एक सरळ पट्टी घ्या. त्या पट्टीचें एक टोंक उद्वलय जें काढावयाचें त्याच्या एका केंद्रावर ठेवा. व त्या केंद्रस्थळीं एक टांचणी टोचा. (कागद व पट्टी ड्राइंग बोर्डवर असावी.)



ही पट्टी क' टाचणीसभोवती कागदाच्या पातळींत फिरती असावी. एक चांगला बळकट दोरा घेऊन त्याचें एक टोंक क ठिकाणीं पक्कें बांधा. हा दोरा प पेन्सिलीवरून घेऊन ल ठिकाणीं गुंतवा. पट्टी बाणाच्या दिशेनें फिरत आहे, तेव्हां प पेन्सिलीच्या टोकानें जी रेषा निघेल ती उद्वलयाची आकृति होईल.

पट्टीची लांबी र रेषा परिमित आहे आणि दोऱ्याची लांबी द रेषा परिमित आहे. तर

$$\text{क'प} + \text{पल} = \text{र}$$

$$\text{आणि कप} + \text{पल} = \text{द}$$

$$\text{म्हणून क'प} - \text{कप} = \text{र} - \text{द}.$$

येथे आपणास दिसून येईल कीं, र रेषेपेक्षां द रेषा लहान आहे. आणि र—द हे अंतर स्थीर (न बदलणारें) आहे म्हणून उलेखन होणारी वक्ररेषा उद्वलयाची आहे.

१०५. शंकुच्छिन्न भूमितीचे सिद्धांत पुष्कळच आहेत. ते सिद्धांत भूमिति पद्धतीनें सोडवून सिद्ध करून त्यावर स्वतंत्र ग्रंथ केले आहे. हे सिद्धांत दोन प्रकारांनीं सिद्ध करितां येतात. एक भूमिति पद्धतीनें आणि दुसऱ्या बीजगणित पद्धतीनें. ह्या दुसऱ्या पद्धतीला बैज्य-भूमिति म्हणतात. बैज्य-भूमिति ही शुद्ध गणिताची अत्यंत महत्त्वाची शाखा आहे. अनुमान पद्धती आणि बैज्य-भूमिति ह्या युग्मानें अनेक महत्त्वाचें सिद्धांत सिद्ध होतात. या कारणामुळें प्रस्तुत ग्रंथांत बैज्य-भूमितीला विशेष महत्त्व दिलें आहे. म्हणून शंकुच्छिन्न भूमितीचे सिद्धांत रेखा-भूमितीने न सिद्ध करितां बैज्य-भूमितीनेंच सिद्ध करण्याचें योजिलें आहे.

१०६. बैज्य-भूमितीमध्ये सर्वच समीकरणांचा उल्लेख आहे. सरळ रेषेचें समीकरण, वर्तुळाचें समीकरण, परवलय, दीर्घवलय, उद्वलय यांचीं समीकरणें, हीं समीकरणें ठरलेली आहेत. बीजगणिताची परिभाषा आणि धनर्ण संकेत व चिन्ह पद्धति यांचें सहाय्य रेखागणिताला मिळाल्यामुळें त्यांच्या धर्माविषयीचे सिद्धांत थोडक्यांत व शुद्ध रीतीनें स्थापित होतात. बैज्य-भूमिति ह्या विषयावर मोठमोठाले ग्रंथ अनेक झाले आहेत. तेव्हां असल्या ह्या विषयाचे परिशीलन ज्योतिर्गणिताचे आभ्यासूला अत्यंत आवश्यक आहे. ह्या विषयाचे मुख्य मुख्य भाग येथे देत आहे.

प्रकरण सातवें

बैज्य-भूमितीचीं मूलतत्त्वें

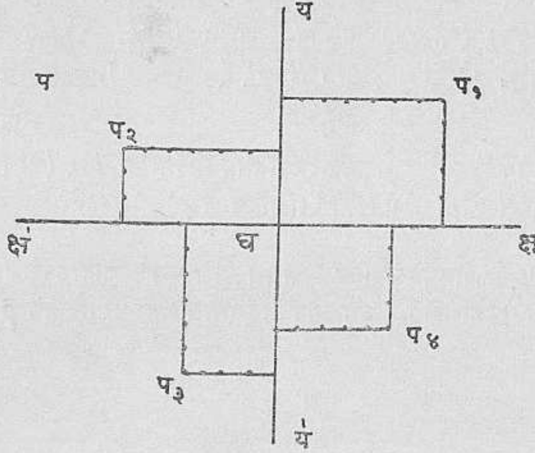
१०७. भूमितीमध्ये जी रेषांची समान असमानता, त्यांची स्थिति परस्पर मीलन व छेदन, त्यामुळें होणाऱ्या कोनाचे मापन व तुलना वगैरे विषयांचे उपपादन करण्याचे कामी बीजगणिताची योजना केली आहे, असा जो शुद्ध गणिताचा भाग त्याला बैज्य-भूमिती असें म्हटले आहे. बीजगणिताची चिन्हपद्धति आणि धनर्ण संकेत यांच्या योजनेने विवक्षित बिंदूचे पातळीमध्ये स्थान कोठे आहे याचा निर्णय, समीकरणाच्या योगाने सरळ अथवा वक्ररेषेची स्थिति निश्चित करणें, तसेंच त्या समीकरणाच्या सहाय्यानें सरळ व वक्ररेषांचे भूमितिविषयक धर्म स्थापित करणें, दिलेले समीकरण सरळ रेषेचे आहे किंवा वर्तुळाचे अगर दीर्घवर्तुळाचे आहे हे ठरविणें आणि त्यावरून परिमाणासह ती रेषा किंवा ते वर्तुळ याचे लेखन करणें अशी कार्यें बैज्य-भूमितीने करिता येतात.

बिंदूचे पातळीतले स्थान

१०८. बिंदूला महत्त्व मुळीच नाहीं परंतु स्थिति मात्र आहे. स्थिति म्हणजे अस्तित्व अथवा स्थान. बिंदू केवढा असेल ? या प्रश्नाचे उत्तर, केवढा हे सर्वनाम बिंदूला योजिताच येत नाही. बिंदु कोठे असेल ? तर बिंदु हव्या त्या स्थानी असेल, तो पोकळीत आहे व पातळीतही आहे. पोकळी आणि पातळी ह्या अमर्याद आहेत. तेव्हां बिंदु पोकळीत किंवा पातळीत आहे असे म्हटल्याने त्याचे स्थान कळून येत नाहीं यासाठी दुसऱ्या बिंदूच्या ठरविलेल्या स्थानाच्या स्थितीवरूनच इष्ट बिंदूच्या स्थानाचा बोध होतो. ठरविलेला बिंदु रेषेशिवाय ज्ञात होत नाही आणि एका रेषेने त्याची जाणीव न होता पातळीतल्या बिंदूच्या स्थानाची जाणीव व्हावयास एकमेकीला छेदणाऱ्या दोन रेषांची आवश्यकता असते ; आणि पोकळीतल्या बिंदूच्या स्थानाची जाणीव व्हावयास एकमेकीस छेदणाऱ्या तीन रेषांची आवश्यकता असते. प्रस्तुत पोकळीतल्या बिंदूचा विचार बाजूला ठेवून पातळीतल्या म्हणजे सरळ पातळीतील बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय कसा करितात हे येथे दाखवावयाचे आहे.

१०९. भूमितिविषयक ग्रंथांत बिंदूला एकाद्या अक्षराचे नांव देऊन त्याचे स्थान दर्शवितात. त्या अक्षरानें बिंदूच्या स्थानाचें दर्शन होते, त्या स्थानाचा निर्णय आम्हास लेखनद्वारा करावयाचा आहे. हा निर्णय करण्याकरिता घ हा एक बिंदु

शोधून घेऊन ठरविला आहे. ह्या बिंदूला प्रस्थापित बिंदु म्हणावें. घ बिंदूपासून एका परिचित दिशेनें जाणारी घक्ष रेषा काढिली व ती विरुद्ध दिशेलाही वाढविली आहे. ती वाढविलेली रेषा घक्ष' आहे. क्ष' घ क्ष ह्या रेषेला प्रस्थापित रेषा म्हणावें. इच्छि-



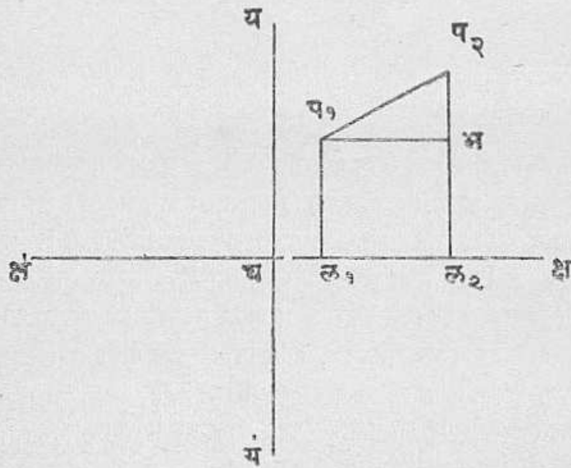
लेला बिंदु ज्या पातळीत आहे त्याच पातळीत क्ष' घ क्ष सरळ रेषा आणि तिच्यातील घ बिंदु हीं ही आहेत. परंतु एवढयाच साहित्याने त्याच पातळीतील हव्या त्या बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होऊं शकत नाहीं. यास्तव घ बिंदूतून गेलेली जी क्ष' क्ष रेषा आहे तिच्याविरहित घ बिंदूतून जाणारी दुसरी एखादी रेषा पाहिजे आहे. तसेच ह्या दुसऱ्या रेषेची दिशा व पूर्व क्ष' क्ष रेषेची घ क्ष दिशा यांच्यामध्ये केवढया कोनाचे अंतर आहे तो कोन ही ज्ञात असला पाहिजे. ही दुसरी रेषा घ य ही होय. घक्ष आणि घय यांच्यामध्ये जो कोन आहे तो केवढाही असला तरी आमच्या प्रतिपादनाला कोणत्याही प्रकारचे न्यूनत्व येत नाहीं. परंतु तो कोन काटकोन म्हणजे ९० अंशांचा असला तर प्रतिपादनांत आणि कृतीत सौगम्य येतें.

११०. लेख, ५१, ५२ मध्यें जो धनर्ण संकेत दिला आहे आणि प बिंदूचे भुज कोटि धनर्ण स्वीकारून तो कोणत्या पादांत आहे याचा निर्णय दिला आहे तोच संकेत येथेही स्वीकारला आहे. वरच्या लेखांत जी आकृति आहे तिच्यांत प बिंदु अनुक्रमें चारी पादांत $प_१$ $प_२$ $प_३$ $प_४$ असा दाखविला आहे. $प_१$ ह्या बिंदुचा य भुज ५ आहे आणि क्ष कोटि ७ आहे आणि भुज व कोटि दोन्ही धन आहेत. ह्या भुज कोटीनीं बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होतो. बैज्य-भूमितीत बिंदु दाखवावयाचा असता $प_१$ हा बिंदु अ

बिंदु असा दाखवून भागत नाही तो (७, ५) किंवा सामान्यत्वे (क्ष य) असा दाखवावा लागतो. त्यांत नेहमी कोटि प्रथम भुज नंतर असाच क्रम असतो. हे कोटिभुज रेषात्मक देऊन भागत नाहीं त्या रेषा कोणत्यातरी एकाच रेषा परिमाणाने मोजून आलेल्या संख्या असाव्या लागतात. कोटि आणि भुज ह्या संख्या ज्ञात असतील तर तो बिंदु आपणाला ज्ञात आहे म्हणजे माहित आहे असें म्हणतात. वरच्या लेखांतील आकृतींत $प_४$ बिंदु (५, −४) हा होय. आणि (−३$\frac{१}{२}$, −६) हा $प_३$ बिंदु होय प बिंदु (−क्ष, +य) हा आहे आणि $प_२$ बिंदु (−६, +३).

१११. दोन बिंदु दिले आहेत, तर त्या दोन बिंदुंमधील अंतर (म्हणजे त्या दोन बिंदूस सांधणाऱ्या रेषेची लांबी किती रेषा परिमाणें हें) सांगावयाचें.

$प_१$ आणि $प_२$ हे दोन बिंदु आहेत. आणि यांचे भुज* कोटि अनुक्रमे ($क्ष_१$, $य_१$) आणि ($क्ष_२$, $य_२$) हे आहेत. ह्या दोन बिंदुंमधील अंतर ठरवावयाचे आहे.



$प_१$ बिंदूचे भुज कोटि $क्ष_१ =$ घ $ल_१$ आणि $य_१ = प_१ ल_१$ आहेत. आणि $प_२$ बिंदूचे भुज कोटि $क्ष_२ =$ घ $ल_२$ आणि $य_२ = प_२ ल_२$ आहेत. $प_१$ बिंदूपासून $प_२ ल_२$

---

* भुज कोटि = भुजासह कोटि असा अर्थ लेखनाप्रमाणे घेणें कारण लेखनांत प्रथम कोटि म्हणजे क्ष आहे नंतर भुज य आहे.

वर $प_१$ म लंब काढिला, तेव्हा $प_१$ म $प_२$ काटकोन त्रिकोण झाला म्हणून

$$\begin{aligned}(प_१ प_२)^२ &= (प_१ म)^२ + (प_२ म)^२ \\ &= (घल_२ -- घल_१)^२ + (प_२ल_२ - मल_२)^२ \\ &= (क्ष_२ -- क्ष_१)^२ + (य_२ -- य_१)^२ \quad \cdots\cdots (१)\end{aligned}$$

११२. कोणत्याहि दोन बिंदूंचे भुज कोटि ज्ञात असले तर त्या दोन बिंदूंमधील अंतर ज्ञात होतें ते अंतर र ह्या अक्षरानें दाखविलें तर

$$र = \sqrt{(क्ष_२ - क्ष_१)^२ + (य_२ - य_१)^२}$$

लेख १०९ मधल्या आकृतीत $प_१$ आणि $प_२$ या दोन बिंदूंचे भुज कोटि दिले आहेत ते $प_१$ चे (७, ५) आणि $प_२$ चे (−६, + ३) हे आहेत. तेव्हां $प_१$ $प_२$ ह्या दोन बिंदूंमधील अंतर र ची किंमत खालीं दिल्याप्रमाणें

$$\begin{aligned}र^२ &= \left\{(७) -- (-६)\right\}^२ + \left\{(५) - (३)\right\}^२ \\ &= १३^२ + २^२ = १६९ + ४ = १७३ \\ र &= \sqrt{१७३} = १३\cdot१५३.\end{aligned}$$

तसेच $प_१$ व $प_३$ मधील अंतर

$$\begin{aligned}र^२ &= \left\{(७) - (-३\tfrac{३}{२})\right\}^२ + \left\{(५) - (-६)\right\}^२ \\ &= (१०\tfrac{१}{२})^२ + (११)^२ = \tfrac{९२५}{४} = २३१\cdot२५ \\ र &= \sqrt{२३१\cdot२५} = १५\cdot२०६\end{aligned}$$

सरलरेषा

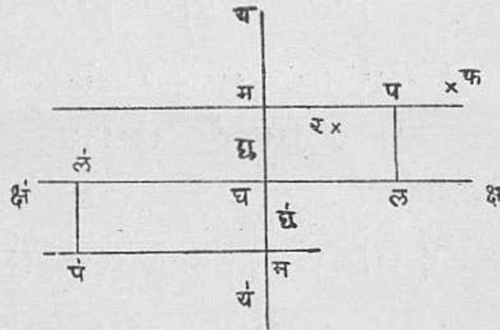
११३. अन्योन्यलंब भुज बिंदुनिर्णायकें क्ष, य यांनीं बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होतो. त्यांच्याच सहाय्यानें रेषेच्या स्थितीचें परिमापनाचें अन्योन्य संबंधाचें विवेचन करितां येतें. कोणतीही रेषा समीकरणानें दाखवितां येतें. क्ष आणि य ह्या दोन अव्यक्त किंवा व्यक्त संख्यांपैकीं एक किंवा दोहींनीं रेषा दाखवितां येतें. हें समीकरण एकवर्ण समीकरण असेल तर तें समीकरण सरलरेषेचे आहे असें समजावें. पण त्या समीकरणातील कांहीं पदें द्विघातात्मक असतील तर ते वक्ररेषेचे समीकरण आहे असें

समजावें, अमुक समीकरण सरलरेषेचें आहे किंवा वर्तुळाचें आहे अगर परवलयाचें किंवा दीर्घवलय उद्वलयाचें आहे याचा बैज्य-भूमितीनें निर्णय करितां येतो. या स्थळीं सरळरेषेच्या समीकरणाचा विचार करीत आहे.

११४. क्ष अक्षाशी समांतर असणाऱ्या सरळरेषेचें समीकरण म्हणजे त्या समीकरणांत ज्या दोन अव्यक्त संख्या आहेत त्यांच्या व्यक्त अशा ज्या ज्या किंमती संभवतील त्यांनीं दाखविलेला प्रत्येक बिंदु त्या सरळरेषेतच असला पाहिजे. आणि त्या समीकरणापासून आलेला बिंदु त्या रेषेच्या बाहेर नसला पाहिजे.

क्ष अक्षाशी पम ही समांतर रेषा काढिली. ती घय अक्षास म स्थानीं छेदिते. घम रेषा घ्र परिमाणें लांबीची आहे. तेव्हां

$$\text{पल} = \text{मघ} \quad \text{अथवा} \quad \text{य} = \text{घ्र}$$



येथे पम ही रेषा क्षं क्ष शी समांतर आहे म्हणून

$$\text{य} = \text{घ्र}$$

हे पम रेषेचें समीकरण होय. येथे आपणाला असेही ठरवितां येतें कीं फ बिंदूचा य भुज घ्र पेक्षां जास्त आहे आणि र चा य भुज घ्र पेक्षां कमी आहे.

याचप्रमाणे प' म' रेषेचें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें आहे. प'म' क्ष'क्षशी समांतर आहे तेव्हां प' ल' = म' घ म्हणून.

$$\text{य} = -\text{घ्र}'$$

११५. य अक्षाशीं समांतर असणाऱ्या रेषेचें समीकरण ठरविणें. वरच्या लेखांतील विवेचनावरून लक्षांत येईल कीं, समीकरण ज्या रेषेचें आहे त्या रेषेतील प्रत्येक बिंदु क्ष अक्षापासून ङ अंतरावर आहे, आणि त्या रेषेबाहेरील प्रत्येक बिंदु जास्त किंवा कमी आहे म्हणून त्या रेषेचें समीकरण

$$क्ष = ङ$$

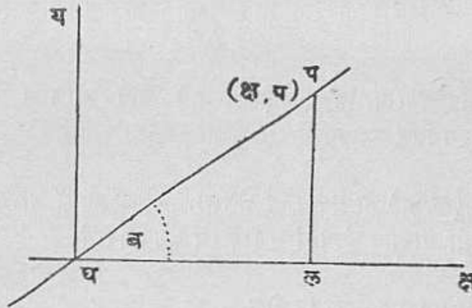
टीप.––यावरून हे लक्षात येईल की, क्षं क्ष रेषा म्हणजे क्ष अक्ष या रेषेचें समीकरण घ रेषा ० मानिली किंवा असली तर

$$य = ०$$

असें होतें. तसेच य य′ रेषेचें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें आहे :––

$$क्ष = ०$$

११६. जी रेषा प्रस्थापित अक्षा घ बिंदूतुन जाते आणि प्रस्थापित अक्षा घ क्षं रेषेच्या दिशेशी ब वृत्तपरिमाणाचा कोन करिते त्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



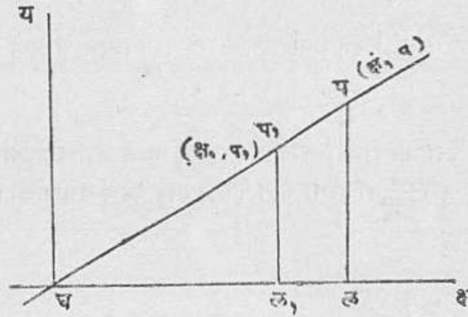
घ प ही रेषा घ बिंदूतून जाते, आणि ती घक्ष शीं ब वृत्तपरिमाणाचा कोन करिते. येथे ब कोन दिलेला आहे. घ प रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचे. येथे क्ष, य आणि ब कोन यांचें समीकरण ठरवावयाचें. घ प रेषेत कोणता तरी प बिंदु घेतला त्याचे भुज (क्ष, य) आहेत. घक्ष वर पल लंब काढिला

$$\frac{पल}{घल} = \frac{य}{क्ष} = \text{स्पर्शरेषा प घ ल कोन}$$ [ले. ४९]

ही स्पर्श रेषा स्पज ह्या चिन्हानें दाखविण्याचें योजिले आहे
तेव्हां य = स्पज क्ष ······ [हें त्या रेषेचें समीकरण होय].

११७. जी रेषा प्रस्थापित अशा घ बिंदूतून जाते, आणि जिच्यांतील $प_१$ बिंदु ज्ञात आहे, म्हणजे $प_१$ बिंदूचे $(क्ष_१, य_१)$ हे भुज दिलेले आहेत. त्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

(सामान्यत्वें कोणत्यातरी बिंदूचे भुज (क्ष, य) अंकविरहित आणि आपणास माहित आहे त्या बिंदूचे भुज $(क्ष_१, य_१)$; $(क्ष_२, य_२)$ इत्यादि अंकयुक्त लिहिले आहेत. हा एक संकेत स्वीकारला आहे असे लक्षांत असावे.)



$घप_१$ ही रेषा दिलेल्या $प_१$ बिंदूतून $(क्ष_१, य_१)$ जाते आणि घ बिंदूतून जाते. ह्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

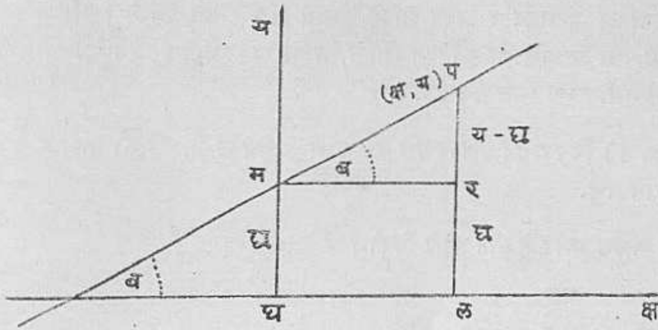
ह्या रेषेंत प (क्ष, य) हा एक बिंदु घेतला. तेव्हा क्ष, य आणि $क्ष_१$, $य_१$ ह्या अव्यक्त व्यक्त अशा सामान्य संख्यांचें समीकरण बनवावयाचें.

$प_१ घ ल_१$ आणि पघल हे सरूप त्रिकोण आहेत. म्हणून

$$\frac{पल}{प_१ ल_१} = \frac{घल}{घल_१} \qquad \text{ह्यावरून}$$

$$य = \frac{य_१}{क्ष_१} क्ष \qquad [\text{हें त्या रेषेचें समीकरण होय}].$$

११८. जी रेषा प्रस्थापित अशा घक्ष रेषच्या दिशेशीं ब वृत्तपरिमाणाचा कोन करिते आणि य अक्षाला छेदिते, अशा रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



मप ही रेषा घक्ष दिशेशी ब कोनात्मक दिशांतर करिते, ब कोनाची स्पर्शरेषा स्पज आहे. ही रेषा य अक्षाला म बिंदूत छेदिते, आणि घम रेषा छ परिमाणें लांबीची आहे. अशा ह्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

ह्या रेषेत प (क्ष, य)* हा कोणतातरी एक बिंदु घेतला. प पासून घक्ष वर पल लंब केला, आणि म बिंदूतून घक्ष शी मर समांतर केली, येथे क्ष, य, स्पज आणि छ यांचें समीकरण बनवावयाचें.

परम हा काटकोन त्रिकोण आहे, तेव्हां

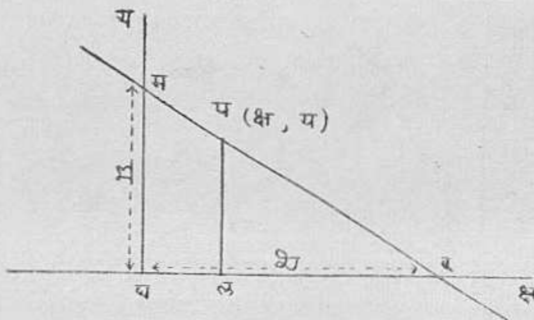
$$\frac{\text{पर}}{\text{मर}} = \text{स्पब} = \text{स्पज}$$

$$\text{पर} = \text{पल} - \text{रल} = \text{य} = \text{छ} \text{ आणि } \text{मर} = \text{घल} = \text{क्ष}$$

म्हणून
$$\frac{\text{य}-\text{छ}}{\text{क्ष}} = \text{स्पज}$$

किंवा $\text{य} = \text{स्पज}\,\text{क्ष} + \text{छ}$ [हें त्या रेषेचें समीकरण होय].

११९. जी रेषा क्ष, य ह्या दोन्ही अक्षांना प्रस्थापित अशा घ बिंदूपासून अनुक्रमें ऊ, छ अंतरावर छेदिते त्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



मप रेषा क्ष अक्षाला र बिंदूत छेदिते, तेव्हां घ र लांबी ड रेषा परिमाणें आहे, तसेंच पम रेषा य अक्षाला म बिंदूत छेदितें, तेव्हां घम लांबी छ रेषा परिमाणें आहे. मप रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

प (क्ष, य) बिंदूपासून घक्षवर पल लंब केला. येथे क्ष, य, ड, छ यांचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

पलर आणि मघर हे दोन सरूप त्रिकोण आहेत. म्हणून

$$\frac{\text{पल}}{\text{मघ}} = \frac{\text{लर}}{\text{घर}}$$

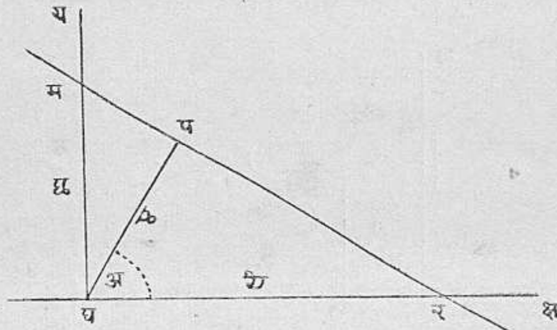
परंतु $\quad \text{लर} = \text{घर} - \text{घल} = \text{ड} - \text{क्ष}$

म्हणून $\quad \frac{\text{य}}{\text{छ}} = \frac{\text{ड} - \text{क्ष}}{\text{ड}} = १ - \frac{\text{क्ष}}{\text{ड}}$

किंवा $\quad \frac{\text{क्ष}}{\text{ड}} + \frac{\text{य}}{\text{छ}} = १$ [हें त्या रेषेचें समीकरण होय].

१२०. प्रस्थापित अशा घ बिंदूपासून ज्या रेषेवर टाकलेल्या लंबाची लांबी ठ आहे, आणि तो लंब घक्ष अक्षाशी अ अंशाचा कोन करील अशा रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

ह्या आकृतींत मघर, घपर आणि घपम हे तिन्ही काटकोन त्रिकोण आहेत. मरघ कोनाचा अ हा कोटिकोण आहे. तसा घमर कोनही कोटिकोण आहे. म्हणून



घमर कोन = अ कोन.

तेव्हां ठ = ष. कोभुअ म्हणून $$\text{ष} = \frac{\text{ठ}}{\text{कोभुअ}}$$

तसेंच ठ = ध. भु अ म्हणून $$\text{ध} = \frac{\text{ठ}}{\text{भुअ}}$$

परंतु मर रेषेचें समीकरण वरच्या लेखाप्रमाणें

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{ष}} + \frac{\text{य}}{\text{ध}} = १$$

असे आहे ह्या समीकरणात ष, ध च्या किंमती लिहिल्या. तेव्हां

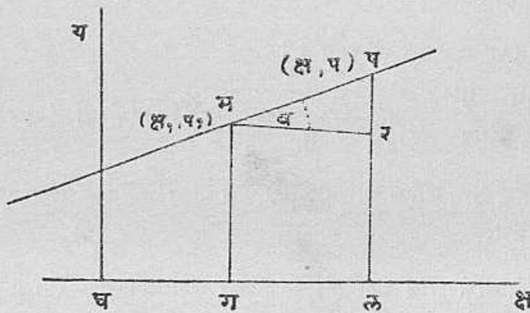
$$\frac{\text{क्ष}}{\frac{\text{ठ}}{\text{कोभुअ}}} + \frac{\text{य}}{\frac{\text{ठ}}{\text{भुअ}}} = १$$

म्हणजे $$\frac{\text{क्ष को भु अ}}{\text{ठ}} + \frac{\text{य भु अ}}{\text{ठ}} = १$$

किंवा क्ष को भु अ + य भु अ = ठ [हें समीकरण होय].

१२१. वरच्या दोनचार कृत्यांमध्यें आपल्या निदर्शनास आलें आहे कीं, सरळरेषेचें प्रत्येक समीकरण क्ष आणि य या दोन अव्यक्तांचे असून तें एकवर्ण समीकरण असतें. म्हणजे त्या समीकरणात क्ष^2 किंवा य^2 अथवा क्षय असें द्विघातात्मक पद नसतें. तेव्हां—

दोन अव्यक्तांचें एकवर्ण समीकरण हें सरळरेषा दाखवितें. असें सिद्ध करावयाचें



ह्या समीकरणाचें सामान्य स्वरूप खालीं दाखविल्याप्रमाणें असतें.

$$क क्ष + च य + ट = ०$$

ह्या समीकरणातील क्ष आणि य ह्या चल संख्या आहेत. आणि क च ट ह्या स्थीर संख्या आहेत. ह्यावरून लक्षांत येईल कीं, य आणि क्ष यांची वृद्धि, य आणि क्ष यांना जे च आणि क गुणक आहेत त्यांच्या व्यस्त प्रमाणांत होऊन, दोहोंपैकीं एक धन व एक ऋण असली पाहिजे. तसे नसल्यास समीकरणाच्या दोन्ही पेटचांचें समत्व राहणार नाहीं. हेंच प्रथम सिद्ध करितो.

वरचे सामान्य स्वरूपी समीकरणाचा स्थानभेद केला तर

$$क क्ष + च य = - ट$$

ह्या समीकरणातील क्ष आणि य यांच्या किंमती च ल न पावून त्या $क्ष_1$, $य_1$ अशा झाल्या तर तें $क क्ष_1 + च य_1 = - ट$ असें होईल. ह्याप्रमाणें कोणतेही समीकरण झालें तरी — ट यांत बदल होत नाहीं.

म्हणून $$क क्ष + च य = क क्ष' + च य'$$

याचेंच स्थानभेदानें स्वरूप

$$क क्ष - क क्ष' = - च य + च य'$$

$$क (क्ष - क्ष') = - च (य - य')$$

दोन गुणाकार समान असतील तर एका गुणाकाराचे अवयव आद्यस्थानीं आणि दुसऱ्या गुणाकाराचे अवयव मध्यस्थानीं, याप्रमाणें लिहिल्यानें जे चार राशी होतात ते प्रमाणात असतात. ह्यावरून

$$(क्ष - क्ष') : (य - य') :: - च : क$$

किंवा $$\frac{य - य'}{क्ष - क्ष'} = - \frac{क}{च} = - \text{स्थीर संख्या} + \text{म घेऊं.}$$

ह्यावरून सिद्ध आहे कीं, य च्या चलनास जसें क्ष चें चलन तसें क : च. मात्र दोहोंपैकीं एक ऋण.

आतां हें समीकरण क्ष य ह्या भुज कोटींच्या सहाय्यानें सरळरेषा दर्शविते असें सिद्ध करावयाचें.

(१) क च ट ह्या स्थीर संख्या आहेत, त्यांच्या किमती समीकरणाचे समान पक्ष कायम ठेवून हव्या त्या असूं शकतात. त्यापैकी ट ही संख्या ० मानिली तर,

$$\text{च य} = -\text{क क्ष}$$

$$\text{य} = -\frac{\text{क}}{\text{च}}\,\text{क्ष}$$

हें समीकरण सरळरेषा दाखविते (लेख ११६, ११७ पहा). कारण $\frac{\text{क}}{\text{च}}$ ही त्या रेषेनें क्ष अक्षाशी केलेल्या कोनाची स्पर्शरेषा आहे आणि ती स्थीर आहे म्हणून ती रेषा सरळ आहे. ही सरळ रेषा प्रस्थापित अशा घ बिंदूतून गेलेली आहे.

(२) सामान्य समीकरणातील ट ही संख्या ० नाहीं, असे असेल तर ट नें समीकरण भागिले तर तें खालीं दिल्याप्रमाणे होते :—

$$\frac{\text{क क्ष}}{\text{ट}} + \frac{\text{च य}}{\text{ट}} + १ = ०$$

किंवा

$$\frac{\text{क्ष}}{\frac{\text{ट}}{\text{क}}} + \frac{\text{य}}{\frac{\text{ट}}{\text{च}}} + १ = ०$$

ह्या समीकरणांतील सरलरेषा लेख १२० मधील रेषेप्रमाणें आहे.

$$\frac{\text{ट}}{\text{क}} = \text{ष} \text{ आणि } \frac{\text{ट}}{\text{च}} = \text{घ} \text{ आहे.}$$

(३) सामान्य समीकरणातील च ही संख्या ० असेल तर,

$$\text{क क्ष} = -\text{ट}$$

$$\text{क्ष} = -\frac{\text{ट}}{\text{क}}$$

ही य अक्षाशी समांतर अशी सरळरेषा आहे. (लेख ११५.)

(४) सामान्य समीकरणातील क ही संख्या ० असेल तर,

$$\text{च य} = -\text{ट}$$

$$\text{य} = -\frac{\text{ट}}{\text{च}}$$

ही क्ष अक्षाशी समांतर अशी सरलरेषा आहे. (लेख ११४.)

(५) सामान्य समीकरणातील क च ट पैकीं कोणतीच संख्या ० नाहीं. तेव्हां च नें समीकरण भागिलें तर,

$$\text{य} = - \frac{\text{क}}{\text{च}}\text{क्ष} - \frac{\text{ट}}{\text{च}}$$

हे ही सरलरेषेचें समीकरण आहे (लेख ११८.)

ह्याप्रमाणे दोन अव्यक्तांचें एकवर्ण समीकरण सरलरेषा दाखवितें.

१२२. दोन सरलरेषांचीं समीकरणें दिलीं आहेत, तर त्या रेषांच्या छेदन बिंदूचे भुजकोटि सांगा.

$$\text{ध}_{१}\text{क्ष} + \text{घ}_{१}\text{य} + \text{ग्न}_{१} = ०$$

आणि

$$\text{ध}_{२}\text{क्ष} + \text{घ}_{२}\text{य} + \text{ग्न}_{२} = ०$$

ही त्या दोन रेषांचीं समीकरणें आहेत. यांच्या छेदन बिंदूचे भुजकोटि शोधावयाचे आहेत.

दोन रेषांचा छेदन बिंदु म्हणजे दोन्ही रेषांमध्ये असणारा बिंदु. यावरून क्ष य यांच्या किंमती दोन्ही समीकरणांत सामान्य असतील त्या शोधावयाच्या. बीजगणिताच्या भाषेनें बोलावयाचे म्हणजे ही समीकरण सोडवावयाची.

समीकरण सोडविण्याच्या अनेक पद्धति आहेत. त्या एथे सांगणें अप्रासंगिक आहेत म्हणून त्याचें विवेचन करीत नाहीं. तथापि दोन अव्यक्तांपैकीं एकाचे गुणक समान करून समीकरणांची वजाबाकी केली म्हणजे ते अव्यक्त लुप्त होतें, आणि दुसऱ्या अव्यक्ताची किंमत तयार करिता येतें. त्याप्रमाणें

$$\text{ध}_{२} \times \text{ध}_{१}\text{क्ष} + \text{ध}_{२} \times \text{घ}_{१}\text{य} + \text{ध}_{२} \times \text{ग्न}_{१} = ०$$

$$\underline{\text{ध}_{१} \times \text{ध}_{२}\text{क्ष} + \text{ध}_{१} \times \text{घ}_{२}\text{य} + \text{ध}_{१} \times \text{ग्न}_{२} = ०}$$

$$+ (\text{ध}_{२}\text{घ}_{१} - \text{ध}_{१}\text{घ}_{२})\,\text{य} + (\text{ध}_{२}\text{ग्न}_{१} - \text{ध}_{१}\text{ग्न}_{२}) = ०$$

$$\text{य} = - \frac{(\text{ध}_{२}\text{ग्न}_{१} - \text{ध}_{१}\text{ग्न}_{२})}{(\text{ध}_{२}\text{घ}_{१} - \text{ध}_{१}\text{घ}_{२})},$$

$$\text{आणि} \quad \text{क्ष} = + \frac{(\text{घ}_{१}\text{ग्न}_{२} - \text{घ}_{२}\text{ग्न}_{१})}{(\text{घ}_{२}\text{ध}_{१} - \text{घ}_{१}\text{ध}_{२})}.$$

१२३. (१) खाली दिलेल्या दोन रेषांचा छेदन बिंदु सांगा :—

७ क्ष — ६ य + ५९ = ० आणि ३ क्ष — ८ य + ४७ = ०
पहिलें समीकरण ४ नीं आणि दुसरें ३ नीं गुणून आलेल्या समीकरणांची वजा-बाकी केली तर

२८ क्ष — २४ य + २३६ = ०
९ क्ष — २४ य + १४१ = ०
१९ क्ष + ९५ = ०

क्ष = — ५, य = + ४.

(—५, ४) हा तो छेदन बिंदु.

(२) ३ क्ष — ४ य = ७ ही रेषा स्पर्शरेषेच्या उल्लेखानें म्हणजे य = स्प्ज क्ष + घ ह्या स्वरूपानें लिहा.

य = $\frac{३}{४}$ क्ष — $\frac{७}{४}$

(३) √३ क्ष—३य=√६ ही रेषा क्ष अक्षाशी किती अंशांचा कोन करिते. ३० अंशाचा.

(४) ३ क्ष — ४ य = १३ आणि ३ क्ष — ४ य = ९ ह्या रेषांचा छेदन बिंदु सापडेल काय ?

सांपडणार नाहीं. दोन्ही क्ष अक्षाशीं समान कोन करितात म्हणून त्या समांतर आहेत.

१२४. श्रीमद्भास्कराचार्य यांनीं आपल्या लीलावती नामक ग्रंथांत एक कृत्य त्याच्या रीतिसह दिलेले आहे. त्या कृत्याची उपपत्ति युक्लीडच्या सहाव्या पुस्तकाच्या आधारें दाखवितां येते. तथापि आपल्या ह्या प्रस्तुत बैज्य-भूमितीच्या सिद्धांतांनीं अत्यंत सुलभ रीतीनें त्या कृत्याच्या रीतीची उपपत्ति सिद्ध होते. तें कृत्य आणि त्याची रीति खालीं दिल्याप्रमाणें आहे:—

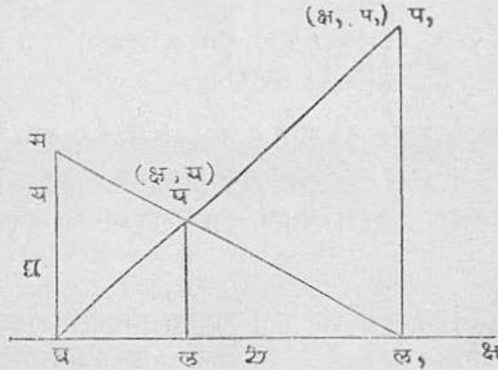
॥ अन्योऽन्युमूलाग्रग सूत्र योगात्
॥ वेण्वोर्वधे योगहृते च लंब : ॥
॥ वंशौ स्वयोगेन हृतावभीष्ठ ।
॥ भूघ्नौच लंबोभयतः कुखंडे ॥ १६४ ॥

॥ लीलावती ॥

समभूमीवर दोन वेणू (वेळू) लंबाकार उभे केले आहेत, आणि एकाच्या मूला-पासून दुसऱ्याच्या अग्रापर्यंत सूत्र बांधिले आहे. तसेंच दुसऱ्याच्या मूलापासून पहिल्याच्या अग्रापर्यंतही सूत्र बांधिले आहे. तर दोन्ही सूत्रांच्या छेदन बिंदूपासून भूमीवर टाकलेला लंब किती ? असा प्रश्न आहे त्याचे उत्तर 'वेण्णोर्वधे योगहृते च' ह्या दोन शद्वांत आहे. तें असें की "वेळूंच्या गुणाकाराला बेरजेनें भागा".

हा लंब भूमीवर ज्या बिंदूत पडला त्या बिंदूपासून प्रत्येक वेळूच्या बुडखापर्यंत अंतर किती ? हा दुसरा प्रश्न आहे. ह्याची रीति अशी कीं, एका वेळूच्या उंचीला दोन्ही वेळूंच्या मूलांमधील जे भूम्यंतर त्याने गुणून दोन्ही वेळूंच्या उंचीच्या बेरजेनें भागा. म्हणजे त्या वेळूच्या मूळापासून लंब पडलेल्या बिंदूचे अंतर कळेल. व याच रीतीनें दुसऱ्या वेळूच्या मूळापासून लंबमूळापर्यंत अंतर कळेल.

वरच्या दोन कृत्यांच्या रीतीची उपपत्ति आपल्या बैज्य-भूमितीनें कशी सिद्ध होते, ती पहा--



ह्या आकृतीत घ हा प्रस्थापित बिंदु आणि घक्ष, घय हे भुजकोटीचे अक्ष आहेत असे घ्या. आणि मल$_१$ रेषा व घप$_१$ ही रेषा ह्या दोन रेषांचीं समीकरणें मांडा. ह्या दोन रेषांच्या प ह्या छेदन बिंदूचे भुजकोटि ठरवा.

मल$_१$ ही रेषा दोन्ही अक्षांना छेदिते. घल$_१$=ढ, आणि घम=ध तेव्हां लेख ११९ प्रमाणे मल$_१$ रेषेचें समीकरण

$$\frac{क्ष}{ढ} + \frac{य}{ध} = १ \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

घप$_१$ ही रेषा घ ह्या प्रस्थापित बिंदूतून जाते आणि प$_१$ ह्या दिलेल्या बिंदूतून जाते हिचें समीकरण लेख ११७ प्रमाणें

$$\text{य} = \frac{\text{य}_१}{\text{क्ष}_१}\ \text{क्ष} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

ह्या दोन समीकरणांपासून क्ष व य ह्या प बिंदूच्या भुजकोटीची किंमत ठरवा. क्ष$_१$ = भू = दोन्हीं वेळूंमधील भूम्यंतर आणि समीकरण (२) वरून

$$\frac{\text{य}}{\text{य}_१} = \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}_१} = \frac{\text{क्ष}}{\text{भू}}$$

पहिल्या समीकरणांतील $\frac{\text{क्ष}}{\text{भू}}$ ची किंमत $\frac{\text{य}}{\text{य}_१}$ ही त्यांत ठेविली

तर $$\frac{\text{य}}{\text{य}_१} + \frac{\text{य}}{\text{घ}} = १$$

$$\text{घय} + \text{य}_१\text{य} = \text{य}_१\text{घ}$$

$$\text{य}\ (\text{घ} + \text{य}_१) = \text{य}_१\text{घ}$$

म्हणून $$\text{य} = \frac{\text{य}_१\ \text{घ}}{(\text{घ} + \text{य}_१)} \ldots\ldots\ldots (३)$$

ह्या समीकरणांतील संख्या य = पल = लंब घम = घ डावीकडचा वेणु य$_१$ = प$_१$ल = उजवीकडचा वेणु. यावरून रीती ठरली कीं

वेण्वोर्वधे योग हृतेच लंबः।

दुसऱ्या समीकरणांत क्ष$_१$ च्या जागी भू लिहिला तर

$$\text{य} = \frac{\text{य}_१}{\text{भू}}\ \text{क्ष}$$

म्हणून $$\text{क्ष} = \frac{\text{भू}}{\text{य}_१}\ \text{य}$$

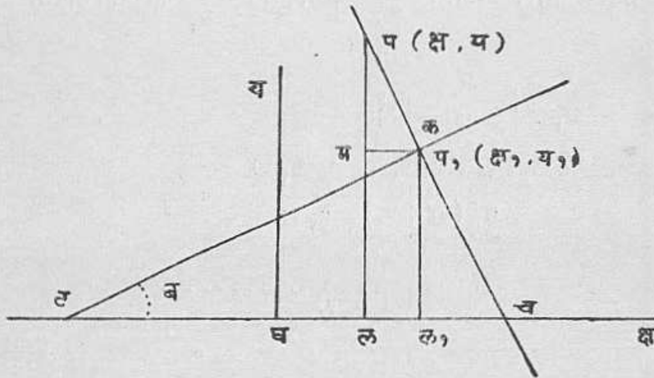
$$= \frac{\text{भू}}{\text{य}_१} \times \frac{\text{य}_१\ \text{घ}}{(\text{घ} + \text{य}_१)}$$

$$= \frac{\text{भू}\ \text{घ}}{(\text{घ} + \text{य}_१)}$$

(ह्या उपपत्तिवरून गणक चक्रचूडामणि श्रीमद्भास्कराचार्य यांना हा विषय उत्तम रीतीनें ज्ञात होता. आजकालपर्यंत जर ह्या विषयांचा अभ्यास भारतीयांनीं केला असता, तर आम्हास पाश्चात्य विद्वानांनी केलेल्या विचारांचे ग्रहण करण्याची पाळी आली नसती.)

१२५. जी रेषा क्ष अक्षाशी, ज्याची स्पर्शरेषा स्प्ज आहे इतक्या अंशांचा कोन करिते आणि ती दिलेल्या $प_१$ $(क्ष_१, य_१)$.

१२५-अ. ज्या रेषेचें क्ष अक्षाशीं, स्प्ज ज्या कोनाशी स्पर्श आहे, तेवढया कोनाचे तीर्यगत्व आहे, त्या रेषेवर तिच्यातील दिलेल्या $प_१$ $(क्ष_१, य_१)$ बिंदूपासून लंब असणाऱ्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.



कट रेषा क्ष अक्षाशी ब अंशाचा कोन करीत आहे. ब कोनाची स्पर्श रेषा स्प्ज आहे. तर कट रेषेतील क म्हणजेच $प_१$ $(क्ष_१, य_१)$ या बिंदूपासून लंब केलेली रेषा कच हिचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.

कच मध्यें कोणता तरी प बिंदु घेतला. त्याचे भुज (क्ष, य) हे आहेत.

प, $प_१$ या बिंदूपासून प ल व $प_१$ $ल_१$ लंब काढिले. तसेच $प_१$ पासून पल वर $प_१$ म लंब केला.

आतां क च क्ष कोन = ब' कोन.

$$-\text{स्प ब}' = +\text{ स्प } (९० + \text{ब}) = +\text{कोस्पब}.$$

$$= + \frac{१}{\text{स्प ब}} = + \frac{१}{\text{स्प्ज}}$$

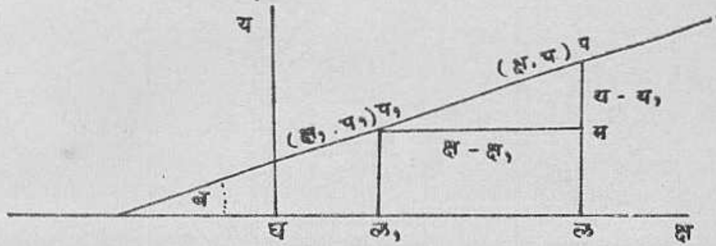
$$पम = क्ष_१ - क्ष \text{ आणि } पम = य - य_१$$

म्हणून—स्पबं' $= \dfrac{पम}{प_१म} = \dfrac{य - य_१}{क्ष_१ - क्ष} = - \dfrac{य - य_१}{क्ष - क्ष_१}$

यास्तव $\quad - \dfrac{य - य_१}{क्ष - क्ष_१} = + \dfrac{१}{स्प्ज}$

म्हणजे $\quad य - य_१ = - \dfrac{१}{स्प्ज} (क्ष - क्ष_१)$ हें कच चें समीकरण

बिंदूतून जाते, त्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.



पप$_१$ ही दिलेल्या (क्ष$_१$ य$_१$) प$_१$ ह्या बिंदूतून गेलेली सरळरेषा आहे. आणि ती ज्याची स्पर्शरेषा स्प्ज आहे अशा ब अंशाचा कोन क्ष अक्षाशी करीत आहे. ह्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें, प हा त्या रेषेतला कोणता तरी बिंदु आहे. तेव्हां क्ष, य, क्ष$_१$ य$_१$ आणि स्प्ज यांचें समीकरण बनवावयाचे.

क्ष अक्षावर पल, प$_१$ ल$_१$ लंब काढिले आणि प$_१$ म ही क्ष अक्षाशी समांतर रेषा काढिली. तेव्हां

$$पम = पल - मल = पल - प_१ल_१ = य - य_१$$
$$प_१म = ल_१ल = घल - घल_१ = क्ष - क्ष_१$$

आणि पमप$_१$ त्रिकोणावरून $\quad \dfrac{पम}{प_१ म} =$ स्प प प$_१$म कोन = स्प्ज

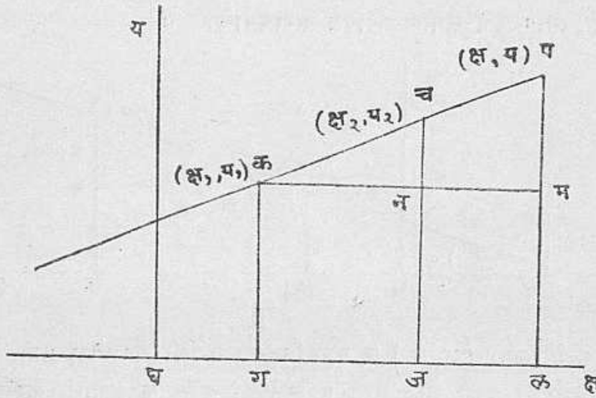
अथवा $\quad \dfrac{य - य_१}{क्ष - क्ष_१} = स्प्ज ;$

म्हणून $\quad य - य_१ = स्प्ज (क्ष - क्ष_१)$

१२६. जी सरळ रेषा दिलेल्या दोन बिंदूतून जाते, त्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

क च दिलेले दोन बिंदु आहेत, त्या दोन बिंदूंचे भुज अनुक्रमें ($क्ष_१$ $य_१$) आणि ($क्ष_२$, $य_२$) हे आहेत. ह्या दोन बिंदूतून गेलेल्या सरळ रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.

प हा त्या रेषेतला कोणता तरी एक बिंदु आहे त्याचे भुज (क्ष, य,) आहेत. तेव्हां क्ष, य, $क्ष_१$ $य_१$, $क्ष_२$ आणि $य_२$ याचें समीकरण जुळवावयाचें.



घक्ष वर कग चज आणि पल लंब काढिले, तसाच कनम चज आणि पल वर लंब काढिला. आतां पमक आणि चनक हे दोन सरूप त्रिकोण आहेत, यावरून

$$\frac{पम}{चन} = \frac{कम}{कन}$$

परंतु $पम = पल - मल = पल - कग = य - य_१,$

$चन = चज - नज = चज - कग = य_२ - य_१,$

$कम = गल = घल - घग = क्ष - क्ष_१,$

$कन = गज = घज - घग = क्ष_२ - क्ष_१$

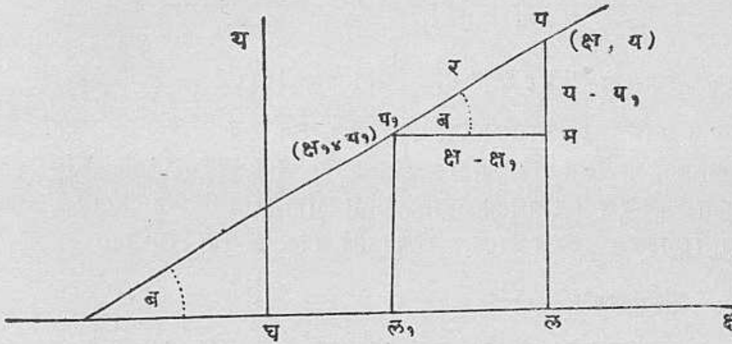
म्हणून $$\frac{य - य_१}{य_२ - य_१} = \frac{क्ष - क्ष_१}{क्ष_२ - क्ष_१}$$ हें इष्ट रेषेचें समीकरण होय.

१२७. $प_१$ हा दिलेल्या रेषेंत एक बिंदु आहे आणि ती रेषा क्ष अक्षाशी ब अंशाचा कोन करीत आहे. $प_१$ ($क्ष_१$, $य_१$) ह्या बिंदूपासून त्याचं रेषेंतील प (क्ष, य) ह्या बिंदूपर्यंत अंतर र आहे तर क्ष, य, $क्ष_१$ $य_१$ ब कोन आणि र रेषात्मक अंतर याचें

$$\frac{क्ष - क्ष_१}{कोभुब} = \frac{य - य_१}{भुब} = र$$

हें समीकरण बनतें असें सिद्ध करावयाचें.

प बिंदूपासून घक्ष वर पल लंब केला आणि $प_१$ बिंदूपासून $प_१$ $ल_१$ हा लंब केला. तसेंच $प_१$ पासून पल वर $प_१$ म लंब केला.



पम$प_१$ त्रिकोणांत $प_१$ म = प$प_१$ कोभुब,

अथवा $क्ष - क्ष_१ = र\ कोभुब$. अर्थात $\frac{क्ष - क्ष_१}{कोभुब} = र$.

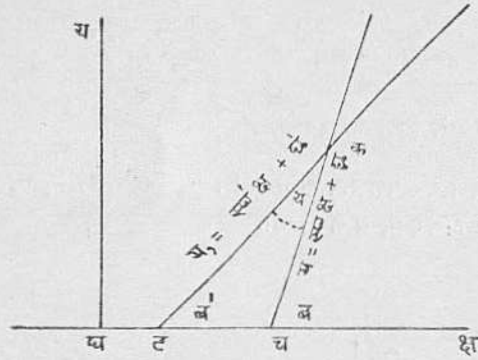
तसेच पम = प$प_१$ भुब

अथवा $य - य_१ = र\ भुब$ अर्थात $\frac{य - य_१}{भुब} = र$

म्हणून $$\frac{क्ष - क्ष_१}{कोभुब} = \frac{य - य_१}{भुब} = र.$$

१२८. दिलेल्या दोन रेषा एकमेकीस छेदतात तर त्यांच्या छेदस्थानीं होणाऱ्या कोनाची स्पर्शरेषा किती ?

त्या दोन रेषांचीं समीकरणें खालीं दिली आहेत. ती अशीं—



य = स्पJ क्ष + घ आणि $य_१$ = स्पJ' $क्ष_१$ + घ'

कच आणि कट ह्या दोन रेषा एकमेकीला क बिन्दूत छेदितात तर चकट कोन केवढा आहे हे सिद्ध करावयाचें. कोन केवढा आहे म्हणजे किती अंशांचा आहे अथवा त्याचे वृत्त परिमाण किती आहे, हे त्या कोनाचें त्रिकोणमितिविषयक एखाद्या गुणोत्तरावरूनच ठरवावे लागते. म्हणून येथे चकट कोनाची स्पर्शरेषा ठरवितात.

आकृतीवरून

चकट कोन = थ कोन, कचक्ष कोन = ब कोन

आणि कटच कोन = ब' कोन.

तेव्हां ब = ब' + थ म्हणून थ = ब − ब'

पण स्पथ = स्प (ब − ब')

आणि $$\text{स्प (ब − ब')} = \frac{\text{स्पब − स्पब'}}{\text{१ + स्पब स्पब'}}$$

कच कट रेषांच्या समीकरणांत स्पब = स्पJ

आणि स्पब' = स्पJ' व ब' कोनांच्या स्पर्शरेषा दिल्या आहेत त्यावरून

$$\text{स्पथ} = \frac{\text{स्पJ − स्पJ'}}{\text{१+स्पJ स्पJ'}}$$

उपसिद्धांत १.—कच कट रेषा समांतर असतील तर ब = ब' म्हणजे स्पJ = स्पJ'

उपसिद्धांत २. — कच कट रेषा एकमेकीवर लंब असतील तर थ = ९०, स्पथ = ∞ म्हणजे अनंत

$$\frac{स्पज - स्पज'}{१ + स्पज\, स्पज'} = \infty \quad १ + स्पज\, स्पज' = ०$$

म्हणून $स्पज\, स्पज' = -१$ आणि $स्पज = -\frac{१}{स्पज'}$

उपसिद्धांत ३.—जर $क_१ क्ष + च_१ य + ट_१ = ०$ ही रेषा $क_२ क्ष + च_२ य + ट_२ = ०$ ह्या रेषेवर लंब असेल तर

$क_१ क_२ + च_१ च_२ = ०$ असें समीकरण असतें.

कारण पहिल्या रेषेतील $स्पज = -\frac{क_१}{च_१}$
दुसऱ्या रेषेतील $स्पज' = -\frac{क_२}{च_२}$ } [लेख १२५ (५)]

$$\left(-\frac{क_१}{च_१}\right) \times \left(-\frac{क_२}{च_२}\right) = -१$$

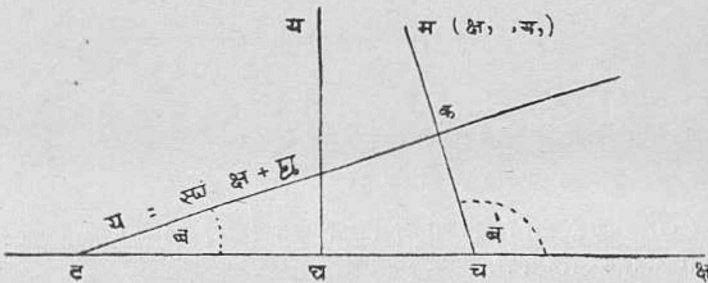
ह्यावरून $क_१ क_२ + च_१ च_२ = ०$

लक्षांत ठेवण्यासारख्या गोष्टी—

(१) $५ क्ष - २ य = ३$, $५ क्ष - २ य = न$ } न ची किंमत कोणतीही असो ह्या रेषा समांतर आहेत.

(२) $५ क्ष - २ य = ३$, $२ क्ष + ५ य = न$ } न ची किंमत कोणतीही असो ह्या रेषा एकमेकीवर लंब आहेत.

१२९. दिलेल्या $य = स्पज क्ष + छ$ रेषेवर तिच्या बाहेर असणाऱ्या म ह्या ($क्ष_१$, $य_१$) बिंदूपासून तिजवर लंब काढावयाचा आहे. आणि त्या लंबरेषेचें समीकरण ठरवावयाचें.



दिलेल्या कट रेषेवर मकच लंब असणारी रेषा काढली. टकच कोन काटकोन आहे, म्हणून कटच कोन आणि कचट कोन हे एकमेकाचे कोटिकोन, आहेत म्हणून

$$— \text{स्प कचक्ष } (ब') = + \text{ स्प } (१८० — ब') = + \text{ स्प कचट}$$

$$= + \text{ को स्प कटच} = + \frac{१}{\text{स्प कटच}}$$

$$— \text{ स्प } ब' = + \frac{१}{\text{स्प } ब} = + \frac{१}{\text{स्प}ज}$$

लेख १२५ प्रमाणें

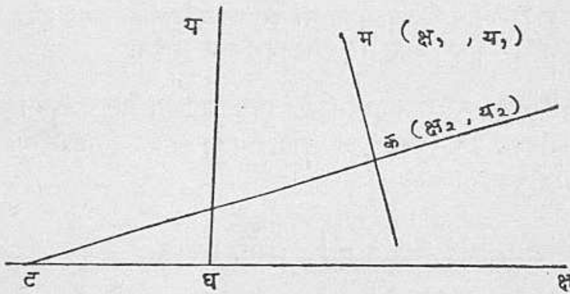
$$\text{स्प } ब' = — \frac{१}{\text{स्प}ज} = + \frac{य — य_१}{क्ष — क्ष_१}$$

$$(य — य_१) = — \frac{१}{\text{स्प}ज} (क्ष — क्ष_१)$$

म्हणजे $य = \text{स्प}ज क्ष + घ$ ह्या रेषेवर

$$य — य_१ = — \frac{१}{\text{स्प}ज} (क्ष — क्ष_१)$$ ही रेषा लंब आहे.

१३०. दिलेल्या रेषेवर, तिच्या बाहेर असलेल्या दिलेल्या बिंदूपासून टाकलेल्या लंबाची लांबी ठरविणें.



कट रेषा दिली आहे तिचें समीकरण

$$य = \text{स्प}ज क्ष + घ$$

हे दिलेले आहे आणि दिलेल्या म बिंदूचे भुज $(क्ष_१, य_१)$ हे आहेत तर मक रेषेची लांबी ठरवावयाची.

मक रेषेचें समीकरण वरच्या लेखाप्रमाणें.

$$(य - य_१) = - \frac{१}{स्पj} (क्ष - क्ष_१)$$

हे आहे. कट मक रेषांचीं समीकरणें माहित आहेत, तर त्यांचा छेदन बिंदु क याचे भुज त्या समीकरणावरून समजतात. ते भुज $क्ष_२$, $य_२$ हे आहेत असे घ्या. हे भुज घेतल्यानें वरची समीकरणें खालीं लिहिल्याप्रमाणे होतील.—

$$य_२ = स्पjक्ष_२ + घ \text{ आणि } य_२ - क = - \frac{१}{स्पj} (क्ष_२ - क्ष_१)$$

ह्या दोन्ही समीकरणापासून $य_२$ च्या किंमती घेऊन त्याचें समीकरण मांडू

$$स्पjक्ष_२ + घ = य_१ - \frac{१}{स्पj} (क्ष_२ - क्ष_१) \text{ हे स. स्पj नें गुणिलें तर}$$

$$स्पj^२क्ष_२ + स्पjघ = स्पjय_१ - क्ष_२ + क्ष_१ \quad \text{स्थान बदल}$$

$$स्पj^२क्ष_२ + क्ष_२ = स्पjय_१ + क्ष_१ - स्पjघ ;$$

किंवा $$क्ष_२ = \frac{स्पj^२य_१ + क्ष_१ - स्पjघ}{स्पj^२ + १}$$

दोहीकडे $क्ष_१$ वजा केला तेव्हां

$$क्ष_२ - क्ष_१ = \frac{स्पjय_१ + क्ष_१ - स्पjघ}{स्पj^२ + १} - क्ष_२$$

$$= \frac{स्पjय_१ - स्पj^२क्ष_१ - स्पjघ}{स्पj^२ + १}$$

$$= \frac{स्पj}{१ + स्पj^२} (य_१ - स्पjक्ष_१ - घ) \quad \cdot\cdot \quad (अ)$$

आतां

$$य_२ - य_१ = - \frac{१}{स्पj} (क्ष_२ - क्ष_१)$$

$क्ष_२ - क्ष_१$ ची किंमत (अ) ह्या वरच्या समीकरणांत ठेविली तेव्हां

$$य_२ - य_१ = - \frac{१}{स्पj} \times \frac{स्पj}{१ + स्पj^२} (य_१ - स्पjक्ष_१ - घ)$$

$$= \frac{स्पjक्ष_१ + घ - य_१}{१ + स्पj^२} \quad .. \quad .. \quad .. \quad (ब)$$

परंतु $मक^{२} = (क्ष_{२} - क्ष_{१})^{२} + (य_{२} - य_{१})^{२} = (अ)^{२} + (ब)^{२}$

$$= \frac{स्प्ज^{२}}{(१ + स्प्ज^{२})^{२}} (य_{१} - स्प्जक्ष_{१} - घ)^{२}$$

$$+ \frac{१}{(१ + स्प्ज^{२})^{२}} (य_{१} - स्प्जक्ष_{१} - घ)$$

$$= \frac{(१ + स्प्ज^{२})}{(१ + स्प्ज^{२})^{२}} (य_{१} - स्प्जक्ष_{१} - घ)^{२}$$

वर्गमूळ काढिले

$$मक = \frac{य_{१} - स्प्जक्ष_{१} - घ}{\sqrt{(१ + स्प्ज^{२})}} .$$

१३१. रेषेच्या समीकरणाचें समान्य गुणकाचे स्वरूप

$$कक्ष + चय + ट = ०$$

असे आहे. यावरून मक लंबाची लांबी किती हे ठरवू. समीकरण च नें भागिलें तर—

$$य = - \frac{क}{च} क्ष - \frac{ट}{च}$$ असें स्वरूप होतें.

किंवा $$य + \frac{क}{च} क्ष + \frac{ट}{च} = ०$$

यामध्ये $स्प्ज = - \frac{क}{च}$ आणि $घ = - \frac{ट}{च}$

ह्यावरून $य_{१} - स्प्जक्ष_{१} - घ = य_{१} + \frac{क}{च} क्ष_{१} + \frac{ट}{च}$

आणि $१ + स्प्ज^{२} = १ + \frac{क^{२}}{च^{२}} = \frac{क^{२} + च^{२}}{च^{२}}$

$$मक^{२} = \frac{\left(य_{१} + \frac{क}{च} क्ष_{१} + \frac{ट}{च} \right)^{२}}{क^{२} + च^{२}} \times \frac{च^{२}}{१}$$

$$= \frac{कक्ष_{१} + चय + ट}{\sqrt{(क^{२} + च^{२})}} .$$

१३२. प्रस्थापित बिन्दुच्या स्थलांतराचा परिणाम.

घक्ष, घय ह्या अक्षांच्या दिशा न बदलता घ हा प्रस्थापित बिंदु घ, ह्या स्थानीं नेला तर बिंदूचे भुजात कसा बदल होतो हें ठरवावयाचें.

य   यं
प
(क्षं, यं) घं   म   क्षं
घ   क   ल   क्ष

घ हा पूर्वीचा प्रस्थापित बिदु आणि घक्ष, घय हे पूर्वीचे अक्ष, आणि घ' हा नवा प्रस्थापित बिदु आणि घ'क्ष', घ'य' हे नवे अक्ष. प ह्या बिंदूचे (क्ष, य,) हे पूर्वीचे भुज कोटि, आणि याच बिंदूचे (क्ष', य') हे नवे भुज कोटि.

घ प्रस्थापित बिंदूचे भुज (क्ष = ०) आणि (य = ०) आहेत आणि घ' बिंदूचे भुज क्ष = ज; य = ग (ज, ग) आहेत.

प पासून घक्ष वर पल लंब केला तेव्हां

$$क्ष = घल = घक + घ'म = ज + क्ष'$$

$$य = पल = घ'क + पम = ग + य'$$

यावरून ठरते की, नवीन भुज कोटि मध्ये नव्या प्रस्थापित बिंदूचे भुज कोटि मिळवावे, म्हणजे पूर्व भुज कोटि होतात.

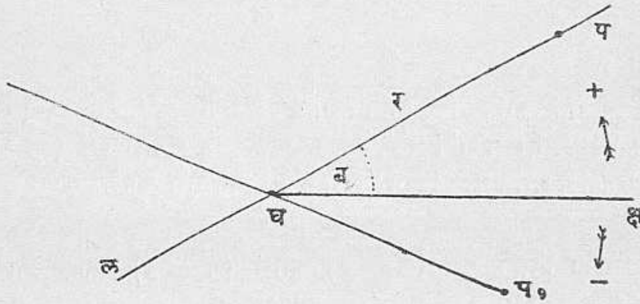
चलत्रिज्या आणि वृत्तानुसारी बिंदु निर्णायकें

१३३. सरळ रेषेविषयीचे बैजिक–भूमितीचे सिद्धांत एथपर्यंत जे सिद्ध केले, त्यांत अन्योन्य लंबभुज बिंदु निर्णायकें वापरली ; दुसरी तीर्यग् भुज बिंदुनिर्णायकें आहेत, परंतु त्यांचा विचार येथें केला नाहीं. चलत्रिज्या आणि वृत्तानुसारी बिंदु निर्णायकांचा उपयोग, ग्रहांच्या गति आणि त्यांच्या कक्षांच्या वक्ररेषांचीं समीकरणें, यांचीं उत्तरें

काढून ग्रहाचें इष्टकालचें स्थान शोधणें, ह्या कार्यामध्यें सर्व प्रसंगीं केला आहे. ह्या बिंदु निर्णायिकास चलत्रिज्या आणि वृत्तानुसारी असें नांव दिलें आहे. पण संक्षेपें त्यास वृत्तानुसारी बिंदुनिर्णायकें असेंच आपण म्हणू. ह्या निर्णायकाकरिता प्रस्थापित असें काय काय ठरवावें लागतें त्यांचा विचार खाली केला आहे.

१३४. ज्याचें स्थान निश्चित आहे असा एक बिंदु आणि त्या बिंदूतून एका ठराविक दिशेनें गेलेली एक सरळ रेषा ह्या साधनांनीं बिंदूच्या (कोणत्याहि) स्थानाचा निर्णय करिता येतो.

घ क्ष ही एक रेषा घ बिंदूतून गेलेली आहे. ह्या रेषेला प्रस्थापित रेषा म्हणावे किंवा अक्ष म्हणा. आणि घ हा प्रस्थापित बिंदु आहे. ज्या बिंदूच्या स्थानाचा



निर्णय लिहावयाचा तो प बिंदु आहे. एक चलरेषा कल्पीली आहे तिचें एक टोक घ बिंदूत बद्ध केलेले आहे, आणि ती रेषा घ टोका समोवतीं उजवीकडून डावीकडे पण घक्ष च्या वरच्या अंगास फिरत आहे. ह्या फिरण्यानें घ स्थळीं जो कोन होतो तो कोन, ज्या बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय करावयाचा त्या साधनापैकीं एक साधन आहे. चलरेषा घक्ष रेषेपासून प बिंदूपर्यंत फिरत आली आहे यामुळें तिच्या भ्रमणानें ब कोन झाला आहे. आणि प बिंदूचे घ पासून अंतर घप रेषेइतके आहे. घप रेषेला आपण र म्हणू. तेव्हां र आणि ब ह्या दोन निर्णायकांनी प बिंदूच्या स्थानाचा निर्णय होतो. प्रसंगविशेषी प बिंदूचा नामनिर्देश (र, ब) ह्या लेखनानें करितां येतो.

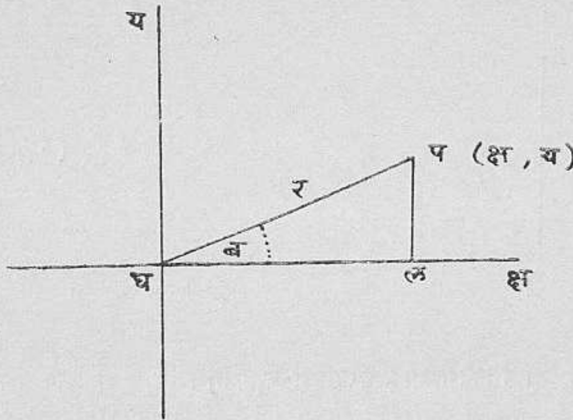
१३५. ब कोन आणि र रेषा यासंबंधानें धनर्ण संकेत स्वीकारले आहेत. त्यांत विशेष लक्षांत ठेवण्याची गोष्ट म्हणजे ब कोन चल किंवा भ्रामक रेषेच्या कोणत्या भ्रमणानें झालेला आहे. घप रेषा घ क्ष रेषेला मिळून गेलेली आहे. अशा स्थितींत भ्रमण नाहीं व कोनही नाहीं व घप रेषेचा प बिंदु घक्ष रेषेंतच आहे, अर्थात ब = ०

आता घप रेषा उर्ध्व मार्गानें बाणाग्राप्रमाणें भ्रमण करील तर ब कोन धन समजावा. मग ते भ्रमण किती ही होवो. पण ती रेषा घक्षच्या खालच्या अंगानें जर भ्रमण करील तर ब कोन ऋण समजावा. घप रेषा कोणत्याहि स्थितींत असो ती दोन कोन दाखविते--एक धन व दुसरा ऋण, आणि ते कोन असे असतात कीं, धनर्णत्व सोडून (दोन्ही धन किंवा दोन्ही ऋण मानून) त्यांची बेरीज केली तर ती ४ काटकोन किंवा घप रेषेचें पूर्ण भ्रमण इतकी दिसते.

र रेषेविषयीं धनर्ण संकेत आहे. तो असा आहे कीं, ती रेषा घ बिंदूपासून प बिंदूकडे मोजली तर धन मानावी, पण ती घ बिंदू पासून प च्या विरुद्ध दिशेला मोजली तर ती ऋण समजावी. आकृतीत घप रेषा धन असून घल रेषा ऋण मानिली आहे.

१३६. अन्योन्य लंबभुज बिंदु निर्णायकें यांचा वृत्तानुसारी बिंदुनिर्णायकाशी संबंध.

दोन्ही पद्धतीत घ हा प्रस्थापित बिंदु आणि घ क्ष अक्ष यात भिन्नत्व नाहीं. खालच्या आकृतींत लंबभुज आणि वृत्तानुसारी दोन्ही निर्णायकें दाखविली आहेत. प हा एक बिंदु आहे आणि (क्ष, य) त्याचे अन्योन्य लंब भुज आहेत. तसेच त्याच बिंदूचे



(र, ब) वृत्तानुसारी निर्णायकें आहेत.

घप = र आणि पघक्ष कोन = ब कोन

आतां घल = क्ष कोटि आणि पल = य भुज आहे.

पण $\frac{पल}{घप} = \frac{य}{र}$ = भुजज्या ब,

म्हणून य = र भुब ;

आणि $\frac{घल}{घप} = \frac{क्ष}{र}$ = कोभुजज्या ब,

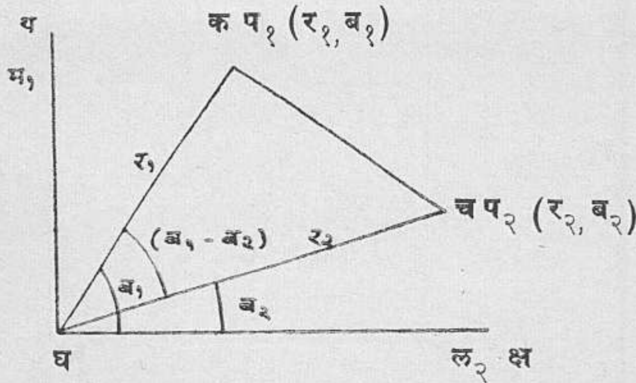
म्हणून क्ष = र कोभु ब.

त्याप्रमाणे क्ष = र कोभुब आणि य = र भुब.

असा त्यांचा अन्योन्य संबंध आहे.

१३७. दिलेल्या दोन बिंदूंमध्ये अंतर किती असतें हें शोधावयाचें.

$प_१$ आणि $प_२$ हे दोन बिंदु आहेत. $प_१$ ची निर्णायकें $(र_१, ब_१)$ आहेत आणि $प_२$ ची निर्णायकें $(र_२, ब_२)$ ही आहेत. तेव्हां $प_१ प_२$ ह्या रेषेची लांबी ठरवावयाची



$प_१$ घ $प_२$ हा त्रिकोण आहे. त्याच्या $र_१$ आणि $र_२$ ह्या दोन बाजु आणि त्याच्यामधील $ब_१ - ब_२$ हा कोन दिला आहे. तेव्हां त्रिकोणमितीच्या लेख ७० समीकरण (१) प्रमाणें.

$$(प_१ प_२)^२ = र_१^२ + र_२^२ - २ र_१ र_२ \text{ कोभु } (ब_१ - ब_२)$$
$$क च = \sqrt{र_१^२ + र_२^२ - २ र_१ र_२ \text{ कोभु } (ब_१ - ब_२)}$$

१३८. दिलेल्या दोन बिंदुमधील अंतर, वृत्तानुसारी निर्णायकांनीं साधिले. ते समीकरण वर आहे, त्यांत लंबभुज निर्णायकें ठेविल्यानें समीकरणाचें स्वरूप कसें होते ते ठरवावयाचे. तें समीकरण असें—

$$(कच)^2 = (प_1 प_2)^2 = र^2_1 + र^2_2 - 2 र_1 र_2 कोभु (ब_1 - ब_2)$$

$$क्ष^2_1 = र^2_1 कोभु^2 ब_1 ;\ य^2_1 = र^2_1 भु^2 ब_1$$

$$क्ष^2_1 + य^2_1 = र^2_1 (कोभु^2 ब + भु^2 ब) = र^2_1 \ [कोभु^2 ब + भु^2 ब = 1]$$

ह्या प्रमाणेंच $क्ष^2_2 + य^2_2 = र^2_2$

तेव्हां $(क्ष^2_1 + क्ष^2_2) + (य^2_1 + य^2_2) = र^2_1 + र^2_2 ;\ \cdots\cdots$ (अ)

तसेंच $क्ष_1 क्ष_2 = र_1 र_2 कोभुब_1 कोभुब_2$

आणि $य_1 य_2 = र_1 र_2 भुब_1 भु ब_2$

$$(क्ष_1 क्ष_2 + य_1 य_2) = र_1 र_2 (को भु ब_1 को भु ब_2 + भुब_1 भुब_2)$$

$$= र_1 र_2 कोभु (ब_1 - ब_2) \ [लि. ६० स. (४)] \cdots (ब)$$

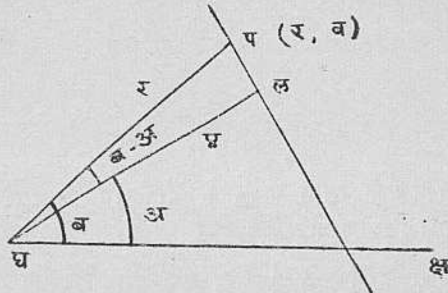
ब समीकरणाची दुपट अ समीकरणात वजा केली तेव्हां.

$$(क्ष^2_1 - 2क्ष_1 क्ष_2 + क्ष^2_2) + (य^2_1 - 2य_1 य_2 + य^2_2)$$

$$= र^2_1 + र^2_2 - 2र_1 र_2 कोभु (ब_1 - ब_2)$$

म्हणून $(क्ष_1 - क्ष_2)^2 + (य_1 - य_2)^2 = र^2_1 + र^2_2 - 2र_1 र_2 कोभु (ब_1 - ब_2)$

१३९. वृत्तानुसारी बिंदु निर्णायकांनीं सरळ रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



प हा पल रेषवरील कोणतातरी बिंदु आहे. त्याची निर्णायके (र, ब) आहेत. घ पासून पल वर घल लंब केला. तेव्हां पलघ हा काटकोन त्रिकोण आहे. म्हणून

$$घल = घप \ कोभु \ पघल$$

म्हणजे $$छ = र \ कोभु (ब - अ)$$ [हें त्या रेषेचें समीकरण]

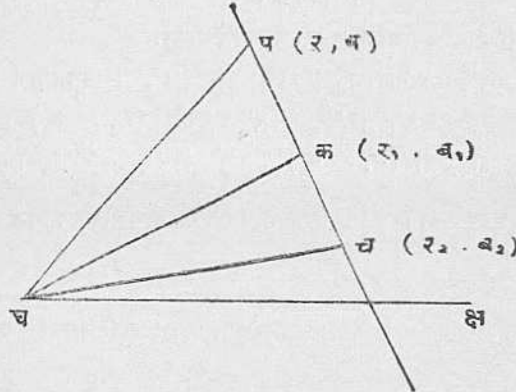
१४०. सरळ रेषेच्या वृत्तानुसारी समीकरणावरून भुजानुसारी समीकरण बनतें, तें असें---

$$\text{ठ} = \text{र कोभुब कोभुअ} + \text{र भुब भुअ},$$
$$= \text{क्ष कोभुअ} + \text{य भुअ [ले. १२०]}$$

कारण र कोभुब = क्ष, आणि र भुब = य [ले. १३६]

१४१. दिलेल्या दोन बिंदुमधून जाणाऱ्या सरळ रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

क च हे दोन बिंदु दिलेले आहेत यांचे वार्तिक अनुक्रमें (र_1 ब_1) आणि (र_2 ब_2) हे आहेत. ह्या दोन बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेत प (र, ब) हा एक कोणता तरी बिंदु घेतला. घप, घक, घच हे बिंदु सांधले.



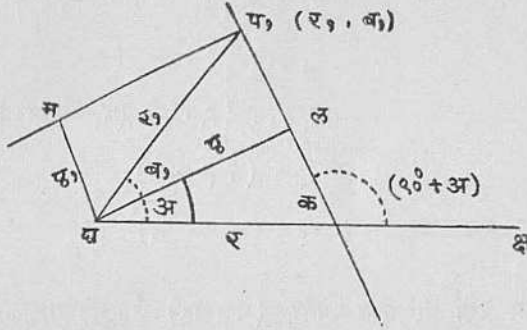
ह्या आकृतीत पघक आणि कघच हे दोन त्रिकोण आहेत आणि त्यांच्या बेरजेबरोबर पघच त्रिकोण आहे.

$$\text{पघक त्रि. चें क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\ \text{र.र}_1\ \text{भुजज्या पघक कोन}$$
$$= \tfrac{1}{2}\ \text{रर}_1\text{भु}(\text{ब} - \text{ब}_1)$$
$$\text{तसेच कघच त्रि. चें क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\text{र}_1\text{र}_2\text{भु}(\text{ब}_1 - \text{ब}_2)$$
$$\text{पघच त्रि. चें क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\text{रर}_2\ \text{भु}(\text{ब} - \text{ब}_2)$$

म्हणून

$$\text{रर}_1\ \text{भु}(\text{ब} - \text{ब}_1) + \text{र}_1\text{र}_2\text{.भु}(\text{ब}_1 - \text{ब}_2) = \text{रर}_2\text{भु}(\text{ब} - \text{ब}_2).$$

१४२. जी रेषा (र, २प) ह्या बिंदूतून जाते आणि प्रस्थापित घक्ष रैषेशी (९० + अ) अंशांचा कोन करिते त्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



कल रेषा घक्ष रेषेला क बिंदूत छेदिते. घक रेषा र लांबीची आहे. क बिंदूचे वृत्तानुसारी निर्णायकें (र, ०) आहेत. आणि प्रस्थापित रेषेशी कल रेषा (९० + अ) अंशांचा कोन करिते. ह्या कल रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

घ पासून कल वर घल लंब केला. तो ष लांबीचा आहे ल घ क्ष कोन अ अंशांचा आहे. तेव्हां

$$ष = र कोभुअ$$

क बिंदुची वार्तिके (र, ०) आहेत ह्यामध्ये ब कोन० आहे म्हणजे हें समीकरण

$$ष = र कोभु (० - अ) = रकोभुअ. [कोभु (- अ) = कोभुअ.]$$

किंवा $ष = र कोभ (ब - अ)$.

१४३. दिलेल्या रेषेवर तिच्यांतील दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढलेली जी रेषा तिचें समीकरण ठरवावयाचें.

वरच्या लेखांतील आकृती पहा.

प हा दिलेल्या कल ह्या रेषेतील दिलेला बिंदु आहे. प बिंदूतून कल वर लंब असणारी पम रेषा आहे तेव्हां पम रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

घ पासून पम वर घम लंब केली घम = $ष_1$ आहे.

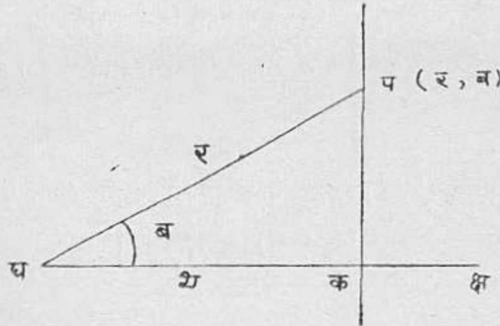
$प_1$ क रेषेचें समीकरण

$$ष = र_1 कोभु (ब_1 - अ)$$

$\text{प}_१$ हा बिंदु $\text{प}_१$ म रेषेतही आहे तेव्हां $\text{प}_१$ म चें समीकरण असे—

$$\begin{aligned} \text{ठ}_१ &= \text{र}_१ \text{ कोभु} \left\{ \text{ब}_१ - (\text{अ} + ९०^\circ) \right\} \\ &= \text{र}_१ \text{ कोभु} \left\{ \text{ब}_१ - \text{अ} - ९०^\circ \right\} \\ &= - \text{र}_१ \text{ कोभु} \left\{ १८० - (\text{ब}_१ - \text{अ} - ९०) \right\} \\ &= - \text{र}_१ \text{ कोभु} \left\{ ९० - (\text{ब}_१ - \text{अ}) \right\} \\ &= - \text{र}_१ \text{ भु } (\text{ब}_१ - \text{अ}) \\ &= + \text{र}_१ \text{ भु } (\text{अ} - \text{ब}_१) \end{aligned}$$

१४४. जी रेषा प्रस्थापित रेषेवर (घक्ष वर) लंब होईल, आणि ती रेषा प्रस्थापित रेषेला घ पासून ड अंतरावर छेदील त्या रेषेचें वृत्तानुसारी समीकरण सिद्ध करा.



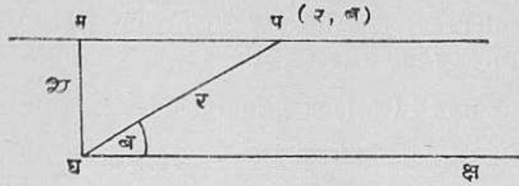
घक्ष रेषेवर पक रेषा लंब आहे, आणि घक अंतर = ड आहे ह्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करणें.

पक रेषेंत प (र, ब) हा कोणता तरी बिंदु आहे.

$$\frac{\text{ड}}{\text{र}} = \text{कोभुब}$$

म्हणून $\text{ड} = \text{र कोभुब}$ [हे त्या रेषेचें समीकरण.]

१४५. जी रेषा प्रस्थापित रेषेशी समांतर आहे, आणि त्या दोहोत ঔ लंबांतर आहे. त्या रेषेचें वृत्तानुसारी समीकरण सिद्ध करा.



$$\frac{\text{ঔ}}{\text{र}} = \text{भु घपम} = \text{भुब}$$

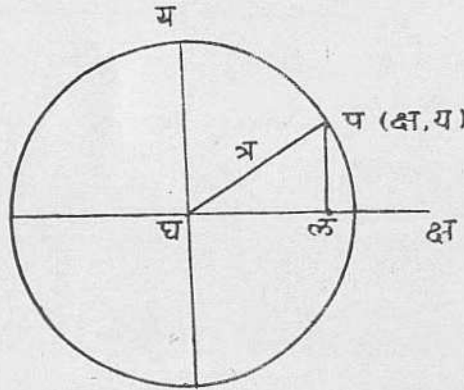
म्हणून $\quad$ $\text{ঔ} = \text{र भुब}.$

वर्तुळ

अन्योन्य लंबाक्ष

१४६. प्रस्थापित घ बिंदु ज्याचा मध्य आहे, आणि ज्याची त्रिज्या त्र आहे, अशा वर्तुळाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

वर्तुळाच्या परिघावर प (क्ष, य) हा कोणतातरी बिंदु आहे.



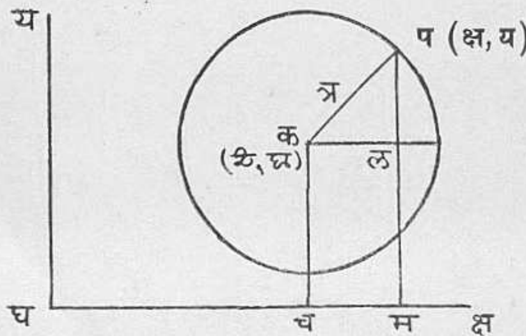
प बिंदूपासून घ क्ष वर प ल लंब केला. तेव्हां

$$\text{पल}^2 + \text{घल}^2 = \text{घप}^2$$

$$\text{घल} = \text{क्ष},\quad \text{पल} = \text{य},\quad \text{घप} = \text{त्र}$$

म्हणून $\text{क्ष}^2 + \text{य}^2 = \text{त्र}^2$ [हें वर्तुळाचें समीकरण होय.]

१४७. ज्या वर्तुळाचा मध्य बिंदु क स्थानी आहे, आणि ज्याची त्रिज्या त्र आहे, अशा वर्तुळाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें



क बिंदु वर्तुळाचा मध्य आहे. त्याचे भुज (ष्ठ, घ) आहेत.
वर्तुळाच्या परीघावर प (क्ष, य) कोणता तरी बिंदु आहे.

क आणि प बिंदूपासून घक्ष वर कच, पम लंब केले आणि क पासून पम वर कल लंब केला.

क प ल हा काटकोन त्रिकोण आहे. म्हणून

$$कल^2 + पल^2 = कप^2$$

$$पण \quad कल = चम = क्ष - ष्ठ$$

$$पल = पम - कच = य - घ$$

म्हणून $(क्ष - ष्ठ)^2 + (य - घ)^2 = त्र^2$. [हें त्या वर्तुळाचें स.]

१४८. वर सिद्ध केलेल्या $(क्ष-ष्ठ)^2 + (य-घ)^2 = त्र^2$ ह्या समीकरणाचें स्वरूप.

$$क्ष^2 + य^2 - २\ ष्ठक्ष - २\ घय + ष्ठ^2 + घ^2 - त्र^2 = ० \ldots (१)$$
किंवा $क्ष^2 + य^2 + २\ गक्ष + २\ फय + स = ० \quad \ldots\ldots (२)$.

हें वर्तुळाच्या समीकरणाचें सर्वसामान्य स्वरूप आहे.

(अ) (१) ह्या समीकरणात ष्ठ = ०, आणि घ = ० असेल तर समीकरण $क्ष^2 + य^2 = त्र^2$ असें होईल.

ह्यावरून दोन गोष्टी दिसून येतात. ष्ठ आणि घ हे वर्तुळ मध्याचे भुज कोटि आहेत. हे ० असतील तर प्रस्थापित घ बिंदूचेच भुज कोटि शून्य असतात म्हणून वर्तुळाचा मध्य घ बिंदूत आहे, असें सिद्ध होते.

(ब) (१) यांतील वर्तुळाचा परिघ प्रस्थापित घ बिंदूतून गेला असेल तर समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल. कारण क्ष = ०, य = ०
म्हणून $ष्ठ^2 + घ^2 = त्र^2$.

आणि समीकरणाचे सामान्य स्वरूप.

$$क्ष^2 + य^2 - २\ ष्ठक्ष - २\ घ\ य = ०$$

असे असेल तर, त्या वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित घ बिंदूत जात आहे.

(क) (१) वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित घ बिंदूतून जात आहे. आणि वर्तुळाचा मध्य क्ष अक्षावर आहे, म्हणजे क्ष अ क्ष वर्तुळ मध्यांतून जात आहे, तर छ = ० आणि ಆ = त्र होईल आणि समीकरण अशा स्वरूपाचे होईल--

$$क्ष^2 + य^2 -- २ ಆ क्ष = ०$$

(२) वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित घ बिंदूतून जात आहे. आणि वर्तुळाचा मध्य य अक्षांत आहे, म्हणजे य अ क्ष वर्तुळ मध्यातून जात आहे तर, तर ಆ = ० छ = त्र होईल तेव्हां समीकरणाचें स्वरूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल :--

$$क्ष^2 + य^2 -- २ छ य = ०$$

१४९. दोन अव्यक्तांचें वर्गसमीकरण असले, म्हणजे क्ष आणि य ह्या दोन अव्यक्तांचें वर्गसमीकरण असले तर त्याच्या निरनिराळ्या स्वरूपानें निरनिराळें बिंदुनिधान दाखविते.

वर्तुळ हे बिंदुनिधान आहे. " मध्यबिंदूपासून त्रिज्यापरिमित अंतरावरच्या बिंदूचें निधान हें वर्तुळ होय. "

ह्याप्रमाचेंच परवलय, दीर्घवलय आणि उद्वलय यांचीं समीकरणें ही क्ष आणि य ह्या अव्यक्तांच्या वर्ग समीकरणानें दाखविली जातात. तीही समीकरणें बिंदु-निधानांचीच असतात.

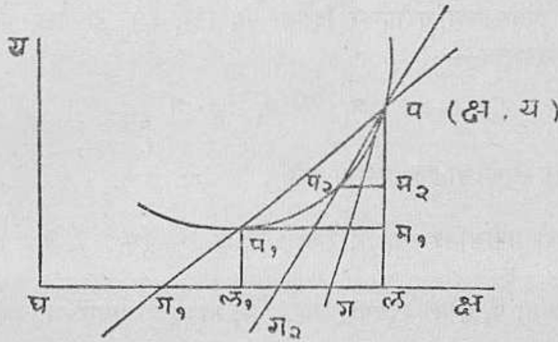
वरच्या लेखांतील समीकरण (२) मध्यें जे स्थीर संख्यात्मक गुणक ग, फ, स दिले आहेत त्यांचा एकमेकाशी व अव्यक्त क्ष, य ह्यांशीं जसा संबंध असेल त्याप्रमाणें तें वर्गसमीकरण वर्तुळादि कोणत्या बिंदुनिधानाचे आहे याचा निर्णय करितां येतो, तो विचार क्रमाक्रमानें पुढें दाखविला जाईल.

१५०. **व्याख्या.**--वर्तुळाच्या परीधावर दोन बिंदु आहेत. त्या दोन्ही बिंदूंतून जाणाऱ्या सरळ रेषेला आपण वर्तुळाची छेदनरेषा म्हणतो. ह्या दोन बिंदुंपैकीं एक बिंदु स्थिर असून दुसरा बिंदु त्या स्थिर बिंदूकडे गमन करीत आहे. ह्या गमना-मुळें ती छेदनरेषा आपली दिशा बदलीत राहील. ज्या प्रसंगीं तो चल बिंदु स्थीर बिंदूच्या अत्यंत समीप जाईल त्या प्रसंगीची जी छेदनरेषा तिला त्या वर्तुळाची त्या स्थीर बिंदूतून गेलेली स्पर्शरेषा म्हणतात.

('स्पर्शरेषा' हा शद्ब त्रिकोणमितीमध्ये आहे, आणि भूमितीमध्येही आहे. तथापि वरच्या व्याख्येतील स्पर्शरेषा हा भूमितीमधील शद्ब सरलरेषेचा दर्शक आहे, आणि त्रिकोणमितीतील स्पर्शरेषा हा शद्ब गुणोत्तरदर्शक असून केवलसंख्यात्मक आहे.)

(जी संख्या हव्या त्या परिमाणास योजिली जाते तिला केवलसंख्या म्हणतात. केवल संख्येला एकं हेच परिमाण असते. परिमाण संख्येला एकं हें परिमाण असून दुसरें हात, कोस, दिवस, शेर वगैरे परिमाण असतें.)

१५१. वर्तुळाच्या परीघावर प (क्ष, य) हा एक स्थिर बिंदु आहे आणि $प_{1} \left\{ (क्ष + \nabla क्ष), (य + \nabla य) \right\}$ हा दुसरा चल बिंदु आहे.



तो प बिंदूला मिळेपर्यंत प कडे गमन करीत आहे, प $प_{1}$ ही रेषा सांधून $ग_{1}$ कड वाढविली तेव्हां प$प_{1}$ $ग_{1}$ ही वर्तुळाला छेदणारी रेषा आहे.

प आणि $प_{1}$ ह्या दोन बिंदुंपासून घक्ष वर पल व $प_{1}$ $ल_{1}$ हें लंब काढिले. तसेच $प_{1}$ पासून पल वर $प_{1}$ $म_{1}$ लंब काढिला आतां—

$$प\, म_{1} = पल - म_{1} ल = य - (य + \Delta य) = - \Delta य$$

$$प_{1}\, म_{1} = घल - घ\, ल_{1} = क्ष - (क्ष + \Delta क्ष) = - \Delta क्ष$$

ह्यावरून प $ग_{1}$ ह्या रेषेचे क्ष अक्षाशी तीर्यगत्व प $ग_{1}$ क्ष कोनाइतके आहे म्हणजेच प $प_{1}$ $म_{1}$ कोनाबरोबर आहे. पण प $प_{1}$ $म_{1}$ हा कोन ब अक्षरानें दाखविला तर

$$स्प\, ब = \frac{प\, म_{1}}{प_{1}\, म_{1}} = \frac{\nabla य}{\nabla क्ष}.$$

आतां $प_१$ बिंदु प बिंदूकडे आला तर $पग_२$ ह्या रेषेचे तीर्यगत्व $प प_२ म_२$ कोना-इतके होईल. आणि ते ब' कोनाइतकें झालें तर वरच्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल कीं

$$स्प\ बं = \frac{पम_२}{प_२ म_२} = \frac{\nabla य}{\nabla क्ष}.$$

शेवटी $प_१$ हा बिंदु प बिंदूशीं जाऊन मिळाला तर वर्तुळाला छेदणारी $पग_१$ रेषा पग अशी होईल. म्हणजे वर्तुळाच्या परीघावरील अतिसन्निध असणाऱ्या दोन बिंदूतून जाणारी रेषा होईल, म्हणजे ती वर्तुळाला स्पर्श करील.

१५२. वर्तुळाच्या परीघावर दिलेला $प_१ (क्ष_१ य_१)$ हा बिंदु आहे. ह्या दिलेल्या बिंदूपासून—

$$क्ष_१^२ + य_१^२ = त्र^२$$

ह्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढावयाची आहे.

वर्तुळाच्या परीघावर $प_२ \left\{ (क्ष_१ + \triangle क्ष_१) + (य_१ + \triangle य_१) \right\}$ हा बिंदु घेतला. व तो $प_१$ ह्या बिंदुसमीप आहे. $प_२$ बिंदूतून जाणारें वर्तुळही तेंच आहे, म्हणून—

$$क्ष_१^२ + य_१^२ = (क्ष_१ + \Delta क्ष_१)^२ + (य_१ + \Delta य_१)^२$$

स्थान विनिमयानें

$$(क्ष_१ + \Delta क्ष_१)^२ + (य_१ + \Delta य_१)^२ - क्ष_१^२ - य_१^२ = ०$$

$$२\, क्ष_१ \Delta क्ष_१ + (\Delta क्ष_१)^२ + २\, य_१ \Delta य_१ + (\Delta य_१)^२ = ०$$

ह्या समीकरणांत $\triangle क्ष_१$ आणि $\triangle य_१$ हीं पदें $प_१$ आणि $प_२$ ह्या दोन बिंदूंच्या भिन्नत्वामुळें अनुक्रमें $क्ष_१$ $य_१$ ह्या भुजांमध्यें होणारी वाढ किंवा घट आहे. पण हे बिंदु अतिसंन्निध आल्यास ती वाढ किंवा घट अत्यंत सूक्ष्म अशी संख्या होईल आणि त्यांचे वर्ग म्हणजे $(\triangle क्ष_१)^२$, $(\triangle य_१)^२$ तर ० होणार म्हणून

$$२\, क्ष_१ \Delta क्ष_१ + २\, य_१ \Delta य_१ = ०$$

$$\frac{\Delta य_१}{\Delta क्ष_१} = - \frac{क्ष_१}{य_१}$$

पण वरच्या लेखाप्रमाणें $\frac{\triangle य_१}{\triangle क्ष_१}$ हें पद ($क्ष_१, य_१$) ह्या बिंदूतून काढि-लेल्या स्पर्शरेषेचे घक्ष अक्षाशी जें तीर्यगत्व त्या कोनाची स्पर्शरेषा आहे. ही स्पर्शरेषा ($क्ष_१, य_१$) ह्या बिंदूतून जाते आणि घक्ष अक्षाशी $\frac{\triangle य_१}{\triangle क्ष_१}$ ही किंवा $-\frac{क्ष_१}{य_१}$ ही ज्या कोनाची स्पर्शरेषा आहे इतक्या अंशांचा कोन करिते, ह्या रेषेचे समीकरण लेख १२५ प्रमाणें खाली दिल्याप्रमाणें आहे :—

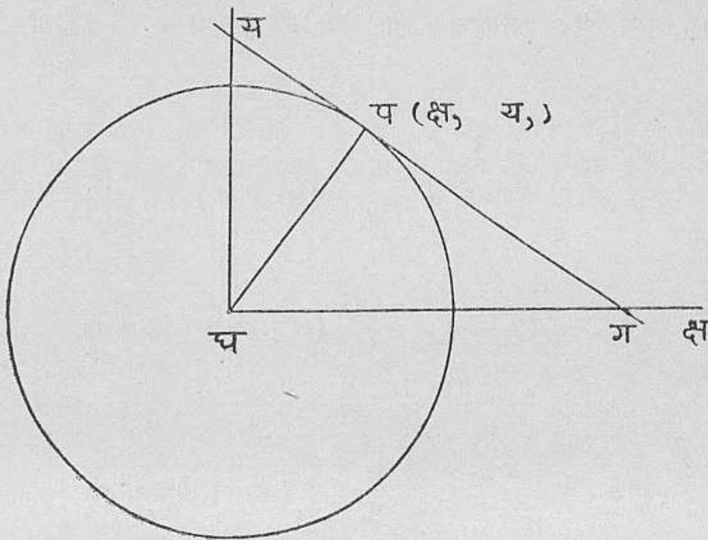
$$य - य_१ = - \frac{क्ष_१}{य_१} (क्ष - क्ष_१) \text{ [हें स्पर्शरेषेचें स.]}$$

किंवा $य य_१ + क्ष क्ष_१ = क्ष_१^२ + य_१^२$

पण $क्ष_१^२ + य_१^२ = त्र^२$

म्हणून $क्ष क्ष_१ + य य_१ = त्र^२$ [हें स्प. रेषेचें समी. होय.]

१५३. **व्याख्या.**—जी रेषा स्पर्शरेषेवर तिच्यांतील स्पर्श बिंदूतून जाते आणि तिजवर लंब असते त्या रेषेला स्पर्लंब रेषा म्हणावे. जसे (खालच्या आकृतींत पहा).



वर्तुळाला प बिंदूतून पग स्पर्श रेषा काढिलेली आहे. ह्या रेषेतील प बिंदूपासून तिजवर पक ही लंबरेषा केली. हिला स्पर्लंबरेषा म्हणावें.

वर्तुळाला त्याच्या परीघावर असलेल्या बिंदूपासून स्पर्लंबरेषा होणाऱ्या किंवा असलेल्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

$$क्ष^2 + य^2 = त्र^2$$

ह्या वर्तुळाच्या परीघावर ($क्ष_1$, $य_1$) हा बिंदु आहे. ह्या बिंदूपासून वर्तुळास काढलेली स्पर्शरेषा—

$$क्ष\,क्ष_1 + य\,य_1 = त्र^2$$

ही आहे. आणि ह्याच समीकरणाचे स्वरूप—

$$य - य_1 = -\frac{क्ष_1}{य_1}(क्ष - क्ष_1)$$

असेंही आहे. ह्या समीकरणांत रेषेचे क्ष अक्षाशी तीर्यगत्वदर्शी स्पर्शरेषात्मक गुणक — $\frac{क्ष_1}{य_1}$ हा आहे, हा गुणक $\frac{1}{+\frac{क्ष_1}{य_1}}$ असा लिहिल्यानें जें समीकरण होईल ते, त्या रेषेवर लंब असणाऱ्या रेषेचें समीकरण होतें. असे मागे सिद्ध केले आहे. लेख १२८ उपसिद्धांत २ पहा. तेथे सिद्ध केले कीं—

$$स्प्ज = \frac{1}{-स्प्ज'}$$

म्हणून

$$य - य_1 = \frac{1}{+\frac{क्ष_1}{य_2}}(क्ष - क्ष_1)$$

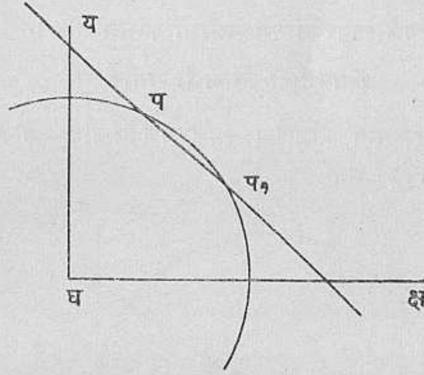
किंवा $$(य - य_1) = \frac{य_1}{क्ष_1}(क्ष - क्ष_1)$$

$$\frac{य - य_1}{य_1} = \frac{क्ष - क्ष_1}{क्ष_1}$$

म्हणजे $$\frac{य}{य_1} = \frac{क्ष}{क्ष_1}$$ [हें स्पर्लंब रेषेचें स. होय.]

उपसिद्धांत—वर्तुळाच्या स्पर्शरेषेवरील स्पर्लंबरेषा वर्तुळाच्या मध्यबिंदूतून जाते.

१५४. ज्यांचा प्रस्थापित बिंदु आणि लंब भुज अक्ष एकच आहेत असे एका वर्तुळाचे समीकरण क्ष^{२}+ य^{२} = त्र^{२} दिले आहे, आणि एका सरळ रेषेचें समीकरण य=स्पज क्ष+घ दिले आहे. तर ही रेषा ह्या वर्तुळाला स्पर्श करिते हे कोणत्या आधारानें म्हणता येईल ?



रेषेच्या समीकरणातील य ची किंमत वर्ग करून वर्तुळाच्या समीकरणांत लिहिली तर क्ष ह्या अव्यक्ताचें वर्गसमीकरण बनेल. त्या वर्गसमीकरणापासून क्ष च्या दोन किंमती निघतील. ह्या दोन किंमती वास्तव निघून दोन्ही समान असतील तर प आणि प$_{१}$ बिंदूचे क्ष कोटि समान ठरतील आणि प प$_{१}$ रेषा वर्तुळाला स्पर्श करील.

$$\text{य}^{२} = (\text{स्पज क्ष} + \text{घ})^{२}$$

$$\text{क्ष}^{२} + (\text{स्पज क्ष} + \text{घ})^{२} = \text{त्र}^{२}$$

$$\text{क्ष}^{२} + \text{स्पज}^{२}\text{क्ष}^{२} + २\ \text{स्पजक्ष घ} + \text{घ}^{२} - \text{त्र}^{२} = ०$$

$$\text{क्ष}^{२}\ (१ + \text{स्पज}^{२}) + २\ \text{स्पज घ क्ष} + \text{घ}^{२} - \text{त्र}^{२} = ०$$

सामान्य स्वरूपाचें वर्गसमीकरण अक्ष^{२}+बक्ष^{२}+क=० असें असते आणि त्यांत ब^{२}=४ अक अशी स्थिति असली तर क्ष च्या समान अशा दोन किंमती निघतात.

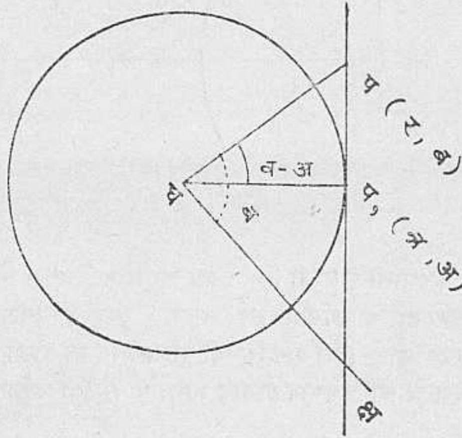
येथें अ = १ + स्पज^{२}; ब=२ स्पजघ आणि क=घ^{२}—त्र^{२} असें आहे म्हणून

$$(२\ स्पजघ)^{२} = ४\ (१ + स्पज^{२}) \times (घ^{२} - त्र^{२})$$
$$४\ स्पज^{२} घ^{२} = (४ + ४\ स्पज^{२})\ (घ^{२} - त्र^{२})$$
$$= ४\ घ^{२} + ४\ स्पज^{२} घ^{२} - ४\ त्र^{२} - ४\ स्पज^{२} त्र^{२}$$
$$घ^{२} = त्र^{२}\ (१ + स्पज^{२}) = त्र^{२}\ छे^{२}\ (ब)$$
$$घ = त्र\ छेब$$

(येथें ब कोन म्हणजे स्पर्शरेषेनें घक्ष अक्षाशीं केलेला कोन.)

वृत्तानुसारी वर्तुळाची समीकरणें

१५५. वर्तुळाचें आणि वर्तुळाच्या स्पर्शरेषेचें वार्तीय समीकरण. वर्तुळाचा मध्य प्रस्थापित घ बिंदूत आहे.



वर्तुळाच्या परीघावरील प्रत्येक बिंदूचे र अंतर त्र बरोबर असतें.

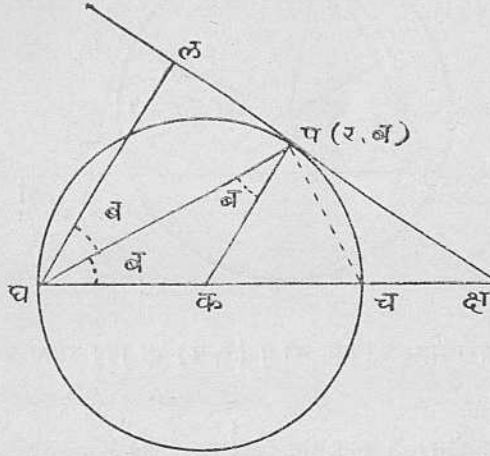
र = त्र (हें वर्तुळाचें वार्तीय समी.)

वर्तुळाला प$_{१}$ (त्र, अ) ह्या बिंदूतून स्पर्शरेषा काढावयाची. प$_{१}$ ह्या बिंदूतून वर्तुळाला स्पर्शरेषा काढली आहे असे घ्या. ती पप$_{१}$ ही आहे तिच्यांत प(र, ब) हा कोणता तरी बिंदु आहे. घपप$_{१}$ हा काटकोन आहे. आणि प घ प$_{१}$ कोन ब-अ आहे तसेच घप$_{१}$ ही त्रिज्या आहे. म्हणून पप$_{१}$ ह्या स्पर्शरेषेचें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें आहे :—

त्र = र कोभु (ब — अ)

१५६. वर्तुळाचें आणि त्याच्या स्पर्शरेषेचें वर्तिय समीकरण ठरवावयाचें. वर्तुळाचा मध्य घक्ष अक्षांत असून, प्रस्थापित घ बिंदु वर्तुळाच्या परीघांत आहे.

क हा वर्तुळाचा मध्य आहे. घच हा वर्तुळाचा व्यास.



म्हणजे घच = २ त्र आहे. आणि घपच कोन काटकोन आहे.

म्हणून घप = घच कोभुब

र = २ त्र कोभुब

पल ही प बिंदूतून काढलेली स्पर्शरेषा आहे. हिच्यावर घ पासून घल लंब केला.

लघप कोन = घपक कोन = पघक कोन = ब

घल = घप कोभुब

= र कोभुब

पण र = २ त्र कोभुब

म्हणून घल = २ त्र कोभु^{2}ब

पण लेख १३९ प्रमाणें पल रेषेचें समीकरण ठ = र कोभु (ब — अ)

येथे ठ = घल आणि अ = २ ब

म्हणून २ त्र को भु^{2} ब = र कोभु (ब — २ ब)

१५७. ज्या वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित अशा घ बिंदूतून जात आहे आणि ज्याचा मध्य अक्षाच्या बाहेर क (त्र, अ) बिंदूत आहे त्याचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

प (र, ब)
च
ट
ब-अ
क (त्र, अ)
अ
घ
क्ष

वर्तुळाच्या परीघावर कोणता तरी प (र, ब) हा बिंदू घेतला घप सांधून त्यावर कट लंब केला.

आतां कघप कोन = घपक कोन = (ब − अ)

घप = २ घट = २ घक कोभु (ब − अ)

म्हणून र = २ त्रकोभु (ब − अ)

अथवा घप = घच कोभु (ब − अ)

म्हणून र = २ त्रकोभु (ब − अ)

१५८. ज्या वर्तुळाचा परीघ प्रस्थापित अशा घ बिंदूतून जात आहे, आणि ज्याचा मध्य घक्ष अक्षाबाहेर क (त्र, अ) बिंदूत आहे त्या वर्तुळाला दिलेल्या प ($र_१$, $ब_१$) बिंदूतून स्पर्शरेषा जी निघेल तिचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

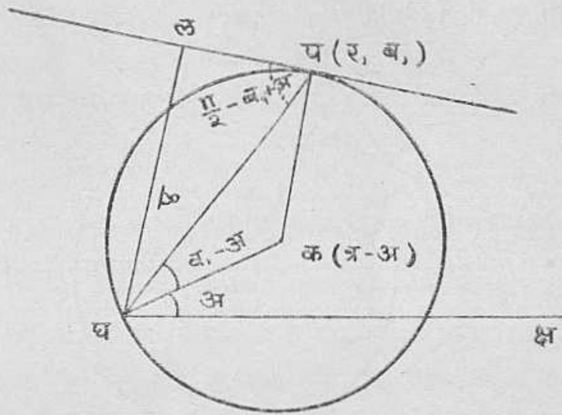
ह्या वर्तुळाचें समीकरण वरच्या लेखाप्रमाणे

र = २ त्र कोभु (ब − अ)

असे आहे.

प बिंदूतून वर्तुळाला पल ही स्पर्शरेषा काढिली आणि त्या स्पर्शरेषेवर घल लंब केला.

क (त्र, अ) वर्तुळाचा मध्य आहे. म्हणून



$$\text{लपघ कोन} = \frac{\pi}{२} - \text{घपक कोन}$$

$$= \frac{\pi}{२} - (\text{ब}_१ - \text{अ})$$

म्हणून
$$\text{घल} = \text{पल भु} \left\{ \frac{\pi}{२} - (\text{ब}_१ - \text{अ}) \right\}$$

$$= \text{र}_१ \text{ कोभु } (\text{ब}_१ - \text{अ})$$

आतां $\text{लघक्ष कोन} = \text{लघप कोन} + \text{पघक्ष कोन}$

$$= (\text{ब}_१ - \text{अ}) + \text{ब}_१ = २\,\text{ब}_१ - \text{अ}$$

तेव्हा पल स्पर्शरेषेचें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें. $\text{घल} = \text{ष्ठ}$

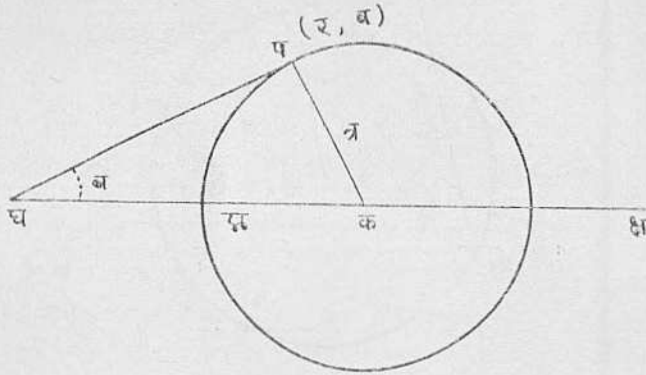
आणि $\text{ष्ठ} = \text{र कोभु } (\text{ब} - \text{अ})$ [लेख १४२.]

म्हणून $\text{र}_१ \text{ कोभु } (\text{ब}_१ - \text{अ}) = \text{र कोभु} \left\{ \text{ब} - (२\,\text{ब}_१ - \text{अ}) \right\}$

१५९. ज्या वर्तुळाचा मध्य क बिंदु घक्ष अक्षावर आहे आणि त्या मध्य बिंदूची वार्तिकें (अ, ०) आहेत त्याचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

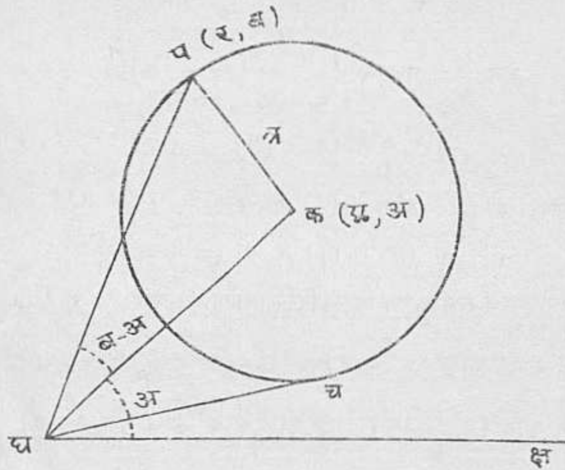
वर्तुळ परीघावर कोणता तरी प (र, ब) बिंदु घेतला. आणि पघ पक बिंदु सांधले,

तेव्हां लेख ७० स. (१) प्रमाणें



$त्र^{२} = र^{२} + घ्न^{२} - २\, घ्न\, र$ कोभुब [हें वर्तुळाचें स. होय.]

१६०. वर्तुळाचा मध्य बिंदु क ($घ्न_{१}$, अ) आहे. आणि त्याची त्रिज्या त्र आहे त्या वर्तुळाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.



तेव्हां लेख ७० स (१) प्रमाणे

$त्र^{२} = र^{२} + घ्न^{२} - २\, घ्न\, र$ कोभु (ब — अ) [हें. व. स. होय.]

परवलय

१६१. शंकुच्छिन्न भूमितिमध्यें परवलय, दीर्घवलय आणि उद्वलय ह्या वक्र-रेषांचीं लक्षणें सांगितलीं आहेत. त्याची समीकरणें व त्यावरून सिद्ध होणारें सिद्धांत येथें दाखवीत आहे. ते सिद्धांत पुष्कळच आहेत. ते येथें देणें अशक्य आहे. ह्या विषयावर स्वतंत्र ग्रंथ व्हावयास पाहिजे. येथें कांहीं सिद्धांतांचीं रूपरेखा मात्र दिली आहे.

१६२. वरच्या तीन आकृती बिंदुनिधानरूपीं आहेत. ह्या आकृतींचें सामान्य लक्षण खालीं लिहिल्याप्रमाणें आहे :

व्याख्या.—एक स्थीर रेषा आणि एक त्या रेषेबाहेरील स्थीर बिंदु आहे. एक चल बिंदु आहे. तो बिंदु, ती रेषा आणि स्थीर बिंदु यांच्याच पातळीमध्यें गमन करीत आहे, हे गमन असें होत आहे कीं, चल बिंदु व स्थीर बिंदु यांमधील अंतर आणि चल बिंदूचें स्थीर रेषेपासून लंबांतर, ह्या दोन रेषांचें गुणोत्तर, त्या चल बिंदूच्या कोणत्याहि प्रत्येक स्थितींत समान असतें. ह्या गुणोत्तरांत चल बिंदु व स्थीर बिंदु यांमधील अंतर अग्रसरस्थानीं आणि चलबिंदु आणि स्थीर रेषा यांमधील लंबांतर उपाग्रसरस्थानीं घेतलें आहे. हें गुणोत्तर (१) साम्यार्थक म्हणजे $\frac{१}{१}$ असेल तर परवलयाची रेषा हे बिंदुनिधान होतें, (२) ऊनतार्थक म्हणजे सम अपूर्णांकात्मक असेल (उदाहरणार्थ $\frac{३}{४}$ असेल) तर दीर्घवलय नामक बिंदुनिधान होतें, आणि (३) गुणोत्तर अधिक्यार्थक असेल (उदाहरणार्थ $\frac{३}{२}$ असेल) तर उद्वलय नामक बिंदुनिधान होतें. ह्या गुणोत्तराला **केंद्रच्युति** असें म्हणतात.

ह्या व्याख्येंतील स्थीर रेषेला नायिका आणि स्थीर बिंदूला केंद्र म्हणतात हें मागे शंकुच्छिन्न प्रकरणीं सांगितलेच आहे.

१६३. परवलयाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

क हें केंद्र आहे आणि मम' ही नायिका आहे. क बिंदूपासून मम' वर कक्ष' लंब काढिला. कक्ष' चें श बिंदूत दोन समान भाग केले. आता कश : शक्ष' हे गुणोत्तर साम्यार्थक आहे म्हणून श बिंदु परवलयावरचा आहे हें व्याख्येवरून कळतें. श बिंदु हा प्रस्थापित घेऊं व त्यास घ असें म्हणूं. शक रेषा वाढवून तिच्यांतील एका बिंदूला क्ष असें नांव देऊं. तेव्हां लंब भुज कोटीचा घक्ष हा क्ष अक्ष आहे. ह्यावर घ बिंदूतून घय लंब केला. घय हा य अक्ष आहे. प हा परवलयावरील (क्ष , य) कोणतातरी

बिंदु आहे. प पासून घक्ष अक्षावर पल लंब केला, तसेंच मम' वर पम लंब केला. कश किंवा शक्ष' परिमाणे आहे असें घेऊं.

आतां लक्षणावरून पाहतां

$$\text{कप} = \text{पम} = \text{लक्ष}' = \text{शक्ष}' + \text{क्ष} = \text{ञ} + \text{क्ष}$$

$$(\text{ञ} + \text{क्ष})^{२} = \text{कप}^{२} = \text{पल}^{२} + \text{कल}^{२} = (\text{क्ष} - \text{ञ})^{२} + \text{य}^{२}.$$

$\text{य}^{२} = ४\,\text{ञक्ष}$ हें परवलयाचें समीकरण होय.

$\text{प}_{१}$ हा परवलयावरील बिंदु आहे, व त्यापासून पक्ष वर $\text{प}_{१}\text{ल}_{१}$ लंब केला, तर

$$\text{प}_{१}\text{ल}_{१}^{२} = ४\,\text{घक} \times \text{घल}_{१}.$$

१६४. वरच्या समीकरणावरून परवलयाच्या स्वरूपाचे अवीष्करण करणारे कांहीं सिद्धांत दिसून येतात, तें असे—

$$\text{य}^{२} = ४\,\text{ञक्ष}$$

ह्या समीकरणात य = ० असेल तर क्ष ची किंमत ० तेव्हां परवलयावर घ हाच बिंदु (०, ०) आहे.

$$\text{य} = \pm\sqrt{४\,\text{ञक्ष}}$$

ह्यावरून क्ष च्या प्रत्येक किंमतीवरून य च्या सारख्या दोन किंमती एक धन व एक ऋण अशा निघतात. ह्यावरून क्ष अक्षानें परवलयाचे जे दोन भाग होतात ते 'समस्वरूपी' असतात.

क्ष ची किंमत ऋण असेल तर य^2 ची किंमत ऋण होते पण हें अशक्य. [कोणत्याहि संख्येचा वर्ग धन असतो.] म्हणून य अक्षाच्या उजवीकडेच परवलय आहे.

क्ष ची किंमत जसजशी वाढेल तसतशी य ची किंमत वाढेल म्हणून परवलयाच्या वक्ररेषेची टोंकें अमर्याद अंतरावरसुद्धां एकमेकास मिळणार नाहींत.

१६५. परवलयाचा केंद्र क्ष अक्षांत असून नायिका य अक्षांत मिळालेली असेल अशी स्थिति असतां परवलयाच्या समीकरणाचें स्वरूप.

लेख १६३ मधील आकृति पहा. क्ष'म हा य अक्ष समजा आणि घ बिंदु क्ष' वर समजा. अर्थात प बिंदूचा क्ष भुज = पम आणि य भुज = क्ष'म = पल

$$\text{क्ष}^2 = \text{पम}^2 = \text{क्ष'ल}^2 = \text{पक}^2 = \text{कल}^2 + \text{पल}^2$$

$$\text{कल}^2 = (\text{क्ष} - 2\,\text{ড})^2 ;\quad \text{पल}^2 = \text{य}^2$$

$$\text{क्ष}^2 = \text{क्ष}^2 - 4\,\text{ড}\text{क्ष} + 4\,\text{ড}^2 + \text{य}^2$$

$$\text{य}^2 = 4\text{ড}\,(\text{क्ष} - \text{ড}^2)$$

१६६. ज्याचें समीकरण $\text{य}^2 = 4\text{ড}\,\text{क्ष}$ आहे ह्या परवलयास $\text{प}_1\ (\text{क्ष}_1, \text{य}_2)$ ह्या परवलयावरील बिंदूतून काढलेल्या स्पर्शरेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

$प_१$ बिंदू जवळ $प_२ \left\{ (क्ष_१ + \triangle क्ष_१), (य_१ + \triangle य_१) \right.$ हा बिंदु घेतला, हा बिंदु परवलयावर आहे म्हणून

$$(य_१ + \Delta य_१)^२ = ४ ऊ \; (क्ष_१ + \Delta क्ष_१)$$

म्हणजे $य_१^२ + २ \, य_१ \, \Delta य_१ + (\Delta य_१)^२ = ४ \, ऊक्ष + ४ ऊ \, \Delta क्ष_१$

परंतु $य_१^२ = ४ \, ऊक्ष_१$ हे परवलयाचें समीकरण वजा केलें

तेव्हां $२ \, य_१ \, \Delta य_१ + (\Delta य_१)^२ = ४ ऊ \, \Delta क्ष_१$

म्हणून $२ \, य_१ \, \Delta य_१ = ४ \, ऊ \, \Delta क्ष_१$ कारण $(\Delta य_१)^२ = ०$

आतां $प_१$ बिंदु $प_२$ बिंदूशीं मिळाला तर $प_१ \, प_२$ बिंदूतून जाणाऱ्या छेदनरेषेचें क्ष अक्षाशीं तिर्यगत्व

$$\frac{\Delta य_१}{\Delta क्ष_१} = \frac{२ ऊ}{य_१} \qquad [लेख \; १५१]$$

असे होते आणि ती छेदन रेषा स्पर्शरेषा होते. हिचें समीकरण लेख १२५ प्रमाणें

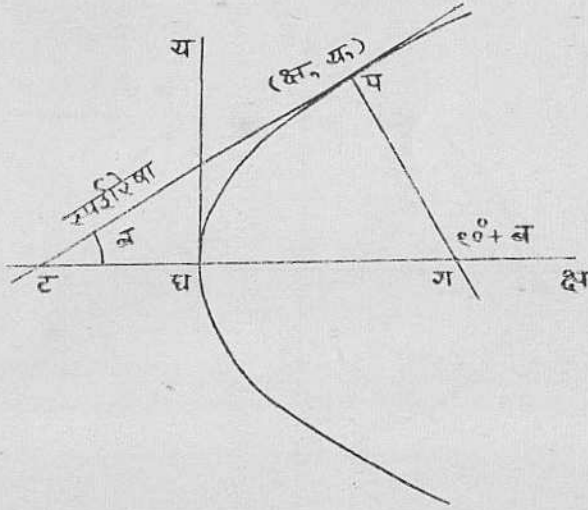
$$य - य_१ = \frac{२ ऊ}{य_१} (क्ष - क्ष_१)$$

म्हणजे $यय_१ - य_१^२ = २ \, ऊ \, क्ष - २ \, ऊक्ष_१$

पण $\qquad - य_१^२ = - ४ \, ऊक्ष_१$ [वजा केले]

म्हणून $यय_१ = २ \, ऊ \, क्ष \; (क्ष + क्ष_१)$ [हें स्पर्शरेषेचें स.]

१६७. परवलयाची स्पर्शरेषा $य - य_१ = \frac{२ झ}{य_१} (क्ष - क्ष_१)$ आहे तर त्या रेषेवरील स्पर्शबिंदूतून तिजवर लंब असणाऱ्या रेषेचें म्हणजे स्पर्लंब रेषेचें समीकरण ठरवावयाचें.



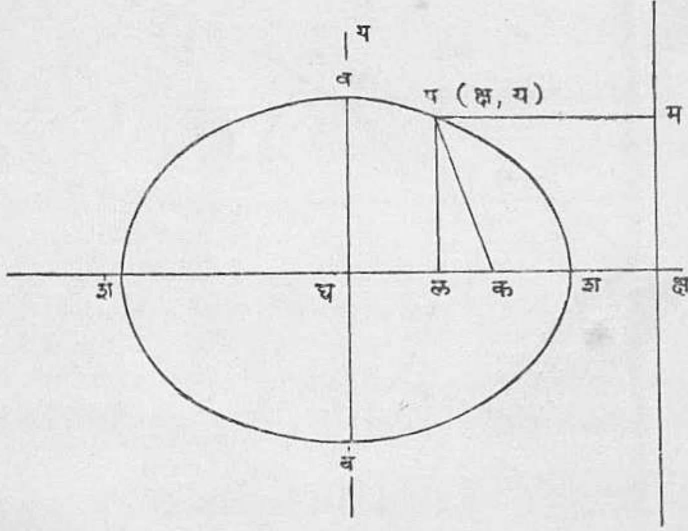
पट ही स्पर्शरेषा असून प हा स्पर्शबिंदु आहे. तेव्हां पग लंब रेषा हिला स्पर्लंब रेषा म्हणावयाचे. हिचें समीकरण सिद्ध करावयाचें. हें समीकरण लेख १२५ अ प्रमाणें खालीं लिहिल्याप्रमाणे आहे—

$$य - य_१ = - \frac{य_१}{२ झ} (क्ष - क्ष_१) \quad [\text{हें स्पर्लंब रेषेचें स.}]$$

दीर्घवलय

१६८. दीर्घवलयाचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.

क हें दीर्घ वर्तुळाचें केंद्र आहे, आणि क्षम ही नायिका आहे. क केंद्रापासून क्षम नायिकेवर कक्ष लंब केला. कक्षचे असें दोन



भाग केलें कीं, त्या भागांचें गुणोत्तर ई ह्या केंद्रच्युतिशीं परिमित होईल ते भाग श बिंदूंत झालें असें घ्या. ह्यावरून

$$\frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}} = \text{ई} \qquad \text{[लक्षणावरून]}$$

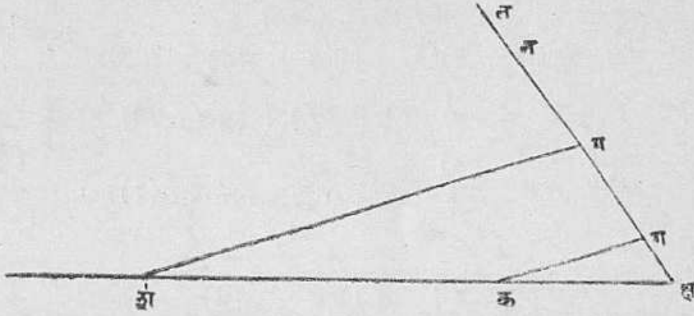
म्हणून श बिंदु दीर्घवलयाच्या परीघावरचा आहे.

१६९. क्षक रेषा वाढवून तिच्यांत असा एक बिंदु समजा श' बिंदु शोधून काढावयाचा आहे कीं श'क : श'क्ष हें गुणोत्तर वरच्या लेखांतील ई बरोबर होईल.

$$\frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}} = \frac{\text{श'क}}{\text{श'क्ष}}$$

$$\frac{\text{शक्ष} - \text{कश}}{\text{शक्ष}} = \frac{\text{श'क्ष} - \text{श'क}}{\text{श'क्ष}} = \frac{\text{कक्ष}}{\text{श'क्ष}}$$

क्षकश' ही सरळ रेषा घ्या. हिच्याशी केवढा तरी कोन करणारी क्षत रेषा काढा. क्षतचा क्ष बिंदूपासून क्षम हा श'क्ष एवढा तुकडा पाडा. आणि मत चा कश एवढा



मन तुकडा पाडला. तसेच मक्ष चा मन एवढा मग तुकडा पाडला.

श'क्ष रेषेचा क्ष पासून क्षक तुकडा वरच्या लेखांतील कक्ष बरोबरच केला. क्षग बिंदु सांधून तिच्याशी म बिंदूतून समांतर रेषा काढली, ती क्षक ला श' बिंदूत मिळालीं तेव्हां श' हा इच्छिलेला बिंदु आहे. कारण

कश : शक्ष : : नम : मक्ष

: : मग : मक्ष

: : श'क = श'क्ष [सरूप त्रिकोण]

कक्षग आणि श'क्षम, हे सरूप त्रिकोण आहेत.

ह्यावरून

$$\frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}} = \text{ई} = \frac{\text{श'क}}{\text{श'क्ष}}$$

$$\frac{\text{श'क}}{\text{श'क्ष}} = \frac{\text{कश}}{\text{शक्ष}}$$

तेव्हां श' बिंदु हा दीर्घ वर्तुळाच्या परीघावरचाच आहे.

१७०. लेख १६८ मधील आकृतींत श'श हा दीर्घवलयाचा बृहदक्ष आहे. श'श चे घ बिंदूत दोन समान भाग केले. त्यापैकी प्रत्येक भाग ष्ठ लांबीचा आहे. म्हणजे

घश = ष्ठ = घश' ;

कश' = ई. श'क्ष आणि कश = ई. शक्ष

श'श = श'क + कश = ई (श'क्ष + शक्ष) = २ ष्ठ

$$२ ष्ठ = ई \left\{ (घक्ष + घश') + (घक्ष - घश) \right\} = २ ई घक्ष$$

म्हणून $घक्ष = \frac{ष्ठ}{ई}$ .... (१)

तसेंच

श'क्ष — कश = ई (श'क्ष — शक्ष)

$$= ई \left\{ (घश' + घक) - (घश - घक) \right\} = २ ई. घक$$

= २ ष्ठई

घक = ष्ठई ... ... (२)

१७१. दीर्घवलयाचें समीकरण सिद्ध करण्याकरितां लंब भुजकोटी प्रस्थापित केलें पाहिजेत. त्यासाठीं श'श हा क्ष अक्ष आणि वव' हा य अक्ष ठरवूं. अर्थात त्यांचा छेदन बिंदु घ हा प्रस्थापित बिंदु होय. श'श बृहदक्षाचें अर्ध ष्ठ संख्येनें आणि वव' लघ्वक्षाचें अर्ध ह्य संख्येनें दाखवूं.

दीर्घवलयाच्या परीघावरील प्रत्येक बिंदूच्या भुज कोटीचें समीकरण सिद्ध करावयाचें या करितां परीघावर कोठें तरी प हा एक बिंदु घेतला त्याचे भुज (क्ष, य) हे आहेत. प बिंदूपासून नायिकेवर पम लंब केला आणि घक्ष वर पल लंब केला. पक सांधले.

लक्षणावरून पाहता

पक = ई पम = ई. लक्ष

$पक^{2} = ई^{2}. लक्ष^{2}$

$पल^{2} + कल^{2} = पक^{2} = ई^{2}. लक्ष^{2}$

पण कल = घक—घल = ष्ठई—क्ष, पल = य

आणि $लक्ष = घक्ष—घल = \frac{ष्ठ}{ई} - क्ष$

म्हणून $कल^{2} = पल^{2} = (ष्ठई - क्ष)^{2} + य^{2}$ .... (अ)

आणि $ई^{2} लक्ष^{2} = ई^{2} \left(\frac{ष्ठ}{ई} - क्ष \right)^{2}$ .... (ब)

(अ) आणि (ब) ह्या दोन्ही किंमती समान आहेत

म्हणून

$$(\text{ঙ}\text{ई} - \text{क्ष})^{२} + \text{य}^{२} = \text{इ}^{२}\left(\frac{\text{ঙ}}{\text{ई}} - \text{क्ष}\right)$$

$$(\text{ঙ}\text{ई} - \text{क्ष})^{२} - (\text{ঙ} - \text{क्षई})^{२} = - \text{य}^{२}$$

$$(\text{ঙ} - \text{क्षई})^{२} - (\text{ঙ}\text{ई} - \text{क्ष})^{२} = \text{य}^{२}$$

$$\left\{(\text{ঙ} - \text{क्ष}) + \text{ई}(\text{ঙ} - \text{क्ष})\right\}\left\{(\text{ঙ}+\text{क्ष}) - \text{ई}(\text{ঙ}+\text{क्ष})\right\} = \text{य}^{२}$$

$$(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) + \text{ई}(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) - \text{ई}(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) - \text{ई}^{२}(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) = \text{य}$$

$$(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) - \text{इ}^{२}(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) = \text{य}^{२}$$

$$\text{य}^{२} = (१ - \text{इ}^{२})(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) \quad [\text{हें दीर्घवलयाचें स.}].$$

१७२. दीर्घ वर्तुळाच्या परीघावरील प बिंदु घय अक्षावर आला तर य=घ होईल आणि क्ष=० होईल म्हणून

$$\text{य}^{२} = (१ - \text{ई}^{२})(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{अ})$$

ह्या समीकरणाचे स्वरूप

$$\text{घ}^{२} = (१ - \text{ई}^{२})\,\text{ঙ}^{२} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{ब})$$

(अ) समीकरणाला (ब) समीकरणानें भागिले तर

$$\frac{\text{य}^{२}}{\text{घ}^{२}} = \frac{(१ - \text{ई}^{२})(\text{ঙ}^{२} - \text{क्ष}^{२})}{(१ - \text{ई}^{२})\,\text{ঙ}^{२}} = १ - \frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{ঙ}^{२}}$$

किंवा $\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{ঙ}^{२}} + \frac{\text{य}^{२}}{\text{घ}^{२}} = १$ [हें दीर्घवयाचें ल्समी. होय]

१७३. दीर्घवलयाच्या परीघावरील दिलेल्या प ($\text{क्ष}_{१}$, $\text{य}_{१}$) ह्या बिंदूपासून त्यास स्पर्शरेषा काढावयाचें. दीर्घवलयाचें समीकरण

$\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{ঙ}^{२}} + \frac{\text{य}^{२}}{\text{घ}^{२}} = १$ हें आहे.

प बिंदूसमीप दुसरा बिंदु घेतला त्याचे भुज $(क्ष_१ + \triangle क्ष_१, य_१ + \triangle य_१)$ हे आहेत.

प बिंदु दीर्घवलय वक्ररेषेवर आहे म्हणून $\frac{क्ष_१^२}{ख^२} + \frac{य_१^२}{घ^२} = १$

त्यामुळेंच $\frac{(क्ष_१ + \Delta क्ष_१)^२}{ख^२} + \frac{(य_१ + \Delta य_१)^२}{ख^२} = १$

वजाबाकीनें $\frac{२क्ष_१ \; \Delta क्ष_१ + (\Delta क्ष_१)^२}{ख^२} + \frac{२य_१ \; \Delta य_१ + (\Delta य_१)^२}{ख^२} = ०$

दुसरा बिंदु पहिल्या बिंदूस मिळाला तर $(\triangle क्ष_१)^२ = ०$; $(\triangle य_१)^२ = ०$ म्हणून

$$\frac{क्ष_१ \; \Delta क्ष_१}{ख^२} + \frac{य_१ \; \Delta य_१}{घ^२} = ०$$

अर्थात $\frac{\Delta य_१}{\Delta क्ष_१} = - \frac{घ^२ क्ष_१}{ख^२ य_१}$

स्पर्शरेषेचें क्ष अक्षाशी जें तीर्यगत्व त्याची स्पर्शरेषा $- \frac{घ^२ क्ष_१}{ख^२ य_१}$ ही आहे. म्हणून $(क्ष_१, य_१)$ या बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचें समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणे—

$$य - य_१ = - \frac{घ^२ क्ष_१}{ख^२ य_१} (क्ष - क्ष_१)$$

अथवा $\frac{य \, य_१}{घ^२} - \frac{य_१^२}{घ^२} = - \frac{क्ष \, क्ष_१}{ख^२} + \frac{क्ष^२}{ख^२}$

$$\frac{क्ष \, क्ष_१}{ख^२} + \frac{य \, य_१}{घ^२} = १$$ [हें स्पर्शरेषेचें समीकरण].

१७४. दीर्घवलयाच्या स्पर्शरेषेचें समीकरण हें

$$य - य_१ = - \frac{घ^२ क्ष_१}{ख^२ य_१} (क्ष - क्ष_१)$$

असें आहे. तेव्हां स्पर्लंब रेषेचें समीकरण

$$य - य_१ = \frac{ख^२ य_१}{घ^२ क्ष_१} (क्ष - क्ष_१)$$

असें आहे. लेख १२५-अ पहा.

१७५. दीर्घवलयाचें स्वरूप.

दीर्घवलयाचें समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणें आहे :—

$$\frac{\text{क्ष}^2}{\text{ब}^2} + \frac{\text{य}^2}{\text{घ}^2} = 1$$

$$\text{ह्यावरून } \frac{\text{य}^2}{\text{घ}^2} = 1 - \frac{\text{क्ष}^2}{\text{ब}^2} = \frac{\text{ब}^2 - \text{क्ष}^2}{\text{ब}^2}$$

$$\text{अर्थात } \frac{\text{य}}{\text{घ}} = \pm\sqrt{\frac{\text{ब}^2 - \text{क्ष}^2}{\text{ब}^2}}$$

ह्या समीकरणांत क्ष ची किंमत कोणतीही असो य च्या समान अशा दोन किंमती येतात, त्यांपैकीं एक धन आणि दुसरी ऋण येते. यावरून असें ठरतें कीं, दीर्घवलयाचें क्ष अक्षानें केलेले दोन भाग 'सम स्वरूपी' असतात.

सम स्वरूपी म्हणजे क्ष अक्षानें झालेले दोन भाग एक वरचा, ज्यांत य ची किंमत धन आहे असा भाग, आणि दुसरा खालचा, ज्यांत य ची किंमत ऋण आहे असा भाग हे दोन्ही एकमेकावर उचलून ठेविले तर ते सर्वांशी परस्पराशी मिळतात.

$$\text{तसेंच } \frac{\text{क्ष}^2}{\text{ब}^2} = 1 - \frac{\text{य}^2}{\text{घ}^2} = \frac{\text{घ}^2 - \text{य}^2}{\text{घ}^2},$$

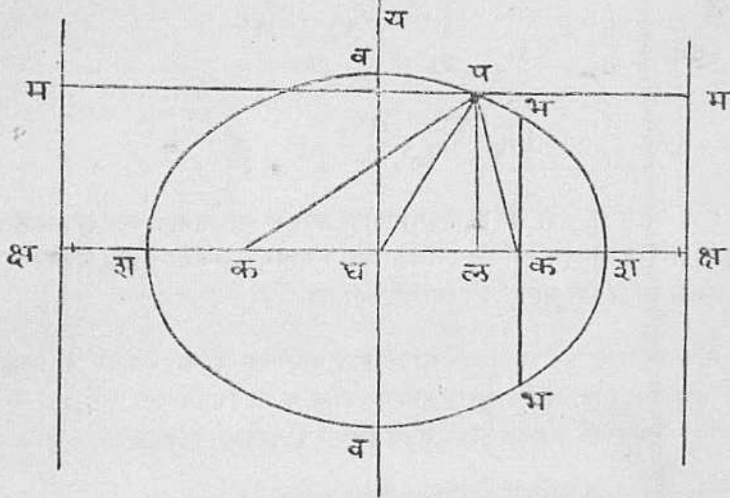
$$\text{अर्थात } \frac{\text{क्ष}}{\text{ब}} = \pm\sqrt{\frac{\text{घ}^2 - \text{य}^2}{\text{घ}^2}}$$

ह्यावरून य अक्षानें केलेले दीर्घ वर्तुळाचे दोन्ही भाग डावीकडचा आणि उजवीकडचा, हेही 'सम स्वरूपी' असतात.

१७६. शंकुच्छिन्न ह्या प्रकरणांत सिद्ध केलें आहे कीं दीर्घवलयास दोन केंद्रें आणि दोन नायिका असतात. हें वरच्या प्रतिपादनावरून सिद्ध होते. य अक्षानें केलेले दोन्ही भाग सम स्वरूपी असतात. केंद्र केंद्राशी शिरोबिंदु शिरोबिंदूशी मिळतात अर्थात नायिका ही नायिकेशी मिळालीच पाहिजे.

१७७. दीर्घवलयाच्या परीघावरील कोणत्याही एका बिंदूपासून दोन्ही केंद्रापर्यंत जीं दोन अंतरें त्यांची बेरीज बृहदक्षाबरोबर असते.

क क′ ही केंद्रें आहेत. प (क्ष$_1$, य$_1$) हा परीघावरील कोणतातरी बिंदु आहे. आणि $\frac{क्ष^2}{ऋ^2} + \frac{य^2}{घ^2} = १$ हे त्या दीर्घवर्तुळाचें समीकरण आहे तर प क पक′ ह्या रेषांची बेरीज शश′ बृहदक्षाबरोबर म्हणजे २ ऋ असतें असें सिद्ध करावयाचे.



$$पक = ई. पम \text{ आणि } प क' = ई. प म'$$

$$\text{किंवा } पक = ई. \quad लक्ष = ई\left(\frac{ऋ}{ई} - क्ष\right) = ऋ - ईक्ष$$

$$\text{आणि } पक' = ई. \quad लक्ष' = इ\left(\frac{ऋ}{इ} + क्ष\right) = ऋ + इक्ष$$

म्हणून

$$प क + पक' = २ ऋ.$$

१७८. दीर्घवलयाचे कांहीं सिद्धांत

(१) दीर्घवल याचा केंद्रग भुज, याचें समीकरण.

क केंद्रापासून श श′ बृहदक्षावर काढलेल्या लंबाचा दीर्घवलयातील जो भाग त्याला केंद्रग भुज म्हणतात. आकृतीमध्ये भ क भं हा केंद्रग भुज आहे. याचें समीकरण ठरवावयाचे.

भ बिंदूचे भुज (घ क, क भ) हे आहेत. किंवा (ष्ठ ई, क भ) हे आहेत. भ बिंदु दीर्घवर्तुळाच्या परीघावर आहे, व दीर्घवर्तुळाचें समीकरण

$$\frac{क्ष^{२}}{ष्ठ^{२}} + \frac{य^{२}}{घ्र^{२}} = १ \text{ हे आहे.}$$

$$\text{म्हणून } \frac{ष्ठ^{२} ई^{२}}{ष्ठ^{२}} + \frac{कभ^{२}}{घ्र^{२}} = १$$

$$कभ^{२} = (१ - ई^{२})\, घ्र^{२} = \frac{घ्र^{२}}{ष्ठ^{२}} \times घ्र^{२}$$

$$= \frac{घ्र^{४}}{ष्ठ^{२}}$$

$$कभ = \frac{घ्र^{२}}{ष्ठ} = \frac{(१ - ई^{२})\, ष्ठ^{२}}{ष्ठ} = (१ - ई^{२})\, ष्ठ$$

$$\text{आणि } भ\, भ' = \frac{२घ्र^{२}}{ष्ठ}$$

(२) असें सिद्ध करावयाचें कीं

$$पल^{२} : शल \times श' ल :: घ्र^{२} : ष्ठ^{२}$$

प हा दीर्घवर्तुळाच्या परीघावरील बिंदु आहे. त्याचे क्ष, य भुज घल, पल हे आहेत. घप सांधले. तेव्हां क्ष = घल = ष्ठ कोभु पघल आणि य = घ्र भु पघल = प

$$प^{२} = घ्र^{२} भु^{२} \;(पघल\;)$$

$$शल \times श'ल = (श'घ + घल)\;(शघ - घल)$$

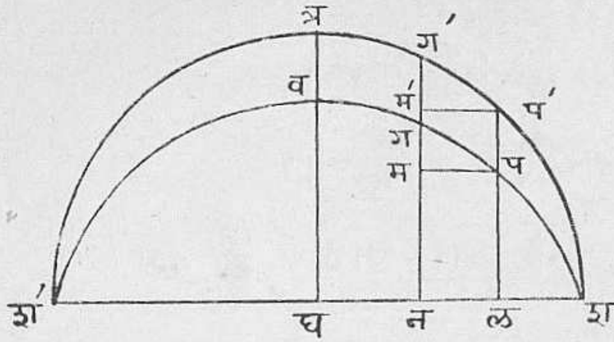
$$= शघ^{२} - घल^{२} = ष्ठ^{२} - ष्ठ^{२} कोभु^{२}\;(पलघ)$$

$$= ष्ठ^{२}\;(१ - कोभ^{२} पलघ) = ष्ठ^{२} भ^{२} पलघ$$

म्हणून

$$\frac{पळ^{२}}{शल . श'ल} = \frac{घ्र^{२} भ^{२}\;(पघळ)}{ष्ठ^{२} भु^{२}\;(पघल)} = \frac{घ्र^{२}}{ष्ठ^{२}}$$

(३) दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ



श'श हा शंवश दीर्घवर्तुळाचा बृहदक्ष आहे, आणि शंत्रश वर्तुळाचा व्यास आहे. शंश वर पल, गन लंब काढिले ते वर्तुळाला मिळेपर्यंत वाढविले. गन वर पम, पंमं लंब काढिले.

तेव्हां

मनलप काटकोन चौकोणास : मंनलपं का. चौ. : : पल : पलं

पण वर्तुळाचा पंल भुज याचा वग शंल $\times$ शल

म्हणून पल^2 : पंल^2 :: घ^2 : ध^2

किंवा पल : पंल : : घ : ध

म्हणून

मनलप का. चौ. : मंनलपं का. चौ. : : घ : ध

ह्या काटकोन चौकोनाप्रमाणें श पासून न पर्यंत अनेक चौकोन काढिले तर

लहान चौकोनांच्या बेरजेस : मोठ्या चौकोनाची बेरीज : : घ : ध शनचे अनंत भाग करून चौकोन केले तरी त्यांच्या बेरजांचें गुणोत्तर घ : ध हेंच असणार म्हणून गशन ह्या आकृतीच्या क्षेत्रास ग'शन आकृतीचें क्षेत्र तसेंच घ : ध ह्याच प्रमाणेंच

दीर्घवर्तुळक्षेत्रास : वर्तुळाचें क्षेत्र : : घ : ध

पण वर्तुळाचें क्षेत्र $= \pi$ त्र$^2 = \pi$ ध^2 [घत्र = ध] म्हणून

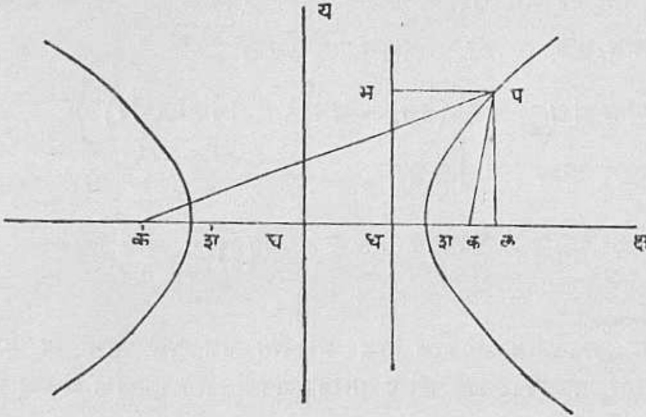
दीर्घ वर्तुळाचें क्षेत्र : π ध^2 : : घ : ध

$$\text{दि. व. क्षे} = \frac{\pi \text{ ध}^2 \times \text{घ}}{\text{ध}} = \pi \text{ ध घ}$$

उद्वलय

१७९. उद्वलयाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

क हें उद्वलयाचें केंद्र आहे आणि ध म ही नायिका आहे.



ई ही उद्वलयाची केंद्रच्युति आहे. ही भाव संख्या आहे. सर्व गुणोत्तरें भाव संख्यात्मकच असतात. ई ही संख्या १ पेक्षा जास्त आहे. (लेख १६२ उद्वलयाची व्याख्या पहा.) कध सांधून वाढविलेली रेषा हा उद्वलयाचा अक्ष होईल. क ध चे श बिंदूत दोन भाग करा ते असे कीं कश : शध हे गुणोत्तर ई परिमित होईल. म्हणजे ई इतके होईल. तेव्हां

$$\frac{\text{कश}}{\text{शध}} = \text{ई}$$

यावरून लक्षणाप्रमाणें पाहता श हा बिंदु उद्वलयाच्या वक्र रेषेवरचा आहे.

लेख १६९ च्या पद्धतीनें श' हा असा बिंदु शोधून काढा कीं

$$\frac{\text{कश}'}{\text{श}'\text{ध}} = \text{ई}$$

हा शोधिलेला श' बिंदु उद्वलयाच्या वक्र रेषेवरील आहे. श' श चे घ बिंदूत दोन समान भाग करा. म्हणजे

$$\text{घश} = \text{ॶ} = \text{घ श}'$$

$$\text{कश}' = \text{ई.श}'\text{ध आणि कश} = \text{ई.शध}$$

$$\text{कश}' + \text{कश} = \text{ई } (\text{श}'\text{ध} + \text{शध})$$

$$\text{अथवा } (\text{घश}' + \text{घक}) + (\text{घक} - \text{घश}) = \text{ई.श}'\text{श} = \text{२ ई.घश} = \text{२ ई.घश}$$

$$\text{म्हणून घक} = \text{ऊई} \cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{तसेंच कश}' - \text{कश} = \text{ई } (\text{शं}\text{ध} - \text{शध})$$

$$\text{अथवा शंश} = \text{ई} \left\{ (\text{घशं} + \text{घध}) - (\text{घश} - \text{घध}) \right\}$$

$$\text{२ऊ} = \text{२ई घ ध}$$

$$\text{घध} = \frac{\text{ऊ}}{\text{ई}} \cdots\cdots\cdots (२)$$

१८०. उद्वलयाचें समीकरण सिद्ध करण्यास अक्ष घक्ष आणि घय हे घेऊ. उद्वलयाच्या वक्ररेषेवर कोठें तरी प हा बिंदु घेतला त्याचे भुज (क्ष, य) हे आहेत लक्षणावरून पाहतां

$$\text{पक} = \text{ई.पम} = \text{ई.लध}$$

$$\text{पक}^{२} = \text{ई}^{२}.\text{लध}^{२}$$

$$\text{पल}^{२} + \text{कल}^{२} = \text{पक}^{२} = \text{ई}^{२}.\text{लध}^{२}.$$

$$\text{पण कल} = \text{घल} - \text{घक} = \text{क्ष} - \text{ऊई} \; ; \; \text{पल} = \text{य},$$

$$\text{आणि लध} = \text{घल} - \text{घध} = \text{क्ष} - \frac{\text{ऊ}}{\text{ई}}$$

$$\text{कल}^{२} + \text{पल}^{२} = (\text{क्ष} - \text{ऊई})^{२} + \text{य}^{२}$$

$$\text{ई}^{२}.\ \text{लध}^{२} = \text{ई}^{२} \left(\text{क्ष} - \frac{\text{ऊ}}{\text{ई}} \right)^{२}$$

$$\text{म्हणून } (\text{क्ष} - \text{ऊई})^{२} + \text{य}^{२} = \text{ई}^{२} \left(\text{क्ष} - \frac{\text{ऊ}}{\text{ई}} \right)^{-२}$$

$$(\text{क्ष} - \text{ऊई})^{२} + \text{य}^{२} = (\text{क्षई} - \text{ऊ})^{२}$$

$$(\text{क्षई} - \text{ऊ})^{२} - (\text{क्ष} - \text{ऊई})^{२} = \text{य}^{२}$$

$$\left\{ ई\ (क्ष - \text{ऊ}) + (क्ष - \text{ऊ}) \right\} \left\{ ई\ (क्ष + \text{ऊ}) - (क्ष + \text{ऊ}) \right\} = य^2$$

$$ई^2\ (क्ष^2 - \text{ऊ}^2) - ई(क्ष^2 - \text{ऊ}^2) + ई(क्ष^2 - \text{ऊ}^2) - (क्ष^2 - \text{ऊ}^2) = य^2$$

$$य^2 = (ई^2 - १)\ (क्ष^2 - \text{ऊ}^2) = (ई^2 - १)क्ष^2 - (ई^2 - १)\ \text{ऊ}^2$$

ह्या समीकरणांतील क्ष = ० मानिला तर

$$- य^2 = + घ^2 = + (ई^2 - १)\ \text{ऊ}^2$$

$$\text{म्हणून}\ (ई^2 - १)\ क्ष^2 - य^2 = + (ई^2 - १)\ \text{ऊ}^2$$

$$\frac{क्ष^2}{\text{ऊ}^2} - \frac{य^2}{घ^2} = १ \quad [\text{हें उद्वलयाचें समी.}]$$

१८१. उद्वलयाच्या परीघावरील कोणत्यातरी एखाद्या ($क्ष_१$, $य_१$) ह्या बिंदूपासून त्यास स्पर्शरेषा काढिली असतां निघालेल्या रेषेचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

लेख १७३ मधील दीर्घवलयाच्या उपपत्तिमध्ये $+घ^2$ च्या जागी—$-घ^2$ लिहिल्यानें जें समीकरण होते तेंच उद्वलयाच्या स्पर्शरेषेचें समीकरण असते. म्हणजे

$$\frac{क्षक्ष_१}{\text{ऊ}^2} - \frac{यय_१}{घ^2} = १$$

त्याचप्रमाणें दीर्घवलयाच्या स्पर्लंब रेषेच्या समीकरणांत $+ घ^2$ च्या जागीं $- घ^2$ लिहिल्यानें लेख १७४ मधील उपपत्ति प्रमाणें उद्वलयाच्या स्पर्लंब रेषेचें समीकरण सिद्ध होते. तें असें—

$$य - य_१ = - \frac{\text{ऊ}^2 य_१}{घ^2 क्ष_१}\ (क्ष - क्ष_१)$$

शंकुच्छिन्नाकृतीच्या वक्ररेषांची अक्षीय समीकरणें

१८२. परवलय, दीर्घवलय व उद्वलय यांची लंब भुज निर्णायकांचीं समीकरणें मागें सिद्ध केली आहेत. त्यांचीच अक्षीय समीकरणें येथें सिद्ध करावयाची आहेत. वृत्तानुसारी बिंदु निर्णायकें घेऊन वर्तुळासंबंधी समीकरणें लेख १५५ ते १६० यामध्यें सिद्ध करून दाखविली. त्याप्रमाणें शंकुच्छिन्नाचीं समीकरणें सिद्ध होतात. शंकुच्छिन्नांच्या परवलय, दीर्घवलय व उद्वलय ह्या तिन्ही प्रकारच्या वक्ररेषांचीं समीकरणें, यांच्यामध्ये एकरूपता असल्यामुळें, प्रत्येक वक्ररेषेचें समीकरण निराळें सिद्ध करावे लागत नाहीं.

१८३. पमश ह्या वक्ररेषेचें केंद्र क बिंदु असून क्षम

ही नायिका आहे. येथे क हा प्रस्थापित बिंदु आणि क क्ष हा अक्ष आहे. वक्र-रेषेवर प हा एक (र, ब) बिंदु आहे. क भ हा केंद्रग भुजार्ध आहे. केंद्रग भुजार्ध भ ह्या अक्षराने दाखविला. आता ह्या च्छिन्नाकृतीची केंद्रच्युति ई आहे. तेव्हां ई भ र ब ह्या संख्यांनी कभश रेषेचें समीकरण बनवावयाचें.

येथें कभ = भ ; कप = र आणि पकक्ष कोन = ब आणि केंद्रच्युति ई ह्याप्रमाणे र ब भ ई यांचें समीकरण साधावयाचें आहे.

प बिंदूपासून क्षम वर पम लंब केला आणि कक्ष वर पल लंब केला. आता

र = कप = ई.पम = ई.लक्ष = ई (कक्ष + कल).

= कभ + ई. कप कोभु पकल कोन

= भ + ई. र. कोभु (१८० − ब)

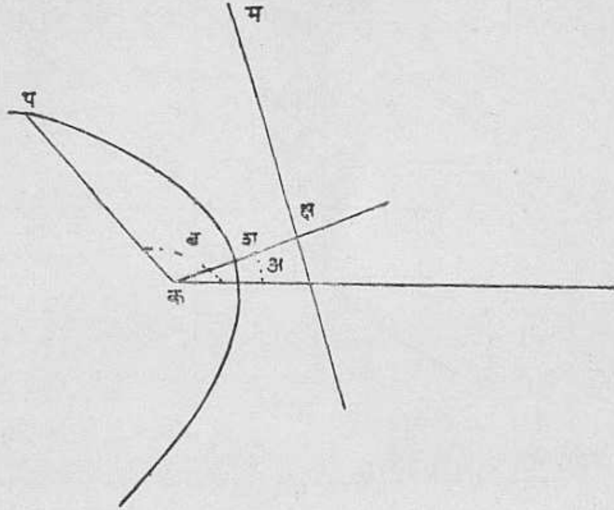
= भ − ई र कोभु ब.

येथे ई. कक्ष = भ व्याख्येवरून स्थान भेदानें

भ = र (१ + ई कोभु ब)

किंवा $\frac{\text{भ}}{\text{र}}$ = १ + ई कोभु ब [हें च्छिन्नाकृतीचें स. होय.]

उपसिद्धांत १.—जर क केंद्रातून जाणारी प्रस्थापित रेषा छिन्नाकृतीच्या अक्षाशी (च्छिन्नमध्य रेषेशी) अ अंशाचा कोन करीत असेल तर तें समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल.



येथे प क क्ष कोन $=$ (ब — अ)

म्हणून $\frac{\text{भ}}{\text{र}} = १ + \text{ई कोभु (ब — अ)}$

उपसिद्धांत २.—शंकुच्छिन्न जर परवल असेल तर ई $= १$

तेव्हां $\frac{\text{भ}}{\text{र}} = १ + \text{कोभु ब}$

पण भभ' $=$ ४ कश म्हणून भ $=$ २ऴ.

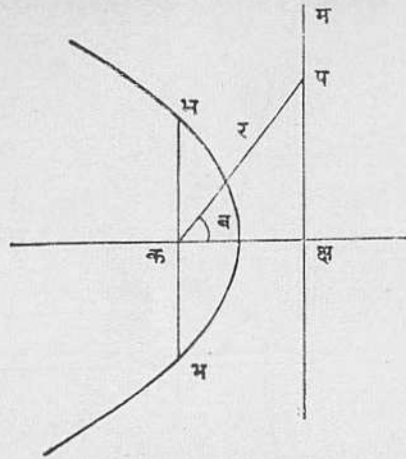
आणि $१ + \text{कोभु ब} = २ \text{ कोभु}^२ \frac{\text{ब}}{२}$,

म्हणून $\frac{\text{२ऴ}}{\text{र}} = २ \text{ कोभु}^२ \frac{\text{ब}}{२}$,

अथवा $\frac{\text{ऴ}}{\text{र}} = \text{कोभु}^२ \frac{\text{ब}}{२}$. [हें परवलयाचें समीकरण]

१८४. अक्षीय बिंदुनिर्णयकानुसारी प्रस्थापित बिंदु जो स्वीकारला तो शंकुच्छिन्नाचें केंद्र क हा बिंदु होय, आणि क क्ष ही प्रस्थापित रेषा किंवा अक्ष होय, ही घेऊन नायिकेचें समीकरण सिद्ध करावयाचे.

क्षम नायिकेवर प (र, ब) हा कोणता तरी बिंदु घेतला. तेव्हां



कक्ष = र कोभु ब

आणि कभ = ई. कक्ष

म्हणून $\frac{\text{भ}}{\text{र}}$ = ई. कोभु ब [हें नायिकेचें समीकरण.]

१८५. शंकुच्छिन्नामध्ये परवलय, दीर्घवलय आणि उद्वलय ह्या तीन वक्र-रेषांचा समावेश होतो. या तीहींची अक्षीय समीकरणें किंचित भिन्न आहेत. म्हणून प्रत्येक वक्ररेषेचे समीकरण येथें दाखवितो.

(१) परवलयाचें समीकरण---

कप = र, शकप = ब, आणि कप = पम = लक्ष.

र = लक्ष = लक + कश + शक्ष.

= कप × कोभु (१८० − ब) + ऊ + ऊ

र = − र. कोभुब + २ ऊ

र (१ + कोभुब) = २ ऊ

$$\text{र} = \frac{\text{२ ऊ}}{\text{१ + कोभुब}}$$

(२) दीर्घवलयाचें समीकरण,---

कप = र, शकप = ब, आणि कप = ई. पम = ई. लक्ष

कप = ई (कक्ष + कल) = ई. कक्ष + ई. कल ;

ई. कक्ष = ई (कश + शक्ष) = ई.कश + कश
= कश (१ + ई)
= (ॡ − घक) (१ + ई)   [घश = ॡ]
= (ॡ − ॡई) (१ + ई)   [घक = ॡई]
= ॡ (१ − ई^{२})

ईकल = इ. कप कोभु (१८० − ब)
= ई. र कोभु (१८० − ब) = − ईर कोभुब

म्हणून
र = ॡ (१ − ई^{२}) − ईरकोभुब

किंवा र = $\dfrac{\text{ॡ}(१ - \text{ई}^{२})}{१ + \text{ई कोभुब}}$

(३) उद्वलयाचें समीकरण--

कप = र, शकप = ब, कप = ई. पम = ई. लध ;
कप = ई (कध + कल) = ई. कध + ई. कल ;
ई. कध = ई (कश + शध) = ई. कश + कश
= कश (ई + १) = (ई + १) (घक − घश)
= (ई + १) (घक − ॡ)   [घश = ॡ]
= (ई + १) (ॡई − ॡ)   [घक = ॡई]
= ॡ (ई^{२} − १)
ई. कल = ई. कप कोभुब = ई. र कोभुब

म्हणून
र = ॡ (ई^{२} − १) + ई. र कोभुब

किंवा र = $\dfrac{\text{ॡ}(\text{ई}^{२} - १)}{१ - \text{ई कोभुब}}$

१८६. बैज्यभूमिति ही उच्च प्रतीच्या गणितशास्त्राची अत्यंत महत्त्वाची शाखा आहे, आणि ती अत्यंत विस्तीर्ण अशी आहे. ह्या विषयाशिवाय ग्रहांच्या गतीचे सिद्धांत सिद्ध होत नाहींत. या कारणास्तव ह्या विषयाचे आधारभूत सिद्धांत सिद्ध केले आहेत. सर्व सिद्धांत सिद्ध करणें हे येथें अस्थानी असल्यामुळें तसें केलें नाहीं. एखाद्या सिद्धांताची आवश्यकता वाटल्यास तेथें तो सिद्धांत सिद्ध करिता येईल. म्हणून बैज्यभूमितीचें लेखन येथे थांबवून इतर विषयाकडे वळूं.

प्रकरण आठवें

सूक्ष्मांश गणिताचीं मूलतत्त्वें.

१८७. सूक्ष्म हा शब्द सापेक्ष आहे. जसें लहान हा शब्द सापेक्ष असून त्याची अपेक्षा 'मोठा' ह्या शब्दाशीं असते. त्याप्रमाणें सूक्ष्म हा शब्द आहे. एका तळ्यांतील पाणी किती आहे तें खंडी (वजनी) ह्या परिमाणानें मोजून त्याचा इतकेपणा लक्षांत घ्यावयाचा असता, त्या मोजणींत आपण शेर मण ह्यांच्या संख्याची (म्हणजे खंडीची पूर्ण संख्या सोडून राहिलेल्या शेरामणाची जी संख्या त्यांची) अपेक्षा बाळगीत नाहीं लहान म्हणून सोडून देतो. ह्यावरून तळ्यांतील पाण्याच्या दृष्टीनें शेरभर पाणी अगदींच थोडें आहे. येथे शेरभर पाणी हा तळ्यांतील पाण्याचा सूक्ष्मांश आहे. अशा सूक्ष्मांशांचें जें गणित तें सूक्ष्मांश गणित होय.

१८८. विवक्षित पदार्थाची वृद्धि किंवा क्षय होत असेल तर ती त्या पदार्थाच्या कितव्या अंशाबरोबर होते, तिचे मापन करणें हा सूक्ष्मांश गणिताचा विषय आहे. ह्या मापनाचा विचार करिताना अनेक सिद्धांत सिद्ध होतात, आणि त्यासंबंधी जीं समीकरणें सिद्ध होतात, त्या समीकरणातील ज्ञात व अज्ञात ह्या दोन प्रकारच्या पदापैकीं ज्ञात पदांपासून अज्ञात पदांच्या किंमती शोधितां येतात. सोपेसे उदाहरण म्हणजे वर्तुळाच्या परीघाचें व्यासाशीं गुणोत्तर याची किंमत किती? कोनाच्या त्रिकोणमितिविषयक एखाद्या गुणोत्तरावरून त्या कोनाच्या अंशा संख्या ठरविणें. एखाद्या ग्रहाचा सूर्यासभोवती फिरण्याचा प्रदक्षिणा काल माहीत असतां त्या ग्रहाचें सूर्यापासून अंतर किती तें शोधणें. अशा प्रकारच्या मापनांचा विचार करणें हा सूक्ष्मांश गणिताचा विषय आहे.

१८९. **काहीं शब्दांचें स्पष्टीकरण**.—'स्थीर संख्या', 'विकारी संख्या' आणि 'संचय' हे शब्द सूक्ष्मांश गणितात वापरले आहेत. त्यांचीं लक्षणें स्पष्टीकरणद्वारा खालीं दाखविली आहेत:—

एका त्रिकोणाच्या दोन बाजु क्ष य लांबीच्या आहेत, आणि त्या दोन बाजूमधील कोन अ अंशांचा आहे. आणि त्याचें क्षेत्र (△) परिमाणें आहे. क्ष य अ आणि (क्षेत्रांश) △ (△ चिन्हाचें वाचन 'अंश' ह्या शब्दानें करावें. तसेंच △ क्ष याचें वाचन क्ष चा अंश असा वाचावा.) ह्या चार संख्यांचें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें होतें. लेख ७० अ पहा.

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\ \text{क्ष. य भु अ}$$

ह्या समीकरणांतील अ कोन दिलेला आहे. म्हणून अ ही संख्या न बदलणारी आहे, तिला 'स्थीर संख्या' म्हणूं. बाकी क्ष, य आणि △ ह्या संख्या बदलणाऱ्या आहेत असें घेऊं. क्ष किंवा य ह्यांपैकीं एका रेषेची किंवा दोहींची लांबी कमी किंवा जास्त झाल्यास △ ची संख्या कमी किंवा जास्त होईल. म्हणून ह्या बदलणाऱ्या संख्या आहेत ह्यांना आपण 'विकारी संख्या' म्हणूं.

विकारी संख्या ही दोन प्रकारच्या आहेत, एक 'स्वयंविकारी' आणि दुसरी 'परावलंबी'. वरच्या उदाहरणात क्ष, य ह्या संख्या स्वयं विकारी आहेत, म्हणजे त्या स्वतांच विकार पावणाऱ्या म्हणजेच कमीजास्त होणाऱ्या आहेत. परंतु △ ही क्षेत्राची संख्या स्वतां विकार पावत नाहीं, ह्या संख्येची वाढ किंवा घट ही स्वयं विकारी संख्यांच्या किंवा एका संख्येच्या वाढघटीवर अवलंबून असते. म्हणून △ (त्रिकोणाचें क्षेत्र) ही संख्या परावलंबी असें म्हणण्याचें योजिले आहे.

△ हें त्रिकोणाचें क्षेत्र आहे, हें क्षेत्र क्षय ह्यापैकीं दोन्ही किंवा एका स्वयं विकारी पदानें बनतें म्हणून △ ही संख्या येथें क्ष, य ह्या स्वयं विकारी पदांचा संचय आहे असें म्हणावें.

१९०. वरच्या लेखांत जे पारिभाषिक शब्द सांगितले त्याच्या व्याख्या खालीं लिहिल्याप्रमाणे आहेत :—

(अ) विवक्षित गणितविषयक एकाच कार्यामध्ये ज्या संख्येची किंमत बदलत नाहीं अशा संख्येला स्थीर संख्या म्हणावें.

(ब) विवक्षित गणितविषयक एकाच कार्यामध्ये ज्या संख्येची किंमत एकच रहात नाहीं कमी जास्त होते तिला विकारी संख्या म्हणावें.

(क) ज्या विकारी संख्येची किंमत कमी जास्त केवढीही मानिता येते तिला स्वयं विकारी संख्या, सौकर्यार्थ विकारी संख्या म्हणावें.

(ड) ज्या विकारी संख्येची किंमत स्वयं विकारी संख्येच्या किंमतीनेंच बनते तिला परावलंबी सौकर्यार्थ अवलंबी संख्या म्हणावें.

(इ) अवलंबी संख्या विकारी संख्येच्या एक किंवा अनेक पदांपासून बनते, ह्या अवलंबी संख्येला त्या विकारी पदांचा संचय म्हणावें. संचय चार प्रकारचे असतात—बैजिक, वार्तिक, घातप्रकाशी आणि घातांकी.

१९१. **लेखन पद्धति.**—हा विषय महाराष्ट्र किंवा मराठी भाषेला अगदी अपरिचित आहे. कोणत्याहि विषयाची सामान्य लेखन पद्धति ठरलेली असते.

बीजगणिताची लेखन पद्धति संस्कृत भाषेंत निराळी आणि मराठीमध्ये निराळी आहे. परंतु सूक्ष्मांश गणित हा विषय मराठीमधून लिहिलेला असा कांहीं नाही. तेव्हां लेखन पद्धति ही मुळींच नाहीं. यास्तव वाचकाच्या सोईला पडेल अशी लेखन पद्धति मी वापरली आहे. हिच्या बरेवाईटपणाची जबाबदारी मजवर आहे. त्याविषयीं इतर ग्रंथकारांची अनुमती घेऊन लेखन पद्धति प्रचारांत आणावी असें मला करितां आलें नाहीं. तथापि विषयाची जाणीव चांगली व्हावी असा प्रयत्न केला आहे. ही लेखन पद्धति मी यथाप्रसंगीं स्पष्ट करून दाखवीत आहे.

क्ष ही विकारी संख्या असून हिचा संचय य ही संख्या आहे. या संबंधाचें लेखन खालीं लिहिल्याप्रमाणें——

$$य = सं\ (क्ष)\ \text{किंवा}\ य = ञ\ (क्ष)$$

यातील सं (क्ष) याचा अर्थ असा आहे कीं क्ष च्या संबंधाचीं जीं कांहीं पदें असतील या सर्वांची एकूणात करून आलेली संख्या. एकूणात शब्दाचा अर्थ बेरजेपेक्षां भिन्न आहे. जसें——

अ = ७ + ३ + ५ + १ = १६ ही बेरीज आहे.

आ = ९ — ३ + १ — ८ + ५ = ४ ही एकूणात आहे.

सं (क्ष) हृया पदांचा अर्थ संक्षिप्त रीतीनें लिहिलेला क्ष चा संचय हा आहे. प्रत्यक्ष संचय कसें असतात हें खालीं लिहिलेल्याप्रमाणें——

	$य = क्ष^{३}$	किंवा	$य = \sqrt{क्ष} = क्ष^{\frac{१}{२}}$
तसेंच	$य = भुक्ष$	;	$य = स्प^{२}\, क्ष + १$
आणि	$य = अ^{क्ष}$	;	$य = अ^{२क्ष} \times ब^{क्ष}$
आणि	$य = घा_{अ}\, क्ष$	;	$य = घा_{इ}\, क्ष^{२}$

हृया आठ समीकरणांचें लेखन खालच्या एकाच समीकरणानें दाखविण्याचें साधन.

$$य = सं\ (क्ष)\ \text{हे आहे.}$$

संचय जर अनेक विकारी पदांचा असेल तर सं (क्ष) हृया संक्षित लेखनांतील कंसाच्या आंत क्ष च्या जागीं तीं विकारी पदें लिहावी जसें——

$$य = सं\ (क्ष, व, ज्ञ)$$

सं (क्ष) हृया लेखनाचें वाचन 'संचय क्ष' असें वाचावें. तसेंच सं (क्ष, व, ज्ञ) हृयाचे वाचन संचय क्ष व ज्ञ असें वाचावें.

१९२. विकारी संख्येची किमत स्थीर नाहीं ती चल आहे. हें चलन वृद्धि ह्या एकाच शब्दानें दाखविण्याचें ठरविलें आहे. पण विकारी संख्येची किमत नुसती वृद्धीच पावत असतें असें नाहीं, ती किमत कमीही होते, म्हणजे चलन वाढ आणि घट अशा दोन प्रकारचें असतें तें चलन आम्ही वृद्धि ह्या एकाच शब्दानें दाखवितो. ह्यावरून वृद्धि म्हणजे वाढ असाच वृद्धि शब्दाचा अर्थ न घेता धनर्ण भेदेकरून दोन प्रकारचा मानिला आहे. एक (धन) + वृद्धि आणि दुसरा (ऋण) — वृद्धि. धन वृद्धीचा अर्थ वाढ हा उघड आहे, पण ऋण वृद्धीचा अर्थ घट किंवा क्षय असा समजावा.

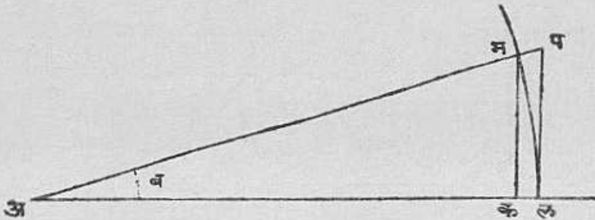
१९३. विवक्षित चल पदाची मर्यादा किमत—विकारी संख्येची किमत, ज्या संख्येच्या अति सन्निध असेल, ती संख्या घेऊन जी त्या विवक्षित पदाची किमत येईल, तिला त्या विवक्षित पदाची मर्यादित किमत म्हणतात.

उदाहरण $\frac{२ क्ष + ३}{क्ष + १}$ हें चल पद आहे ह्याची मर्यादित किमत २ पासून ३ पर्यंत आहे. २ पेक्षां कमी होत नाहीं आणि ३ पेक्षां जास्त होत नाहीं. ही किमत क्ष ही संख्या अनंत (∞) असेल म्हणजे अत्यंत मोठ्या संख्येहून मोठी असेल तेव्हां वरच्या पदाची किमत २ असते आणि ० असेल तेव्हां ३ असते. येथें अत्यंत लहान संख्येपेक्षां लहान संख्येला शून्य म्हटले आहे.

रेषेसंबंधी विचार करिता 'अत्यंत लहान रेषेपेक्षा लहान रेषा' तिला रेषा म्हणता येईल व बिंदूही म्हणता येईल. त्याप्रमाणेच आवधी आणि क्षण व पिंड आणि परमाणु ही शब्दांचीं युग्में आहेत. त्याप्रमाणेच संचय आणि सूक्ष्मांश हे युग्म आहे.

१९४. कांहीं चल पदाच्या किमती नियमित असतात. त्यापैकीं महत्त्वाचीं चार पदें खालीं दिली आहेत :—

$$(१) \quad (\text{मर्यादा } ब = ०) \quad \frac{भुब}{ब} = १$$



पअक हा एक कोन आहे. अप मध्ये म हा एक बिंदु घेतला अल वर मक लंब केला. आणि अ मध्य करून अम त्रिज्येनें मल कंस काढला. तसेंच ल बिंदूतून अलवर लप लंब केला. मक मल पल ह्या तीन रेषांस अम त्रिज्येनें भागिलें, अम = अल आहे. (वर्तुळाच्या त्रिज्या म्हणून).

$$\frac{\text{मक}}{\text{अम}} = \text{भुजज्या ब}, \quad \frac{\text{अक}}{\text{अम}} = \text{कोभुजज्या ब}$$

$$\frac{\text{मल}}{\text{अम}} = \frac{\text{मल कंस}}{\text{त्रिज्या}} = \text{ब कोनाचे वृत्तपरिमाण},$$

$$\frac{\text{पल}}{\text{अल}} = \text{स्पर्श रेषा ब}.$$

आतां

$$\frac{\text{भुब}}{\text{ब}} = \frac{\text{मक}}{\text{मल}}; \quad \text{कोभुब} = \frac{\text{अक}}{\text{अम}}$$

$$\frac{\text{ब}}{\text{स्पब}} = \frac{\text{पल}}{\text{अल}}.$$

म बिंदु मल कंसावरूनच ल कडे आला तर वरच्या समीकरणांमध्यें कांहीं बदल होत नाहीं. अर्थात म बिंदु जर ल बिंदूस मिळाला तर मक = मल = पल आणि अक = अम. म्हणून ब ची किंमत जेव्हां ० असेल तेव्हां.

$$\frac{\text{भुब}}{\text{ब}} = १, \frac{\text{ब}}{\text{स्पब}} = १, \text{कोभुब} = १.$$

(२) (मर्यादा क्ष = १) $\quad \frac{\text{क्ष}^{\text{न}} - १}{\text{क्ष} - १} = \text{न}.$

क्ष = १ + ज्ञ. ही किंमत क्षच्या ठिकाणीं लिहिली तर

$$(\text{मर्यादा क्ष} = १)\frac{\text{क्ष}^{\text{न}} - १}{\text{क्ष} - १} = (\text{मर्यादा ज्ञ} = ०)\ \frac{(१ + \text{ज्ञ})^{\text{न}} - १}{\text{ज्ञ}}.$$

लेख २१ मधील समीकरणांत अ च्या जागीं ज्ञ लिहिला तर—

$$(१ + ज्ञ)^{न} - १ = न\,ज्ञ + \frac{न\,(न-१)}{१.२} ज्ञ^{२} + \cdots\cdots$$

ह्या समीकरणांस ज्ञ नें भागिलें तर

$$\frac{(१ + ज्ञ)^{न} - १}{ज्ञ} = न + \frac{न\,(न-१)}{१.२} ज्ञ + \cdots\cdots$$

$$= न$$

ह्या समीकरणांतील ज्ञ ची किंमत, जेव्हां क्ष ची किंमत १ ह्या संख्येच्या मर्यादेला जाईल तेव्हां ज्ञ = ० होईल. ती घेतली तर वरच्या समीकरणाची किंमत न होते.

$$(३)\ \ (\text{मर्यादा } क्ष = \infty)\ \ \left(१ + \frac{१}{क्ष}\right)^{क्ष} = e$$

ह्या सिद्धांताची सिद्धता लेख ३७ मध्यें दिली आहे. तेथें जें शेवटीं समीकरण $(१+नं)^{न}$ हें दिलें आहे त्यांत न च्या जागी क्ष लिहिला म्हणजे जी श्रेणी येते ती e संख्या होय.

$$(४)\ \ (\text{मर्यादा } क्ष = ०)\ \ \frac{अ^{क्ष} - १}{क्ष} = घा_{e}अ$$

ह्या सिद्धांताची सिद्धता लेख ३९ मध्यें दिली आहे.

शून्य आणि शून्यलब्धि

१९५. शून्य म्हणजे दोन समान संख्यांची वजाबाकी.

जसें अ = क्ष तर क्ष — अ = ०. परंतु ज्यांची वजाबाकी शून्य आहे त्या संख्या समान आहेत, ह्या म्हणण्यांत ती समानता सापेक्ष असते. याचा अर्थ असा कीं, ती वजाबाकी अत्यंत सूक्ष्म असतें आणि ही सूक्ष्मता आपल्या कल्पनेनेंच ठरविली जाते. सर्व समान संख्या पूर्णतेने समान असत नाहींत त्यामध्ये किंचित अंतर असते, त्या अति सूक्ष्म संख्येला शून्य असें म्हणतात. त्या सूक्ष्म संख्येला एथे सूक्ष्मांश असें म्हटलें आहे. क्ष — अ = ० ह्यांतील क्ष ही संख्या अ पेक्षां सूक्ष्मांश या संख्येने लहान मोठी असेल, ती ज ह्या संख्येनें मोठी आहे असे म्हणून गणित करितो, आणि ज ही संख्या क्ष ह्या विकारी संख्येची वृद्धि हिच्या किती पट अवलंबीपदाची वृद्धि आहे हें ठरवितो ह्याची कृति खालीं दाखविल्याप्रमाणें—

$$य = सं(क्ष) = क्ष^{२}.$$

क्ष ची किंमत क्ष $+ \triangle$क्ष झाली तर य ची किंमत य $+ \triangle$य अशी होते, तेव्हां

$$य = क्ष^{२}$$

$$य + \triangle य = (क्ष + \triangle क्ष)^{२}$$

$$\triangle य = क्ष^{२} + २ \triangle क्ष. क्ष + (\triangle क्ष)^{२} - क्ष^{२}$$

$$\frac{\triangle य}{\triangle क्ष} = २ क्ष + (\triangle क्ष)$$

($\triangle$क्ष) ही क्ष ची वृद्धि आहे आणि ($\triangle$ य) ही य ची वृद्धि आहे. एथे ($\triangle$ क्ष) ही क्ष ची वृद्धि अत्यंत सूक्ष्म मानिली तर ($\triangle$ क्ष) हें पद ० होईल म्हणजे

$$\frac{\triangle य}{\triangle क्ष} = २ क्ष.$$

$\triangle$ क्ष ही क्षची वृद्धि अत्यंत सूक्ष्म मानिली तेंव्हां $\triangle$ क्ष ह्या पदाला सूक्ष्मांश क्ष असें नांव आलें. तसेंच $\triangle$ य या पदाला सूक्ष्मांश य असें नांव आलें. आणि त्यांचें लेखन

सूक्ष्मांश य = सूय

आणि सूक्ष्मांश क्ष = सूक्ष

असें लिहिण्याचें ठरविलें आहे. तसेंच यांच्या भागाकारास आणि त्याबरोबर असलेल्या किंमतीस सूक्ष्मांश गुणोत्तर किंवा सूक्ष्मांश गुण म्हणतात. वरच्या उदाहरणांतील सूक्ष्मांश गुणोत्तर किंवा सूक्ष्मांश गुण

$$य = क्ष^{२} \quad तर \quad \frac{सूय}{सूक्ष} = २ क्ष$$

असा आहे.

१९६. वरच्या लेखातील विचारावरून पाहतां शून्य शब्दाचे अर्थ आम्ही दोन स्वीकारले आहेत. एक शून्य म्हणजे कांहीं नाहीं, परिमेयता हिचा अभाव आणि दुसरा असा कीं, जी संख्या आपणाला सूक्ष्म आहे असें वाटते तिच्यापेक्षांही सूक्ष्म अशी संख्या. हिला सूक्ष्मांश असें म्हणतो. वरच्या लेखांत 'सूक्ष्मांश गुण' हा शब्द आला आहे, त्याची कृति अशी आहे कीं, य च्या सूक्ष्मांशास क्ष च्या सूक्ष्मांशानें भागणें, म्हणजे शून्यांचा भागाकार, 'शून्यलब्धि' ही आहे. आणि सूक्ष्मांश गुण ह्यास 'शून्यलब्धिगुण' हें नांव प्राप्त होते.

सूक्ष्मांश गुणासंबंधी कांहीं प्रस्थापित सिद्धांत

१९७. य = सं (क्ष) आणि या = सं (क्ष+ज) ह्यांतील ज हा क्ष चा सूक्ष्मांश आहे तेव्हां सूक्ष्मांशगुण

या बरोबर $\frac{\text{या}-\text{य}}{\text{ज}}$ हें पद आहे. म्हणजे

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{या}-\text{य}}{\text{ज}}$$

कोणत्याही संचयाचा सूक्ष्मांशगुण किंवा नामभेदानें शून्यलब्धिगुण किंवा नुसता 'लब्धिगुण' कसा तयार करावा त्याची सर्वसामान्य कृति अशी कीं, क्ष ह्या विकारी पदाची किंमत अल्पांशयुक्त घेऊन जो संचय येईल त्यांतून क्ष ची मर्यादित म्हणजे अल्पांशविरहित पदाच्या किमतीनें जो संचय येतो तो वजा करावा आणि राहिलेल्या बाकीस क्ष च्या अल्पांशानें भागावें. आलेल्या भागाकारांत अल्पांश शून्य मानावा म्हणजे सूक्ष्मांशगुण किंवा लब्धिगुण होतो.

१९८. (१) कोणत्याही संचयांतील स्थिर संख्येचा सूक्ष्मांशगुण शून्य असतो. लक्षणावरून पाहता स्थीर संख्येंत फरक होत नाहीं म्हणून

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{या}-\text{य}}{\text{ज}} = \frac{0}{\text{ज}} = 0$$

१९९. (२) एखादा संचय आणि स्थीर संख्या यांच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण, त्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण आणि ती स्थिर संख्या यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो.

य व हा क्ष चा संचय आहे, त्यांत थ ही स्थीर संख्या आहे, तर ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण शोधूं.

$$\text{य} = \text{थव} = \text{सं (क्ष)} \times \text{थ}$$

तेव्हां $\frac{\text{सु}}{\text{सूक्ष}}(\text{थव}) = \text{थ}\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ असें सिद्ध करावयाचें.

$$\text{या} = \text{थ (व}+\triangle\text{व)} = \text{सं (क्ष }+\triangle) \times \text{थ}$$

$$\frac{\text{या}-\text{य}}{\text{ज}} = \frac{\text{थ} \triangle \text{व}}{\text{ज}} = \text{थ}\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}.$$

२००. (३) ज्या संचयांत अनेक पदें एकाच विकारी पदाची आहेत, तर त्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण हा, प्रत्येक विकारी पद हा क्ष ह्या विकारी पदाचा संचय समजून त्यांचे सूक्ष्मांशगुण काढून जी बेरीज येईल तिच्या बरोबर असतो.

$$य = व + ह + ल + \cdots$$

$$आणि\ व = सं\ (क्ष),\ ह = \text{ऊ}\ (क्ष),\ ल = \text{ए}\ (क्ष) + \cdots$$

$$तसेच\ या = वा + हा + ला + \cdots$$

$$या - य = (वा - व) + (हा - ह) + (ला - ल) + \cdots$$

ह्या सर्वास ज नें भागिले तर

$$\frac{सूय}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूक्ष} + \frac{सूह}{सूक्ष} + \frac{सूल}{सूक्ष} + \cdots$$

ऋण पदाचा सूक्ष्मांशगुण ऋण असतो.

२०१. (४) दोन संचयांच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण हा प्रत्येक संचयाच्या सूक्ष्मांशगुणास तदीतर संचयानें गुणून जे गुणाकार येतील त्या गुणाकारांच्या बेरजे-बरोबर असतो.

$$य = व \times ह,$$

$$आणि\ व = सं\ (क्ष)\ तसेंच\ ह = सं\ (क्ष)$$

$$या - य = वा \times हा - वह$$

$$= वा \times हा - वा \times ह + वा.ह - व.ह$$

$$= वा\ (हा - ह) + ह\ (वा - व)$$

क्ष ची किमत जेव्हां मर्यादिला जाईल तेव्हां, म्हणजे ज हा क्ष चा सूक्ष्मांश होईल तेव्हां वा = व म्हणून

$$\frac{या - य}{ज} = व\ \frac{हा - ह}{ज} + ह\ \frac{वा - व}{ज}$$

म्हणजे

$$\frac{सूय}{सूक्ष} = व\,\frac{सूह}{सूक्ष} + ह\,\frac{सूव}{सूक्ष}$$

२०२. वरचें समीकरण व × ह भागिलें तर

$$\frac{१}{य}.\frac{सूय}{सूक्ष} = \frac{१}{व}.\frac{सूव}{सूक्ष} + \frac{१}{ह}.\frac{सूह}{सूक्ष}$$

य बरोबर अनेक संचयांचा गुणाकार असेल तर त्याचा सूक्ष्मांशगुण वरच्या समीकरणावरून सहज साध्य होतो तो असा—

$$य = व \times ल \times ज्ञ \text{ असेल तर } ल \times ज्ञ = ह \text{ माना.}$$

तर वरच्या सिद्धांताप्रमाणें

$$\frac{१}{ह} \cdot \frac{सूह}{सूक्ष} = \frac{१}{ल} \cdot \frac{सूल}{सूक्ष} + \frac{१}{ज्ञ} \cdot \frac{सूज्ञ}{सूक्ष}$$

ही किंमत वरच्या समीकरणात ठेविली म्हणजे

$$\frac{१}{य} \cdot \frac{सूय}{सूक्ष} = \frac{१}{व} \cdot \frac{सूव}{सूक्ष} + \frac{१}{ल} \cdot \frac{सूल}{सूक्ष} + \frac{१}{ज्ञ} \cdot \frac{सूज्ञ}{सूक्ष}$$

२०३. दोन संचयांच्या भागाकाराचा सूक्ष्मांशगुण हा

$$\frac{\text{भाजक} \times (\text{भाज्याचा सू.गुण}) - \text{भाज्य} \times (\text{भाजकाचा सू.गुण})}{\text{भाजकाचा वर्ग}}$$

ह्याबरोबर असतो.

$$य = \frac{व}{ह} \text{ तर } या = \frac{वा}{हा}$$

$$या - य = \frac{वा}{हा} - \frac{व}{ह} = \frac{वा\,ह - हा\,व}{हा\,ह}$$

$$= \frac{वा\,ह - व\,ह - व\,हा + वह}{हा\,ह}$$

$$\frac{या - य}{ज} = \left\{ \frac{ह\,(वा - व)}{ज} - \frac{व\,(हा - ह)}{ज} \right\} \div हा\,ह$$

क्ष ची किंमत जेव्हां मर्यादिला जाईल तेव्हां म्हणजे ज हा क्ष चा सूक्ष्मांश होईल तेव्हां हा = ह होईल. म्हणून

$$\frac{सूय}{सूक्ष} = \frac{ह\,\frac{सूव}{सूक्ष} - व\,\frac{सूह}{सूक्ष}}{ह^{२}}$$

२०४. विवक्षित अवलंबी पद ज्या विकारी पदाच्या संचयानें बनलें आहे, तें विकारी पद अन्य विकारी पदाचा संचय असतां त्या विवक्षित अवलंबी पदाचा त्याच्या विकारी पदान्वयी सूक्ष्मांशगुण काढावयाचा.

$$य = सं\,(व). \text{ आणि } व = ऩ्ड\,(क्ष)$$

असें आहे तर $\frac{सूय}{सूक्ष}$ हा सूक्ष्मांशगुण शोधावयाचा.

येथें य चा अल्पांश $\triangle$ य, व चा अल्पांश $\triangle$ व आणि क्ष चा अल्पांश $\triangle$ क्ष हा आहे तेव्हां

$$\frac{\triangle \text{य}}{\triangle \text{क्ष}} = \frac{\triangle \text{य}}{\triangle \text{व}} \times \frac{\triangle \text{व}}{\triangle \text{क्ष}}$$

अल्पांश हे सूक्ष्मांश केले तर

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}.$$

२०५. अवलंबी पद आणि विकारी पद यांचा सूक्ष्मांशगुण, आणि विकारीपद ते अवलंबी करून आलेला सूक्ष्मांशगुण यांचा गुणाकार १ असतो. म्हणजे

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} \times \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूय}} = १$$

वरच्या लेखांतील समीकरण खालीं लिहिले आहे, त्यांत य च्या जागीं क्ष ठेविला तर

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक्ष}} = १$$

म्हणून

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$$

ह्या समीकरणाचें स्वरूप

$$१ = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूव}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$$

किंवा

$$\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} = \frac{१}{\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूव}}}$$

व च्या जागीं य लिहिला तर

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} \times \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूय}} = १$$

संस्मरणीय शून्यलब्धिगुण

२०६. पूर्वी सांगितलेंच आहे कीं, संचय चार प्रकारचें आहेत. बैजिक, वार्तीक, घातप्रकाशी आणि घातांकी. लेख १९० (इ). ह्यापैकीं प्रत्येक प्रकारच्या संचयाचा शुन्यलब्धिगुण विशेष प्रकारचा असतो ते प्रकार ठरलेलें आहेत. यामुळें लब्धिगुण शोधण्याला विशेष आयास करावे लागत नाहींत. ह्या विषयांतील मुख्य

कार्य संचयाचा शून्यलब्धिगुण शोधणें हें आहे परंतु तें फार सुलभ आहे, हें खालच्या विचारावरून तेव्हांच कळून येईल. चार प्रकारचे संचय क्रमानें घेऊन त्यांचे शून्य-लब्धिगुण म्हणजेच सूक्ष्मांशगुण क्रमानें काढून दाखविले आहे.

कोणतांही संचय असो त्याचा शून्यलब्धिगुण कसा काढावा याची कृति खाली आठवणीकरितां पुन्हा लिहिली आहे :

$$व = सं\,(क्ष)$$

$$तर \quad \frac{सूव}{सूक्ष} = [मर्यादा\ ज = ०]\ \frac{सं(क्ष+ज) - सं(क्ष)}{ज}$$

हें शून्यलब्धिगुणाच्या कृतीचें सामान्य लेखन आहे.

२०७. बैजिक शून्यलब्धिगुण—

$क्ष^{न}$ या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\,(क्ष) = क्ष^{न}$$

$$वा = सं\,(क्ष + ज) = (क्ष + ज)^{न}$$

$$= क्ष^{न}\left\{१ + \frac{ज}{क्ष}\right\}^{न},$$

ह्यापैकीं कंसांतील द्विपद राशीचा घातविस्तार लेख २१ प्रमाणें केला तर— (ह्या घात विस्तारांत ज संख्येच्या वर्गापर्यंत म्हणजे $ज^{२}$ पर्यंत जी पदें येतील त्यापेक्षां जास्त पदांची आवश्यकता नाहीं. कारण क्ष ची किंमत मर्यादेला गेली म्हणजे ज ची किंमत शून्य होते. अर्थात ज्या पदांत ज संख्या असेल तें पद शून्य होऊन लुप्त होतें.

म्हणून

$$वा = क्ष^{न}\left\{१ + न\left(\frac{ज}{क्ष}\right) + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}\left(\frac{ज}{क्ष}\right)^{२} + \dots\right\}$$

$$वा - व = क्ष^{न} + न\,क्ष^{न-१} \times ज + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}क्ष^{न-२} \times ज^{२} + \dots - क्ष^{न}$$

$$= न\,क्ष^{न-१} \times ज + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}क्ष^{न-२} \times ज^{२} + \dots$$

$$\frac{वा - व}{ज} = न\,क्ष^{न-१} + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}क्ष^{न-२} \times ज$$

ज ची किंमत मर्यादेला नेली तर ज = ० आणि $\frac{वा - व}{ज}$ ह्या बरोबर शून्य-लब्धिगुण म्हणजेच सूक्ष्मांशगुण. तेव्हां

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = नक्ष^{न-१}.$$

२०८. घातप्रकाशी शून्यलब्धिगुण. $अ^{क्ष}$ ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\ (क्ष) = अ^{क्ष}$$

$$वा = सं\ (क्ष + ज) = अ^{क्ष + ज} = अ^{क्ष} \times अ^{ज}$$

$$वा - व = अ^{क्ष} \times अ^{ज} - अ^{क्ष} = अ^{क्ष}(अ^{ज} - १)$$

$$\frac{वा - व}{ज} = अ^{क्ष} \times \frac{अ^{ज} - १}{ज}$$

परंतु $\frac{अ^{ज} - १}{ज}$ ह्या पदाची किंमत लेख ३९ प्रमाणे $घा_{e}अ$ ही आहे.

म्हणून $\frac{सूव}{सूक्ष} = अ^{क्ष} घा_{e} अ.$

ह्या संचयाचे स्वरूप $e^{क्ष}$ असें असेल तर

$$व = e^{क्ष}$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = e^{क्ष} घा_{e}e = e^{क्ष} \quad [घा_{e}e = १].$$

२०९. घातांकी शून्यलब्धिगुण. $घा_{अ}क्ष$ ह्या संचयाचा सूक्ष्मांश गुण.

$$व = सं\ (क्ष) = घा_{अ}\,क्ष$$

$$वा = सं\ (क्ष + ज) = घा_{अ}\,(क्ष + ज)$$

$$वा - व = घा_{अ}\,(क्ष + ज) - घा_{अ}\,क्ष$$

$$= \frac{घा_{अ}\,(क्ष + ज)}{घा_{अ}\,क्ष} = घा_{अ}\left(\frac{क्ष + ज}{क्ष}\right)$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{१}{ज}\,घा_{अ}\left(१ + \frac{ज}{क्ष}\right)$$

एथें $\frac{क्ष}{ज}$ = ज्ञ संख्या मानिली आणि ज = ० अशी क्ष ची मर्यादा झाली तर ज्ञ = अनंत यामुळे

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{१}{ज} घा_{अ} \left(१ + \frac{१}{ज्ञ}\right)$$

$$= \frac{ज्ञ}{क्ष} घा_{अ} \left(१ + \frac{१}{ज्ञ}\right)$$

$$= \frac{१}{क्ष} घा_{अ} \left(१ + \frac{१}{ज्ञ}\right)^{ज्ञ}$$

(घातांकाला गुणिल्यानें, तो घातांक ज्या संख्येचा असेल तिचा त्या गुणक संख्ये-इतका घात होतो.)

एथे $(१ + \frac{१}{ज्ञ})$ ह्या संख्येच्या घातांकाला ज्ञ ने गुणिले आहे म्हणून तो घातांक $(१ + \frac{१}{ज्ञ})^{ज्ञ}$ ह्या संख्येचा होतो परंतु $(१ + \frac{१}{ज्ञ})^{ज्ञ}$ ह्या संख्येतील ज्ञ जर अनंत असेल तर तिची किंमत e होते, असें लेख ३७ मध्यें सिद्ध केलें आहे.

म्हणून

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{क्ष} घा_{अ} e .$$

ह्या संचयाचे स्वरूप $घा_{e}$ क्ष असे असले तर

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{क्ष} घा_{e} e = \frac{१}{क्ष} \quad [घा_{e} e = १] .$$

२१०. वार्तिक शून्यलब्धिगुण. भुजज्यादि गुणोत्तरांचे सूक्ष्मांशगुण.

भुजज्या क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण

$$व = सं (क्ष) = भुक्ष ,$$

$$वा = सं (क्ष + ज) = भु (क्ष + ज) ,$$

$$वा - व = भु (क्ष + ज) - भुक्ष ,$$

$$= २ भु \frac{ज}{२} कोभु \left(क्ष + \frac{ज}{२}\right) \qquad [लें. ६२, समी. १०].$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{भु \frac{ज}{२}}{\frac{ज}{२}} कोभु \left(क्ष + \frac{ज}{२}\right)$$

क्ष ची किंमत मर्यादेला गेली म्हणजे ज = ० अर्थात $\frac{ज}{२} = ०$

$$\text{आणि} \quad \frac{भु \frac{ज}{२}}{\frac{ज}{२}} = १ \quad \text{म्हणून}$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = कोभुक्ष.$$

२११. कोभुजज्या क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\ (क्ष) = कोभुक्ष,$$

$$वा = सं\ (क्ष + ज) = कोभु\ (क्ष + ज)$$

$$वा - व = कोभु\ (क्ष + ज) - कोभुक्ष$$

$$= -\ २\ भु \frac{ज}{२}\ भु\ (क्ष + \frac{ज}{२}) \qquad [\text{लें. ६२, समी. १२}]$$

$$\frac{वा - व}{ज} = २ \frac{भु \frac{ज}{२}}{\frac{ज}{२}} \cdot भु\ (क्ष + \frac{ज}{२}) \qquad \left[\frac{भुब}{ब} = १\right]$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = -\ भुक्ष.$$

२१२. स्पर्शरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\ (क्ष) = स्प\ क्ष$$

$$वा = सं\ (क्ष + ज) = स्प\ (क्ष + ज)$$

$$वा - व = स्प\ (क्ष + ज) - स्प\ क्ष = \frac{भुज}{कोभु\ (क्ष + ज)\ कोभुक्ष}$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{भुज}{ज} \times \frac{१}{कोभु\ (क्ष + ज)\ कोभुक्ष}$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{कोभु^{२}क्ष}.$$

२१३. को स्पर्शरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\ (क्ष) = कोस्प\ क्ष$$

$$वा = सं\ (क्ष + ज) = कोस्प\ (क्ष + ज)$$

$$\frac{वा - व}{ज} = \frac{१}{ज}\left\{ कोस्प\ (क्ष + ज) - कोस्प\ क्ष \right\} = \frac{- भुज}{ज}\ \frac{१}{भु\ (क्ष + ज)\ भुक्ष}.$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = - \frac{१}{भु^{२}क्ष}.$$

२१४. छेदनरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\ (क्ष) = छे\ क्ष = \frac{१}{कोभुक्ष},$$

लेख २०३ प्रमाणें भागाकाराचा सूक्ष्मांशगुण,

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{कोभुक्ष \times ० - १ \times (- भुक्ष)}{कोभु^{२}क्ष} = \frac{भुक्ष}{कोभु^{२}क्ष}.$$

२१५. कोछेदनरेषा क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\ (क्ष) = कोछेक्ष = \frac{१}{भुक्ष},$$

लेख २०३ प्रमाणे भागाकाराचा सूक्ष्मांशगुण.

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{भुक्ष \times ० - १ \times कोभुक्ष}{भु^{२}क्ष} = - \frac{कोभुक्ष}{भु^{२}क्ष}.$$

२१६. वार्तिक शून्यलब्धिगुण. वृत्त परिमाणाचे सूक्ष्मांशगुण.

कोनाचें मापन अंशादिकांनी आणि वृत्त परिमाणानें करितात. कोनांचे धर्म असें आहेत कीं एका कोनाचा दुसऱ्या कोनाशी जो संबंध असेल तो तिसऱ्या कोनांत असत नाहीं. म्हणून त्यांचे संबंध भुजज्यादि गुणोत्तरांचेच द्वारा ठरले जातात. यासाठी कोनांचे दर्शन किंवा उल्लेखन भुजज्यादिकांनीं करावे लागते. म्हणजे ३० अंशांचा कोन किंवा $\frac{\pi}{६}$ वृत्त परिमाणाचा कोन त्याच्या भुजज्येनें उल्लेखिला जातो. तीस अंश, किंवा $\frac{\pi}{६}$ वृत्त या कोनाची भुजज्या $\frac{१}{२}$ आहे. म्हणून हा कोन, 'ज्याची भुजज्या $\frac{१}{२}$

आहे तो कोन' अशा भाषेनें उल्लेखिला जातो. त्याचें लेखन $भु^{-१}\frac{१}{२}$ असे लिहिण्याचा संकेत आहे. या भाषेनें $भु^{-१}क्ष$ किंवा $कोभु^{-१}क्ष$ अथवा $स्प^{-१}क्ष$ हे उल्लेख कोनांचे आहेत पण यांत क्ष ही संख्या अंश किंवा वृत्त यांची नाहीं. ती त्या कोनाची भुजज्या किंवा कोभुजज्या किंवा स्पर्शरेषा असेल. ज्या गुणोत्तराची असेल त्या गुणोत्तराच्या नावावर -१ हें चिन्ह लिहावें असा संकेत आहे. $भु^{-१}क्ष$ हा उल्लेख 'भु उणा एक क्ष' असा वाचणें.

२१७. $भु^{-१}क्ष$ ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण.

$$व = सं\ (क्ष) = भु^{-१}क्ष.$$

क्ष ज्याची भुजज्या आहे तो कोन ज्ञ वृत्त परिमाणाचा आहे.

म्हणजे $\qquad क्ष = भुज्ञ \qquad$ असें घेऊं.

एथें आपण ज्ञ हें विकारी पद घेऊं आणि क्ष हें अवलंबी पद म्हणूं. तेव्हां $\frac{सूक्ष}{सूज्ञ} =$ कोभुज्ञ असें वर सिद्ध केलें आहे.

प्रस्तुत कार्यात क्ष ज्याची भुजज्या आहे तो कोन हेंच विकारी पद आहे. म्हणून $क्ष = सं\ (व) = भुव$

$$म्हणून \quad \frac{सूक्ष}{सूव} = कोभुव$$

$$पण\ कोभुव = \sqrt{१ - भु^{२}व} = \sqrt{१ - क्ष^{२}}$$

म्हणून

$$\frac{सूक्ष}{सूव} = \sqrt{१ - क्ष^{२}}$$

परंतु आपणास $\frac{सूव}{सूक्ष}$ हा सूक्ष्मांशगुण पाहिजे तो आपणास लेख २०५ च्या आधारें आणिता येतो. कारण

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{\frac{सूक्ष}{सूव}} = \frac{१}{\sqrt{१ - क्ष^{२}}}.$$

२१८. कोभु$^{-1}$क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—
वरच्या लेखांतील कृतीप्रमाणें

$$क्ष = कोभु व ; \ \frac{सूक्ष}{सूव} = - भुव$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{\frac{सूक्ष}{सूव}} = - \frac{१}{भुव} = - \frac{१}{\sqrt{१ - क्ष^{२}}}.$$

२१९. स्प$^{-1}$क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$क्ष = स्प व \ \text{आणि} \ \frac{सूक्ष}{सूव} = \frac{१}{कोभु^{२}व} = १ + स्प^{२}क्ष$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = कोभु^{२}व = \frac{१}{१ + क्ष^{२}}.$$

२२०. छेदनरेषा$^{-1}$क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$क्ष = छेदन \ रेषा \ व ; \ \frac{सूक्ष}{सूव} = \frac{भुव}{कोभु^{२}व} = छेव \ स्पव$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{कोभु^{२}व}{भुव} = \frac{१}{क्ष\sqrt{क्ष^{२} - १}}.$$

२२१. कोस्प$^{-1}$क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$क्ष = कोस्प \ व, \ \frac{सूक्ष}{सूव} = - \frac{१}{भु^{२}व}$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = - भु^{२}व = - \frac{भु^{२}व}{भु^{२}व + कोभु^{२}व}$$

$$= - \frac{१}{१ + कोस्प^{२}व} = - \frac{१}{१ + क्ष^{२}}.$$

२२२. कोछेदन रेषा$^{-1}$ क्ष ह्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण—

$$क्ष = को \ छेदन \ रेषा \ व ; \ \frac{सूक्ष}{सूव} = - \frac{कोभु \ व}{भु^{२}व}$$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = - \frac{भु \ व}{भु^{२}व} = - \frac{१}{को \ छे \ व. \ कोस्प \ व}$$

$$= - \frac{१}{क्ष\sqrt{क्ष^{२} - १}}.$$

सूक्ष्मांशगुण परंपरा

२२३. एखाद्या संचयाचा सूक्ष्मांशगुण तयार केला तर त्या सूक्ष्मांशगुणाचा सूक्ष्मांशगुण करण्याची आवश्यकता असते. सूक्ष्मांशगुणाचा जो सूक्ष्मांशगुण त्यास द्वितीय सूक्ष्मांशगुण म्हणतात. द्वितीयसूक्ष्मांशगुणाचा जो सूक्ष्मांशगुण त्यास तृतीय सूक्ष्मांशगुण म्हणतात. ह्याप्रमाणें सूक्ष्मांशगुणांची परंपरा असते. सूक्ष्मांशगुण द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ यांचे लेखन खाली लिहिल्याप्रमाणे करितातः--

प्रथम सूक्ष्मांशगुण व = सं (क्ष) ह्या संचयाचा $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ असा लिहितात. परंतु हें नुसतें सांकेतिक चिन्ह आहे. ह्याने दर्शविलेली किंमत क्ष ची बैजिक वगैरे पदें यांनीं समजतें. ह्याचप्रमाणे द्वितीय सूक्ष्मांशगुणाचे आम्हास चिन्हच ठरवावयाचें आहे. $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ ह्या चिन्हाचे आम्ही दोन भाग करितो. पहिला भाग $\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}}$ हा आणि दुसरा भाग व. आतां द्वितीय सूक्ष्मांशगुण लिहावयाचा तेव्हां व च्या जागी $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$ हें चिन्ह लिहिल्यानें त्यानें द्वितीय सूक्ष्मांशगुणाची जाणीव होईल. म्हणून $\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}\right)$ ह्या चिन्हानें सूक्ष्मांशगुण दाखवितो. पण ह्यानें सुद्धां लेखन सौकर्य येत नाहीं. कारण तृतीय सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}}\left\{\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}\right)\right\}$ असा लिहावा लागेल. ही आपत्ति टाळण्याकरितां पुढे लिहिलेली सोय केली आहे. द्वितीय सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सू}}{\text{सूक्ष}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}\right)$ असा हे ह्यातील कंस काढून टाकला तर अंशस्थानची सू सू हीं दोन अक्षरें एक ठिकाणी येतात त्यांच्या स्थानीं सू २ लिहूं, आणि छेदस्थानीं सूक्ष. सूक्ष अशी दोन पदें येतात त्याचें लेखन सूक्ष^{2} असें लिहूं म्हणजे द्वितीय सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सू}^{2}\text{व}}{\text{सूक्ष}^{2}}$ असा होतो. हें त्याचें लेखन सोयीचें आहे. तृतीय सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सू}^{3}\text{व}}{\text{सूक्ष}^{3}}$ असा लिहितां येतो. ह्याप्रमाणेच हवा तो सूक्ष्मांशगुण लिहितां येतो. ह्या लेखनाचें वाचन सामान्यत्वें तृतीय सूक्ष्मांशगुण असें असून तृतीय सूव भागिलें सूक्ष घन असेंही करिता येतें.

२२४. खालीं एक-दोन सूक्ष्मांश परंपरेचीं उदाहरणें दाखविली आहेत :—

(१) $य = क्ष^{न}$ ह्याची सूक्ष्मांश परंपरा लिहा.

$$\frac{सूय}{सूक्ष} = न क्ष^{न-१} \qquad \frac{सू२य}{सूक्ष^{२}} = न (न - १) क्ष^{न-२}$$

$$\frac{सू३य}{सूक्ष^{३}} = न (न-१) (न-२) क्ष^{न-३}.$$

(२) $व = भु (अक्ष + ब)$ तर सूक्ष्मांशगुण परंपरा शोधा.

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = + अ कोभु (अक्ष + ब)$$

$$\frac{सू२व}{सूक्ष^{२}} = - अ^{२}भु (अक्ष + ब).$$

$$\frac{सू३व}{सूक्ष^{३}} = - अ^{३}कोभु (अक्ष + ब).$$

$$\frac{सू४व}{सूक्ष^{४}} = + अ^{४}भु (अक्ष + ब).$$

(३) $व = स्प क्ष \qquad \frac{सूव}{सूक्ष} = १ + व^{२}$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{कोभु^{२}क्ष} = \frac{कोभु^{२}क्ष + भु^{२}क्ष}{कोभु^{२}क्ष} = १ + स्प^{२}क्ष$$

$$आतां \frac{सू}{सूक्ष} (स्प^{२}क्ष) = \frac{सू}{सूक्ष} (स्पक्ष \times स्पक्ष)$$

$$= २ स्पक्ष \frac{सू}{सूक्ष} (स्पक्ष) \qquad [ले. २०१ (४)]$$

$$\frac{सू२व}{सूक्ष^{२}} = २ व (१ + व^{२}) = २ व + २ व^{३}$$

तसेच $\frac{सू}{सूक्ष}$ (२ स्पक्ष + २ स्प^{३}क्ष)

$$= \frac{सू}{सूक्ष} (२ \text{ स्पक्ष}) + \frac{सू}{सू क्ष} (२ \text{ स्प}^{३}\text{क्ष})$$

$$= २ \frac{सूव}{सूक्ष} + \frac{सू}{सूक्ष} (२ \text{ स्पक्ष} \times \text{स्प}^{२}\text{क्ष})$$

$$= २ (१+व^{२}) + २ व^{२} (१+व^{२}) + २ व (१+व^{२}) \times २ व$$

$$\frac{सू३व}{सूक्ष^{३}} = २ (१ + ४ व^{२} + ३ व^{४}).$$

(४) $व = e^{अक्ष}$ $\qquad \frac{सूव}{सूक्ष} = अe^{अक्ष} = अव$

$$\frac{सू२व}{सूक्ष^{२}} = अ^{२}e^{अक्ष} = अ^{२}व$$

$$\frac{सू३व}{सूक्ष^{३}} = अ^{३}e^{अक्ष} = अ^{३}व$$

$$\frac{सू४व}{सूक्ष^{४}} = अ^{४}e^{अक्ष} = अ^{४}व$$

(५) $व = घाक्ष$

$$\frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{१}{क्ष} \qquad \frac{सू२व}{सूक्ष^{२}} = - \frac{१}{क्ष^{२}}$$

$$\frac{सू३व}{सूक्ष^{३}} = \frac{१\cdot२}{क्ष^{३}} \qquad \frac{सू४व}{सूक्ष^{४}} = \frac{१\cdot२\cdot३}{क्ष^{४}}$$

संचय-स्पष्टीकरण

२२५. अवलंबी पदाबरोबर विकारी पदाचा संचय आहे, विकारी पदाची किंमत जर आपणाला समजली तर त्या किंमतीवरून त्या संचयाची किंमत किती असेल हे आपणास शोधावयाचे आहे. ह्या कार्याला संचयाचें स्पष्टीकरण असें म्हणावें.

जसें स्पक्ष = ब. एथे क्ष हें वृत्तपरिमाण आपणाला माहित आहे, तर ह्या क्ष च्या किंमतीनें ब ची किंमत शोधणें याला संचयस्पष्टीकरण म्हणावें. तसेंच ब ची किंमत माहित आहे त्यावरून क्ष ची किंमत शोधणें यालाहि संचय स्पष्टीकरण म्हणावें. हें कार्य, बीजगणितातील घातांकाचे सिद्धांत घातप्रकाशक सिद्धांत त्रिकोण मितीतील कांहीं सिद्धांत यांच्या सहाय्यानें अंशतः करितां येतें. तें सूक्ष्मांश गणितानें संपूर्ण (शक्य ते) करिता येतें. हें कार्य करण्याचें कांहीं सिद्धांत ठरलेले आहेत. त्याचें उपपादन खालीं केलें आहे.

२२६. प्रत्येक अवलंबी पद विकारी व कांहीं स्थीर संख्या यांनीं निर्माण झालें आहे. ते, विकारी पदाचा एक घात, वर्ग, घन इत्यादिकांना कांहीं स्थीर गुणक यांनीं गुणून झाले आहे. त्याची मांडणी खालीं लिहिल्याप्रमाणें घेऊं. समजा व हें अवलंबी पद क्ष चा संचय आहे.

म्हणजे व = सं (क्ष)

याचा उल्लेख असा

$\text{व} = \text{७} + \text{घ क्ष} + \text{ग्न क्ष}^2 + \text{ड क्ष}^3 + \text{ढ क्ष}^4$ याची सूक्ष्मांश परंपरा खालीं दिल्याप्रमाणें :—

$$\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} = \text{घ} + \text{२ ग्न क्ष} + \text{३ ड क्ष}^2 + \text{४ ढ क्ष}^3$$

$$\frac{\text{सू२व}}{\text{सूक्ष}^2} = \text{२ ग्न} + \text{२.३ ड क्ष} + \text{३.४ ढ क्ष}^2$$

$$\frac{\text{सू३व}}{\text{सूक्ष}^3} = + \text{२.३ ड} + \text{२.३.४ ढ क्ष}$$

$$\frac{\text{सू४व}}{\text{सूक्ष}^4} = + \text{२.३.४ ढ}$$

ह्या सूक्ष्मांशगुग परंपरेमध्यें प्रत्येक विकारी पद क्ष=० मानिले तर प्रत्येक सूक्ष्मांशगुणाची किंमत खालीं लिहिल्याप्रमाणें येईल. लेखन सौकर्याकरितां व,

$\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}}$, $\frac{\text{सू२व}}{\text{सूक्ष}^2}$, $\frac{\text{सू३व}}{\text{सूक्ष}^3}$ इत्यादि पदांची निर्देश व_0, व_1, व_2, व_3 इत्यादि अक्षरांनीं करितो.

तेव्हां $व_० = ॳ$; $व_१ = ঘ$; $व_२ = २\,ঘ्न$; म्हणून $ঘ्न = \frac{व२}{१\cdot२}$

$$व३ = २\cdot३\ ड \text{ म्हणून } ड = \frac{व३}{१\cdot२\cdot३}$$

$$व४ = २\cdot३\cdot४\ ॾ \text{ म्हणून } ॾ = \frac{व४}{१\cdot२\cdot३\cdot४}$$

ॳ, ঘ, ঘ्न, ड, ॾ ह्याच्या किमती प्रथम दिलेल्या समीकरणांत लिहिल्या तेव्हां

$$व = व_० + व_१\, क्ष + व_२ \frac{क्ष^२}{१\cdot२} + व_३ \frac{क्ष^३}{१\cdot२\cdot३} + \text{इत्यादि}$$

ह्या समीकरणारूपीं सिद्धांताच्या योजनेनें व ह्या कोणत्याही संचयाची किंमत क्ष ह्या विकारी पदाच्या घातावर्लानें तयार होते.

२२७. कोन आणि त्याचीं भुज्जादि गुणोत्तरें ह्या दोहोंपैकीं एक अवगत असता दुसऱ्याची किंमत किती हें ठरविण्याची अत्यंत आवश्यकता असते. हें कार्य वरच्या समीकरणानें करता येते तसेंच शून्यलब्धिनेंही करतां येतें. ह्या प्रकारचे अनेक सिद्धांत पाश्चात्य गणितांत आहेत. विस्तारभयामुळें त्यांचें उद्घाटन येथें केलें नाहीं.

कोन आणि भुज्जादि गुणोत्तरें

२२८. विवक्षित कोनाची भुज्ज्या, त्या कोनाच्या वृत्तपरिमाणानें दाखविणें.

कोनाचें वृत्तपरिमाण म्हणजे तो कोन ज्या कंसावरचा मध्यकोण आहे त्या कंसाच्या लांबीला, तो कंस त्या वर्तुळाचा आहे त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येनें भागून आलेला भागाकार होय. हा भागाकार केवल संख्यात्मक असतो. हें वृत्तपरिमाण **ब** ह्या अक्षरानें दाखविण्याचे ठरविले आहे. ही ब संख्या आपणास ज्ञात आहे असें समजून त्या कोनाची भुजज्या किती आहे हें आपणाला शोधावयाचे आहे. म्हणजे भुजज्येची किंमत, ब ह्या संख्येच्या पटीनें किंवा हिश्श्यानें अथवा $ब^२$, $ब^३$ इत्यादि कोणत्याही घाताच्या पटीनें किंवा हिश्श्यानें दाखवयाची आहे. ती दाखवितां येणें शक्य आहे. तें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें :—

$$भुब = ॳ + ঘ\cdot ब + ঘ्न \cdot ब^२ + ड\cdot ब^३ + ॾ \cdot क्ष^४ + ঘ्न\cdot ब^५ + \cdots\cdots$$

ह्या समीकरणातील ॳ ঘ ঘ्न इत्यादि गुणक भुजज्या व च्या अनुरूप असले म्हणजे आपणाला भुब ची किंमत सापडेल.

२२९. वरच्या समीकरणांतील ङ घ प्र गुणक गणित सिद्धातांनी शोधांता येतात. ते मार्ग अनेक आहेत. पण कोणत्याही मार्गानें शोध केला तरी ङ घ प्र ह्या गुणकांच्या किंमती एक येतात.

प्रथम लेख २२६ मध्यें जो सिद्धांत आहे त्यास आपण एम् चा सिद्धांत म्हणू. त्यानें वरच्या गुणांच्या म्हणजे ङ घ प्र इत्यादिकांच्या किंमती शोधूं. तेव्हां

$$व = भुब ; \quad \frac{सू३व}{सूब^{३}} = - कोभुक्ष ;$$

$$\frac{सूव}{सूब} = कोभुब ; \frac{सू४व}{सूब^{४}} = + भुक्ष ;$$

$$\frac{सू२ब}{सूब^{२}} = - भुब ; \frac{सू५व}{सूब^{५}} = + कोभुक्ष ;$$

इत्यादि इत्यादि.

एम् च्या सिद्धांतामध्ये ङ घ प्र च्या किंमती $व_{०}$ $व_{१}$ $व_{२}$ इत्यादि रूपानें काढिल्या आहेत. आणि $व_{०}$ $व_{१}$ $व_{२}$ इत्यादिकांच्या किंमती व, $\frac{सूव}{सूक्ष}$, $\frac{सू२व}{सूक्ष^{२}}$ यावरून ठरतात असे सांगितले आहे आणि त्या अशा ठरतात कीं विकारी पद ० असेल त्या स्थितीतल्या घ्याव्या म्हणजे ठरतात. येथें आपण विकारी पद ब घेतले आहे तेव्हा ङ घ प्र किंमती खालीं लिहिल्याप्रमाणे :—

$$ङ = व_{०} = व = भुब ; \quad ब = ० \ म्ह. \ ङ = ०$$

$$घ = व_{१} = \frac{सूव}{सूब} = कोभुब \quad ब = ० \ म्ह. \ घ = १$$

$$प्र = व_{२} = \quad = - भुब \qquad प्र = ०$$

$$ड = व_{३} = \quad = - कोभुब \qquad ड = - १$$

$$र्फ = व_{४} = \quad = + भुब \qquad र्फ = ०$$

$$प्र = व_{५} = \quad = + कोभुब \qquad प्र = + १$$

हच इत्यादि इत्यादि

ह्या किंमती एम् च्या समीकरणांत लिहिल्या तर

$$भुब = ब - \frac{१}{१\cdot२\cdot३} ब^{३} + \frac{१}{१\cdot२\cdot३\cdot४\cdot५} ब^{५} + \ldots\ldots$$

२३०. वरच्या सिद्धांताची सिद्धता अन्य प्रकारें करिता येतें ती सिद्धता खालीं केली आहे.

लेख २२८ मधील समीकरण खालीं घेतो. हें समीकरण स्वयंसिद्ध आहे कारण सर्व संख्या अव्यक्त असून असें असणें शक्य आहे.

$$\text{भुब} = \text{ઉ} + \text{ઘ}.\text{ब} + \text{प्र}.\text{ब}^2 + \text{ડ}.\text{ब}^3 + \text{ઈ}.\text{ब}^4 + \text{प्र}.\text{ब}^5$$
$$\text{भु}(-\text{ब}) = \text{ઉ} - \text{ઘ}.\text{ब} + \text{प्र}.\text{ब}^2 - \text{ડ}.\text{ब}^3 + \text{ઈ}.\text{ब}^4 - \text{प्र}.\text{ब}^5$$

दोन्ही समीकरणांची वजाबाकी केली तर

$$\text{भुब} - \text{भु}(-\text{ब}) = 2\,\text{ઘ}.\text{ब} + 2\,\text{ડ}.\text{ब}^3 + 2\quad .\text{ब}^5 + 2\,\text{ઈ}.\text{ब}^7 + ..$$
पण $\text{भु}(-\text{ब}) = (-\text{भुब})$ म्हणून $-\text{भु}(-\text{ब}) = +\text{भुब}$, अर्थात्
$$\text{भुब} + \text{भुब} = 2\,\text{भुब} = 2\,\text{ઘ}.\text{ब} + 2\,\text{ડ}.\text{ब}^3 + 2\,\text{प्र}.\text{ब}^5 + \ldots.$$
$$\text{भुब} = \text{ઘ}.\text{ब} + \text{ડ}.\text{ब}^3 + \text{प्र}\cdot\text{ब}^5 + \text{ઈ}\cdot\text{ब}^7 + \ldots. \quad (\text{अ})$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेटयांचे सूक्ष्मांशगुण काढिले. हे गुण समान येतील. कारण एकाच विकारी पदाचे दोन समान संचय आहेत. तेव्हां

$$\frac{\text{सू}(\text{भुब})}{\text{सूब}} = \text{कोभुब}\ ;\ \text{आणि}\ \frac{\text{सू}(\text{ઘ}.\text{ब})}{\text{सूब}} = \text{ઘ}\ ;$$
$$\frac{\text{सू}(\text{ડ}.\text{ब}^3)}{\text{सूब}} = 3\ \text{ડ}.\text{ब}^2\ ;\ \frac{\text{सू}(\text{प्र}.\text{ब}^5)}{\text{सूब}} = 5\ \text{प्र}.\text{ब}^4$$

ह्यावरून

$$\text{कोभुब} = \text{ઘ} + 3\,\text{ડ}\cdot\text{ब}^2 + 5\,\text{प्र}\cdot\text{ब}^4 + \cdots$$
ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेटयांचे सूक्ष्मांशगुण काढिले तर
$$-\text{भुब} = +\,2.3.\ \text{ડ}\text{ब} + 4.5.\ \text{प्र}\text{ब}^3 + 6.7\ \text{ઈ}\ \text{ब}^5$$
$$\text{किंवा भुब} = -\,2.3\ \text{ડ}\text{ब} - 4.5\ \text{प्र}\text{ब}^3 - 6.7\ \text{ઈ}\text{ब}^5 - \ldots. \quad (\text{क})$$

(अ) आणि (क) हीं समीकरणें समान आहेत कारण दोन्हीं भुब ह्या बरोबर आहेत. आणि ह्या दोन्हीं ब च्या घातावळचा आहेत. म्हणून ब च्या समान घाताचे गुण समान असलेच पाहिजे. म्हणून (लेख ३५)

$$-\,2.3\ \text{ડ} = \text{ઘ}\ ;\ \text{ડ} = -\frac{\text{ઘ}}{2.3}\ ;$$
$$-\,4.5\ \text{प्र} = \text{ડ}\ ;\ \text{प्र} = -\frac{\text{ડ}}{4.5} = +\frac{\text{ઘ}}{2.3.4.5}$$
$$-\,6.7\ \text{ઈ} = \text{प्र}\ ;\ \text{ઈ} = -\frac{\text{प्र}}{6.7} = -\frac{\text{ઘ}}{2.3.4.5.6.7}$$

१×२×३×४× ⋯ न म्हणजे १ पासून न पर्यंत क्रमिक संख्यांचा गुणाकार याला अवयवी न म्हणतात. १·२·३ हे अवयवी ३ आणि १·२·३·४·५ हे अवयवी ५ याचे लेखन $\lfloor$ ह्या चिन्हानें लिहितात, जसें १·२·३ = $\lfloor ३$; १·२·३·४ = $\lfloor ४$ इत्यादि. घ ड म्र ह्यांच्या किंमती अ समीकरणात लिहिल्या तर

$$भुब = घब - \frac{घ}{\lfloor ३} ब^{३} = \frac{घ}{\lfloor ५} ब^{५} -$$

$$\frac{भुब}{ब} = घ - \frac{घ}{\lfloor ३} ब^{२} + \frac{घ}{\lfloor ५} ब^{४}$$

ह्या समीकरणातील ब ची किंमत ० मानिली तर $\frac{भुब}{ब} = १$ म्हणजेच घ=१ आहे. तेव्हां

$$भुब = ब - \frac{ब^{३}}{\lfloor ३} + \frac{ब^{५}}{\lfloor ५} - \frac{ब^{७}}{\lfloor ७} \text{ इत्यादि.}$$

२३१. विवक्षित कोनाची कोनभुजज्या, त्या कोनाच्या वृत्तपरिमाणानें दाखविणें.

वरच्या दोन लेखांत अशी भुब ची किंमत ब ह्या वृत्तपरिमाणानें दाखविता येते असें सिद्ध केलें त्याच पद्धतीनें कोभुब ची किंमत ठरवितां येते. तथापि त्याही पेक्षां अत्यंत सुलभ अशी रीति आहे कीं, $भुब = ब - \frac{ब^{३}}{\lfloor ३} +$ ह्या समीकरणाचे सूक्ष्मांशगुण काढिले असता कोभुब ची किंमत येते. ती किंमत अशी—

$$कोभुब = १ - \frac{ब^{२}}{\lfloor २} + \frac{ब^{४}}{\lfloor ४} - \frac{ब^{६}}{\lfloor ६} + \dots$$

२३२. वर जे भुब आणि कोभुब याविषयींचे सिद्धांत सिद्ध केले ते अनेक प्रकारच्या सिद्धांतांनीं अनेक रीतीनी सिद्ध होतात. त्या सर्व प्रकारच्या सिद्धता येथें देऊन ग्रंथविस्तार करण्याची आवश्यकता नाहीं. यास्तव ते सिद्धांत सुलभशा रीतीनें सिद्ध करून देण्याची योजना मी येथे ठरविली आहे. ज्या सिद्धांतांची ग्रह गतीच्या गणितांत आवश्यकता आहे असेच सिद्धांत मी येथे सिद्ध करीत आहे.

२३३. विवक्षित कोनाचे वृत्तपरिमाण, त्या कोनाच्या भुजज्यानें दाखविणें.

त्या कोनाचे वृत्तपरिमाण ब आहे, आणि भुब=क्ष आहे. ह्यावरून $ब = भु^{-१} क्ष$ म्हणून क्ष च्या घातावळीनें ब ची किंमत ठरवावयाची.

$$ब = भु^{-१}क्ष = ष + घक्ष + म्रक्ष^{२} + डक्ष^{३} + ढक्ष^{४} + \cdots \quad (अ)$$

ब ची किंमत म्हणजे $भु^{-1}क्ष$ ची किंमत क्ष च्या घातावळीनें असणें शक्य आहे. ती ह्या समीकरणाप्रमाणें आहे, ह्यातील ञ घ ञ इत्यादि गुणकांच्या किंमती शोधावयाच्या आहेत. समीकरणाच्या दोन्ही पेटयांचे सूक्ष्मांशगुण काढिले तेव्हां—

डावीकडच्या पेटयाचा सूक्ष्मांशगुण लेख २१७ प्रमाणे.

$$\frac{सू(\overline{भु}^{1}क्ष)}{सूक्ष} = \frac{१}{\sqrt{(१-क्ष^{२})}} = (१-क्ष^{२})^{-\frac{१}{२}}$$

उजवीकडचा सू. गुण = घ + २ ञक्ष + ३ ङक्ष^{२} + ४ ढक्ष^{३} + ५ ण्क्ष^{४}

$$पण\ (१-क्ष^{२})^{-\frac{१}{२}} = १ + \tfrac{१}{२}क्ष^{२} + \tfrac{१}{२}\cdot\tfrac{३}{४}क्ष^{४} + \tfrac{१}{२}\cdot\tfrac{३}{४}\cdot\tfrac{५}{६}क्ष^{६} + \cdots\cdots$$

हीं दोन्हीं समीकरणें समान आहेत. ह्यांतील क्ष च्या समान घात असणाऱ्या पदांचें गुणक समान आहेत. असा सिद्धांत आहे (लेख ३५).
त्यावरून

$$घ = १;\ २ञ = ०;\ ३ङ = \tfrac{१}{२}\ म्हणून\ ङ = \tfrac{१}{२}\cdot\tfrac{१}{३}$$

$$४ढ = ०;\ ५ण = \tfrac{१}{२}\cdot\tfrac{३}{४}\ म्हणून\ ण = \tfrac{१}{२}\cdot\tfrac{३}{४}\cdot\tfrac{१}{५}$$

ह्या किंमती (अ) समीकरणांत लिहिल्या तेव्हां—

$$\overline{भु}^{1}क्ष = क्ष + \tfrac{१}{२}\cdot\frac{क्ष^{३}}{३} + \tfrac{१}{२}\cdot\tfrac{३}{४}\cdot\frac{क्ष^{५}}{५} + \tfrac{१}{२}\cdot\tfrac{३}{४}\cdot\tfrac{५}{६}\cdot\frac{क्ष^{७}}{७} + \cdots\cdot$$

२३४. विवक्षित कोनाचें वृत्तपरिमाण, त्या कोनाच्या स्पर्शरेषेनें दाखवावयाचें

$$\overline{स्प}^{1}क्ष = ञ + घक्ष + ञक्ष^{२} + ङक्ष^{३} + ढक्ष^{४} + \ldots (अ)$$

$$\frac{सू(\overline{स्प}^{1}क्ष)}{सूक्ष} = घ + २ञक्ष + ३ङक्ष^{२} + ४ढक्ष^{३} + \cdots\cdot$$

$$परंतु\ \frac{सू(\overline{स्प}^{1}क्ष)}{सूक्ष} = \frac{१}{१+क्ष^{२}} = १ - क्ष^{२} + क्ष^{४} - क्ष^{६} + \cdots\cdot (क)$$

क्ष च्या समान घाताचे गुणक समान असतात म्हणून—

$$ब = \overline{स्प}^{1}क्ष = क्ष - \tfrac{१}{३}क्ष^{३} + \tfrac{१}{५}क्ष^{५} - \tfrac{१}{७}क्ष^{७} + \cdots\cdot$$

२३५. भुक्ष, कोभुक्ष, $\overline{भु}^{1}$ क्ष आणि $\overline{स्प}^{1}$ क्ष यांच्या किंमती क्षच्या रूपानें सिद्ध केल्या. हे जे चार सिद्धांत सिद्ध केलें त्यांच्या सहाय्यानें त्रिकोणमितीतील भुजज्यादि गुणोत्तरांच्या किंमती सिद्ध करितां येतात. तसेंच कोनाचें अंश, त्या कोनापुढचा कंस यांचे संबंध कळतात. तसेंच ज्या आणि त्रिज्या आणि कंस यांचे अन्योन्यसंबंध सिद्ध होतात. वर्तुळाच्या परीधाचें व्यासाशीं गुणोत्तर ठरवितां येते असें हे महत्त्वाचे सिद्धांत आहेत. वर्तुळाच्या परीधाचें व्यासाशी गुणोत्तर ३·१४५९२ असें आहे. ही किंमत कशी ठरविली याचें गणित खालच्या लेखांत केलें आहे.

२३६. वर सिद्ध केलेला $\overline{\text{भु}}^{१}$क्ष या पदाचा सिद्धांत घ्या. त्यांत क्ष ही भुजज्या आहे. ही भुजज्या $\frac{१}{२}$ आहे असे घेऊं. $\frac{१}{२}$ ही भुजज्या ३० अंश ह्या कोनाची आहे. आणि ३० अंश कोनाचें वृत्तपरिमाण $\frac{\pi}{६}$ आहे. म्हणजे

$$\overline{\text{भु}}^{१}\text{क्ष} = \frac{\pi}{६}\text{, आणि क्ष} = \frac{१}{२}.$$

आतां

$$\overline{\text{भु}}^{१}\text{क्ष} = \text{क्ष} + \frac{१}{२}\frac{\text{क्ष}^{३}}{३} + \frac{१}{२}.\frac{३}{४}.\frac{\text{क्ष}^{५}}{५} + \ldots\ldots\ldots$$

ह्यांतील क्ष च्या ठिकाणी $\frac{१}{२}$ आणि $\overline{\text{भु}}^{१}$क्ष च्या ठिकाणी $\frac{\pi}{६}$ लिहिले तर

$$\frac{\pi}{६} = \frac{१}{२} + \frac{१}{२}\times\frac{१}{३}\times\left(\frac{१}{२}\right)^{३} + \frac{१}{२}\cdot\frac{३}{४}\cdot\frac{१}{५}\left(\frac{१}{२}\right)^{५} + \frac{१}{२}\cdot\frac{३}{४}\cdot\frac{५}{६}\cdot\frac{१}{७}\left(\frac{१}{२}\right)^{७}$$

$$= ०\cdot५ + \frac{१}{६}\times(\cdot१२५) + \frac{३}{४०}(\cdot०३१२५) + \frac{५}{११२}(\cdot००७८१२५)$$

$$+ \frac{३५}{११५२}\times(\cdot००१९५३१२५) + \frac{६३}{२८१६}\times(\cdot०००४८८२८)$$

$$+ \text{ इ. } \qquad \text{इ.} \qquad \text{इ.}$$

ह्याप्रमाणें बरोबरी पदें काढिल्यानें $\frac{\pi}{६}$ ची किंमत कळते.

२३७. वरच्या लेखांतील कृतीनें $\frac{\pi}{६}$ ची किंमत काढण्यास पदसंख्या जास्त घ्यावी लागते. $\overline{\text{स्प}}^{१}$ क्ष ह्या पदाच्या सिद्धांतानें $\frac{\pi}{४}$ ची किंमत अल्प आयासानें तयार होते. तो प्रकार असा. ज्याची स्पर्शरेषा $\frac{१}{५}$ आहे असा एक अ कोन आहे. म्हणजे स्प अ $= \frac{१}{५}$ आहे. पण

$$\text{स्प २ अ} = \frac{\text{२ स्प अ}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{अ}} = \frac{२\times\frac{१}{५}}{१-\left(\frac{१}{५}\right)^{२}} = \frac{२}{५}\times\frac{२५}{२४} = \frac{५}{१२};$$

$$\text{स्प ४ अ} = \frac{\text{२ स्प २ अ}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{२ अ}} = \frac{२\times\frac{५}{१२}}{१-\frac{२५}{१४४}} = \frac{५}{६}\times\frac{१४४}{११९} = \frac{१२०}{११९};$$

$$\text{स्प ४ अ} = \text{स्प ब} = \frac{१२०}{११९}$$

$$\text{स्प}\left(\text{ब} - \frac{\pi}{४}\right) = \frac{\text{स्प ब} - १}{\text{स्प ब} + १} = \frac{\frac{१२०}{११९} - १}{\frac{१२०}{११९} + १} = \frac{१}{२३९}$$

तेव्हां $\text{ब} - \frac{\pi}{४} = \text{स्प}^{-१} \frac{१}{२३९}$. म्हणून

$$\frac{\pi}{४} = ४\,\text{स्प}^{-१}\left(\tfrac{१}{५}\right) - \text{स्प}^{-१}\frac{१}{२३९}.$$
$$= ४\left\{\tfrac{१}{५} - \tfrac{१}{३}\left(\tfrac{१}{५}\right)^{३} + \tfrac{१}{५}\left(\tfrac{१}{५}\right)^{५} - \tfrac{१}{७}\left(\tfrac{१}{५}\right)^{७} + \ldots\ldots\right\}$$
$$- \left\{\tfrac{१}{२३९} - \tfrac{१}{३}\left(\tfrac{१}{२३९}\right)^{३} + \tfrac{१}{५}\left(\tfrac{१}{२३९}\right)^{५} - \ldots\ldots\right\}$$
$$= ४\left\{\cdot२ - \tfrac{१}{३}(\cdot००८) + \tfrac{१}{५}(\cdot०००३२) - \tfrac{१}{७}(\cdot००००१२८\right\}$$
$$- \left\{\cdot००४१८४१०० - \tfrac{१}{३}(\cdot००००००००७३) \ldots\ldots\right\}$$
$$= ४\left\{\cdot२ - \cdot००२६६६६६६६ + \cdot००००६४ - \cdot०००००१८२९\right\}$$
$$- (\cdot००४१८४१०० - \cdot०००००००२४)$$
$$= ४\,(\cdot२०००६४००० - \cdot००२६६८४९५)$$
$$- (\cdot००४१८४१०० - \cdot०००००००२४)$$
$$= ४ \times १९७३९५५०५ - \cdot००४१८४०७६$$
$$= \cdot७८५३९७९४४$$

आणि

$$\pi = ३\cdot१४१५९१७७६$$

ह्याची आणखी सूक्ष्म किंमत $+ \tfrac{१}{९}\left(\tfrac{१}{५}\right)^{९} - \tfrac{१}{११}\left(\tfrac{१}{५}\right)^{११}$ ही पदें घेतल्यास खालीं लिहिल्याप्रमाणें येते.

$$\pi = ३\cdot१४१५९२६५३५$$

२३८. विवक्षित संख्येचे e ह्या पायावरील घातांक ठरविण्याचे सिद्धांत सूक्ष्मांशगणित म्हणजेच शून्यलब्धि गणित ह्याने सहज सिद्ध होतात. ती सिद्धता खालीं दाखविली आहे.

घातांक e (१ + क्ष) ह्याची किंमत क्ष च्या घातावळीनें ठरवावयाची.

$$\text{घा}\,e\,(१ + \text{क्ष}) = \text{ॶ} + \text{घ}\,\text{क्ष} + \text{झ}\,\text{क्ष}^{२} + \text{ड}\,\text{क्ष}^{३} + \ldots\ldots\ldots$$

दोन्ही पेटचांचें सूक्ष्मांश गुण काढिलें तर,

$$\frac{\text{सू}\left\{\text{घा}\,e\,(१ + \text{क्ष})\right\}}{\text{सूक्ष}} = \frac{१}{१ + \text{क्ष}} = १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{३} + \text{क्ष}^{४} - \ldots\ldots.$$

दोन्ही समीकरणांतील क्षच्या समान घाताचे गुण समान आहेत.

$$\text{क्ष} = ० \text{ असेल तर, } \text{घा}\,e\,(१) = ० \text{ म्हणून } \text{ॶ} = ०.$$
$$+ \text{घ} = + १;\ + २\,\text{झ} = - १;\ \text{झ} = - \tfrac{१}{२};$$
$$३\,\text{ड} = + १,\ \text{ड} = + \tfrac{१}{३};\ ४\,\text{ई} = - १,\ \text{ई} = - \tfrac{१}{४}.$$
$$\text{घा}\,e\,(१ + \text{क्ष}) = \text{क्ष} - \tfrac{१}{२}\text{क्ष}^{२} + \tfrac{१}{३}\text{क्ष}^{३} - \tfrac{१}{४}\text{क्ष}^{४} + \ldots\ldots(१)$$

ह्यातील क्ष जर ऋण असेल म्हणजे — क्ष असेल तर

घा e (१ — क्ष) = — क्ष— $\frac{१}{२}$ क्ष^{२} — $\frac{१}{३}$ क्ष^{३} — $\frac{१}{४}$ क्ष^{४} — इत्यादि,
.........(२)

२३९. घातप्रकाशक दर्शित भुजज्या आणि कोभुजज्या.

लेख २२९, २३०, २३१ मध्यें भुक्ष आणि कोभुक्ष याच्या किमती क्ष च्या घातावळीनें दाखविल्या आहेत आणि e चा क्ष घात हा ही क्ष च्या घातावळीनें दाखविता येतो. ह्यावरून e ह्या संस्खेचा घात करून भुजज्याक्ष ची किंमत साधितां येते, आणि कोभुक्षची, स्पक्ष ची किमतही साधितां येते. तो प्रकार खालीं दाखवीत आहे.

एक गूढ संख्या आहे. ती अशी आहे कीं तिचा वर्ग केला असता—१ ही संख्या येते. संख्या धन असो किंवा ॠण असो तिचा वर्ग धनच येतो कारण (—१) × (—१) = + १ आणि (+ १) × (+ १) = + १. पण जिचा वर्ग उणा येतो ती संख्या काल्पनिकच समजली पाहिजे तीच संख्या आपण √ (— १) अशी दाखवू शकतो. हिचाहि आम्हाला आमच्या गणित सिद्धांतात उपयोग करून घेतां येतो. तो असा कीं, एखाद्या समीकरणांत दोन्ही पेटचांत कांहीं गूढ संख्या व कांहीं गूढ नाहीत अशा संख्या असतील त्या समीकरण्याची दोन समीकरणें बनतात. जसें

√ (— १) × क + √ (— १) ब + ड = अ + ई + √ (— १)फ
असे समीकरण असेल तर

ड = अ + ई .... (१)

आणि √ (— १) क + √ (— १) ब = √ (— १) फ
.... (२)

किंवा √ (— १) यानें दुसऱ्या समीकरणास भागिलें तर

क + ब = फ .... (३)

लेखन सौकर्याकरिता √ (— १) ही संख्या ग ह्या चिन्हानें दाखविते. ह्या चिन्हांचें वाचन ग अक्षरानेंच करितों. तेव्हां

{√ (—१)}^{२} = ग^{२} = — १

{√ (—१)}^{३} = ग^{३} = — √ (—१) = — ग

{√ (—१)}^{४} = ग^{४} = + १

{√ (—१)}^{५} = ग^{५} = — √ (—१) = — ग

२४०. e हचा संख्येचा $+$ गक्ष आणि $-$ गक्ष असा दोन प्रकारचा घात करून त्याचा घात विस्तार केला तर त्या दोन श्रेण्या खालीं दाखविल्याप्रमाणें होतील :—

$$e^{\text{गक्ष}} = १ + \text{गक्ष} + \frac{१}{\lfloor २} \text{ग}^{२}\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{\lfloor ३} \text{ग}^{३}\text{क्ष}^{३} + \frac{१}{\lfloor ४} \text{ग}^{४}\text{क्ष}^{४} + \ldots\ldots\ldots \quad (१)$$

$$e^{-\text{गक्ष}} = १ - \text{गक्ष} + \frac{१}{\lfloor २} \text{ग}^{२}\text{क्ष}^{२} - \frac{१}{\lfloor ३} \text{ग}^{३}\text{क्ष}^{३} + \frac{१}{\lfloor ४} \text{ग}^{४}\text{क्ष}^{४} + \ldots\ldots\ldots \quad (२)$$

दोन समीकरणांची बेरीज केली आणि त्यांत $\text{ग}^{२}$ $\text{ग}^{३}$ $\text{ग}^{४}$ या गुढ संख्यांच्या किंमती लिहिल्या तर

$$\tfrac{१}{२}\left(e^{\text{गक्ष}} + e^{-\text{गक्ष}}\right) = १ - \frac{१}{\lfloor २}\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{\lfloor ४}\text{क्ष}^{४} - \frac{१}{\lfloor ६}\text{क्ष}^{६} + \ldots\ldots\ldots$$

परंतु $१ - \frac{१}{\lfloor २}\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{\lfloor ४}\text{क्ष}^{४} - \frac{१}{\lfloor ६}\text{क्ष}^{६}$ ही श्रेणी कोभुक्ष ची आहे, लेख २३१ पहा. म्हणून

$$\text{कोभुक्ष} = \tfrac{१}{२}\left(e^{\text{गक्ष}} + e^{-\text{गक्ष}}\right).$$

समीकरण (१) मध्ये (२) वजा केलें तर

$$\tfrac{१}{२}\left(e^{\text{गक्ष}} - e^{-\text{गक्ष}}\right) = \text{गक्ष} + \frac{१}{\lfloor ३}\text{ग}^{३}\text{क्ष}^{३} + \frac{१}{\lfloor ५}\text{ग}^{५}\text{क्ष}^{५} + \frac{१}{\lfloor ७}\text{ग}^{७}\text{क्ष}^{७} +$$

ग हचा गूढ संख्येनें समीकरणाच्या दोन्ही पेटचास भागिलें आणि त्यांत $\text{ग}^{२}$ $\text{ग}^{४}$ $\text{ग}^{६}$ हचांच्या किंमती अनुक्रमें -१, $+१$, -१ इत्यादि हचा ठेविल्या तेव्हां

$$\frac{१}{२\text{ग}}\left(e^{\text{गक्ष}} - e^{-\text{गक्ष}}\right) = \text{क्ष} - \frac{१}{\lfloor ३}\text{क्ष}^{३} + \frac{१}{\lfloor ५}\text{क्ष}^{५} - \frac{१}{\lfloor ७}\text{क्ष}^{७} + \ldots\ldots$$

परंतु उजव्या पेटचांतील श्रेणी भुक्ष ची आहे. (लेख २२९, २३०). म्हणून

$$\text{भुक्ष} = \frac{१}{२\text{ग}}\left(e^{\text{गक्ष}} - e^{-\text{गक्ष}}\right).$$

२४१. घातप्रकाशक दर्शित स्पर्शरेषा

$$\text{स्प क्ष} = \frac{\text{भुक्ष}}{\text{कोभुक्ष}} = \frac{\frac{१}{२\text{ग}}\left(e^{\text{गक्ष}} - e^{-\text{गक्ष}}\right)}{\frac{१}{२}\left(e^{\text{गक्ष}} + e^{-\text{गक्ष}}\right)}$$

$$= \frac{१}{\text{ग}}\,\frac{e^{\text{गक्ष}} - e^{-\text{गक्ष}}}{e^{\text{गक्ष}} + e^{-\text{गक्ष}}}.$$

अर्थात $\dfrac{१ + \text{र स्प क्ष}}{१ - \text{र स्प क्ष}} = \dfrac{e^{\text{रक्ष}}}{e^{-\text{रक्ष}}} = e^{\text{२रक्ष}}$.

२४२. वरच्या घातप्रकाशकी भुजज्या कोभुजज्या आणि स्पर्शरेषा यांच्या सहाय्यानें अनेक गुंतागुंतीच्या सिद्धांताची सिद्धता करिता येतें. विस्तार भयास्तव ते सिद्धांत आणि त्यांची सिद्धताही येथें देत नाहीं, पण नेहमीं उपयोगांत येणारी दोन समीकरणें खालीं सिद्ध करून दाखवित आहे. पूर्वी जीं समीकरणें लेख २२९, २३१, २३४ यामध्ये सिद्ध केलीं तीं निरनिराळ्या अनेक रीतींनीं सिद्ध होतात तशीच या पद्धतीनेंही सिद्ध होतात.

२४३. भु क्ष = न भु (क्ष + अ)

ह्या समीकरणांतील न आणि अ ह्या दोन संख्या व्यक्त आहेत, त्यांनीं क्ष ह्या वृत्तपरिमाणाची किंमत ठरवावयाची आहे.

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेटयांत भुजज्या आहेत. त्यांचीं घातप्रकाशक-दर्शी स्वरूपें केलीं. ती खालीं दिल्याप्रमाणें:—

$$\text{भु क्ष} = \frac{१}{२र}\left(e^{\text{रक्ष}} - e^{-\text{रक्ष}}\right)$$

आणि $\text{न भु (क्ष + अ)} = \dfrac{\text{न}}{२र}\left\{e^{\text{र(क्ष+अ)}} - e^{-\text{र(क्ष+अ)}}\right\}$

तेव्हां

$$\left(e^{\text{रक्ष}} - e^{-\text{रक्ष}}\right) = \text{न}\left\{e^{\text{र(क्ष+अ)}} - e^{-\text{र(क्ष+अ)}}\right\}.$$

ह्या समीकरणाला $e^{-\text{रक्ष}}$ ह्या पदानें भागिलें किंवा $\dfrac{१}{e^{\text{रक्ष}}}$ ला पदानें भागिलें;

$$\left[e^{-\text{रक्ष}} = \frac{१}{e^{\text{रक्ष}}}\right]$$ लेख १४ पहा.

$$e^{\text{२रक्ष}} - १ = \text{न}\left[e^{\text{र(२क्ष+अ)}} - e^{-\text{रअ}}\right]$$

स्थलांतर केल्यानें

$$e^{\text{२गक्ष}} - \text{न}\, e^{\text{ग}(\text{२क्ष}+\text{अ})} = \text{१} - \text{न} e^{-\text{गअ}}$$

$$e^{\text{२गक्ष}} - \text{न}\, e^{\text{२गक्ष}} \times e^{\text{गअ}} = - \text{न} e^{-\text{गअ}}$$

$$e^{\text{२गक्ष}} (\text{१} - \text{न} e^{\text{गअ}}) = (\text{१} - \text{न} e^{-\text{गअ}})$$

$$e^{\text{२गक्ष}} = \frac{\text{१} - \text{न}\, e^{-\text{अ}}}{\text{१} - \text{न}\, e^{\text{गअ}}},$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेटयांचे e ह्या पायावरील घातांक काढिले आणि त्या घातांकांचें समोकरण केले तर

$$\text{२गक्ष} = \text{घा}e\,(\text{१} - \text{न} e^{-\text{गअ}}) - \text{घा}e\,(\text{१} - \text{न} e^{+\text{गअ}})$$

लेख २३८ समीकरण (२) मधील क्ष च्या जागीं $\text{न} e^{-\text{गअ}}$ हें पद ठेविलें तर

$$+\,\text{घा}e\,(\text{१} - \text{न} e^{-\text{गअ}}) = -\text{न} e^{-\text{गअ}} - \tfrac{\text{१}}{\text{२}} \text{न}^{\text{२}} e^{-\text{२गअ}}$$
$$- \tfrac{\text{१}}{\text{३}} \text{न}^{\text{३}} e^{-\text{३गअ}} - \ldots\ldots\ldots$$

आणि क्ष च्या जागीं $\text{न} e^{\text{गअ}}$ हें पद ठेविलें तर

$$-\,\text{घा}e\,(\text{१} - \text{न} e^{\text{गअ}}) = +\,\text{न}^{\text{गअ}} + \tfrac{\text{१}}{\text{२}} \text{न}^{\text{२}} e^{\text{२गअ}}$$
$$+ \tfrac{\text{१}}{\text{३}} \text{न}^{\text{३}} e^{\text{३गअ}} + \ldots\ldots\ldots$$

तेव्हां २गक्ष च्या बरोबर असलेल्या घातांकाच्या दोन पदातील घात विस्तारांत जी पदें आहेत ती न च्या घातावळीनें लिहिली तर खालचें समीकरण तयार होतें.

$$\text{२गक्ष} = \text{न}\,(e^{\text{गअ}} - e^{-\text{गअ}}) + \frac{\text{न}^{\text{२}}}{\text{२}}\,(e^{\text{२गअ}} - e^{-\text{२गअ}}) +$$
$$\frac{\text{न}^{\text{३}}}{\text{३}}\,(e^{\text{३गअ}} - e^{\text{३गअ}}) + \ldots\ldots\ldots$$

ह्या समीकरणांतील उजवीकडच्या तीन पदांना किंवा अधिक पदें घेतल्यास त्याना २ग ह्या गूढ संख्येनें भागिले तर

$$\frac{\text{न}}{\text{२ग}}\,(e^{\text{गअ}} - e^{-\text{गअ}}) = \text{न भु अ};\quad \frac{\text{न}^{\text{२}}}{\text{२}\times\text{२ग}}\,(e^{\text{२गअ}} - e^{-\text{२गअ}});$$
$$= \frac{\text{न}^{\text{२}}}{\text{२}}\,\text{भु २ अ}$$

A-2548—13-B.

ह्या प्रमाणेंच पुढील पदाची स्वरूपें होतात. म्हणून

$$क्ष = नभुअ + \frac{न^2}{२} भु२अ + \frac{न^3}{३} भु३अ + \frac{न^4}{४} भु४अ + \ldots\ldots\ldots (१)$$

२४४. स्पक्ष = न स्प य आहे. तर क्ष ह्या वृत्तपरिमाणाची किंमत य किंवा य च्या पटीच्या भुजज्येनें ठरवावयाची. क्ष आणि य यांच्या स्पर्शरेषेच्या घातप्रकाशकी किंमतींचें समीकरण लिहिलें. स्पर्शरेषेच्या घात प्रकाशकी किंमती ले. २४१ मध्यें दाखविल्या आहेत. त्याप्रमाणें.

$$र स्प क्ष = र न स्प य$$

$$\frac{e^{रक्ष} - e^{-रक्ष}}{e^{रक्ष} + e^{-रक्ष}} = न \frac{e^{रय} - e^{-रय}}{e^{रय} + e^{रय}}$$

अंश छेदास $e^{रक्ष}$ आणि $e^{रय}$ यानीं गुणिलें तेव्हां

$$\frac{e^{२क्ष} - १}{e^{२रक्ष} + १} = न \frac{e^{२रय} - १}{e^{२रय} + १}$$

दोन्ही पेटचांत १ ही संख्या मिळविली तेव्हां

$$\frac{२e^{२रक्ष}}{e^{२रक्ष} + १} = \frac{e^{२रय} + न e^{२रय} + १ - य}{e^{२रय} + १} \ldots\ldots (अ)$$

दोन्ही पेटचांत १ संख्या वजा केली तेव्हां--

$$\frac{२}{e^{२रक्ष} + १} = \frac{e^{२रय} - न e^{२रय} १ + न}{e^{२रय} + १} \ldots\ldots (ब)$$

(अ) ह्या समीकरणास (ब) ह्या समीकरणानें भागिले तेव्हां—

$$e^{२रक्ष} = \frac{(१ + न) e^{२रय} + १ - न}{(१ - न) e^{२रय} + १ + न}$$

$१ - न = (१ + न)$ म असें मानून उजव्या पेटयातील न च्या जागीं म आणिला तेव्हां--

$$e^{२र्क्ष} = \frac{(१ + न)\, e^{२र्य} + (१ + न)\, म}{(१ + न)\, म\, e^{२र्य} + (१ + न)}$$

सर्व समीकरण $(१ + न)$ नें भागिलें

$$e^{२र्क्ष} = \frac{e^{२र्य} + म}{म\, e^{२र्य} + १}$$

$$= e^{२र्य} \times \frac{१ + म\, e^{-२र्य}}{१ + म\, e^{२र्य}} \; ; \; [e^{-क्ष} = \frac{१}{e^{क्ष}}]$$

दोन्ही पेटयांचे घातांक काढिले तर

$$२र्क्ष = २र्य + घा\, e\, (१ + म e^{-२र्य}) - घा\, e\, (१ + म e^{२र्य})$$

लेख २३८ समीकरण (१) मधील क्ष च्या जागीं $म e^{-२र्य}$ हें पद आणि $म e^{२र्य}$ हें पद लिहिले तेव्हां--

$$२र्क्ष = २र्य - म\, (e^{२र्य} - e^{-२र्य}) + \frac{म^२}{२} (e^{४र्य} - e^{-४र्य}) -$$

सर्व २र हया गूढ संख्येनें भागिलें तर उजवीकडच्या पदांचें स्वरूप खालीं लिहिल्याप्रमाणे होतें

$$म \frac{१}{२र} (e^{२र्य} - e^{-२र्य}) = म\, भु\, २य \; ; \; \frac{म^२}{२} \frac{१}{२र} (e^{४र्य} - e^{-४र्य})$$

$$= \frac{म^२}{२} भु\, ४य$$

म्हणून

$$क्ष = य - म\, भु\, २य + \frac{म^२}{२} भु\, ४य - \frac{म^३}{३} भु\, ६य + \ldots\ldots (२)$$

संकलन

२४५. भाज्य, भाजक आणि भागाकार ही त्रयी विचारांत आणा. याशीं सदृश संचयाचा किंवा अवलंबी पदाचा सूक्ष्मांश, विकारीपदाचा सूक्ष्मांश आणि सूक्ष्मांशगुण ही त्रयी आहे. भाजक आणि भागाकार याचा गुणाकार केला तर

तो भाज्याबरोबर असतो, तद्वत् विकारीपदाचा सूक्ष्मांश आणि सूक्ष्मांशगुण यापासून अवलंबी पदाचा सूक्ष्मांश शोधिता येतो. मात्र तो गुणाकारानें सापडत नाहीं. कारण सूक्ष्मांश शून्य रूप असतो आणि शून्यानें कोणत्याही संख्येला गुणिलें तरी गुणाकार शून्य येतो. यास्तव सूक्ष्मांशगुण हा अवलंबी पदापासून ज्या कृतीनें उत्पन्न झाला आहे त्याच्या उलट कृति सूक्ष्मांशगुणाशी केली असतां अवलंबी पद प्राप्त होतें.

२४६. व हे अवलंबी पद आहे. याची किमत $अक्ष^{न} + क$ आहे. आणि क्ष हें विकारी पद आहे तेव्हां

$$\frac{सुव}{सूक्ष} = नअ\,क्ष^{न-१} = बक्ष^{म}$$

यांमध्ये $ब = नअ$, $न = म + १$, आणि $अ = \frac{ब}{न} = \frac{ब}{म+१}$

ह्यावरून $नअ\,क्ष^{न-१}$ ह्या सूक्ष्मांशगुणाचे अवलंबी पद

म्हणजे $ब\,क्ष^{म}$ ह्या सूक्ष्मांश गुणाचे अवलंबी पद $\frac{ब}{म+१}\cdot क्ष^{म+१} + क$

हे आहे. ह्या वरून सूक्ष्मांशगुणावरून अवलंबी पद शोधावयाचे असतां कृति करावी ती अशी—" विकारी पदाचा घातप्रकाशक एकानें वाढवा, आणि तशा वाढविलेल्या घातप्रकाशकानें विकारी पदास भागा."

२४७. वरच्या लेखांत जी कृति सांगितली आहे तिला संकलन असें म्हणावें. सूक्ष्मांशगुणावरून अवलंबी पद शोधून काढणें याला संकलन म्हटलें आहे. सूक्ष्मांश-गुणामध्यें विकारी पदाचे संचय एक अथवा अनेक असतात. त्यापैकी एकाच संचयाचा म्हणजे $अक्ष^{न} + क$ ह्याचा विचार वरच्या लेखांत केला, तसाच विचार भुक्ष, घातांक क्ष आणि $अ^{क्ष}$ ह्या संचयाचे ही संकलन काय येते यांचाही करावयास पाहिजे आहे. परंतु कोभुक्ष हा $\frac{सुव}{सूक्ष}$ याबरोबर आहे तर व = भुक्ष हे आपणास कळते, तसेच $\frac{१}{क्ष}$ हा सूक्ष्मांशगुण आहे याचे संकलन काय तर त्याचे संकलन $घा_{e}क्ष$ हे आहे. साध्या भागाकारांत अमुक भाग बसेल हे अनुमानानें आपण पाहतो त्याप्रमाणेंच हें कृत्य आहे. सारांश, विवक्षित सूक्ष्मांशगुणाबरोबर असलेल्या एक किंवा अनेक असलेल्या पदांचे संकलन त्या सूक्ष्मांशगुणाबरोबर असलेल्या पदाच्या स्वरूपावरून कल्पनेनेंच बसवावें लागतें. आपल्या कल्पनेला जें संकलन येईल असें वाटतें त्याचा सूक्ष्मांशगुण करावा तो विवक्षित सूक्ष्मांशगुणाबरोबर असल्यास संकलन बरोबर आहे असें समजावे.

२४८. **संकलनाचें लेखन.**—संकलनाचे लेखन लिहिण्याच्या अनेक पद्धति आहेत. पण माझ्या विचारांत आलेली लेखनपद्धति खालीं दाखवित आहे. संकलन याचा अर्थ चांगल्या रीतीनें एकत्र करणें असा आहे. सूक्ष्मांश म्हणजे परमाणू, तेव्हां अनंत

परमाणूंचें एकीकरण करणें त्यास संकलन म्हणावे. संकलन यास परमाणूंचे पिंडीकरणं असेंही म्हणतां येईल. याचें लेखन दाखविण्यास, सं ह्या आद्याक्षराचा उपयोग करितां आला असतां पण हे अक्षर संचय शब्दाचे जागीं योजिले आहे म्हणून मोडी लिपीतील ॐ हें अक्षर योजिले आहे. ॐ ह्या अक्षरापुढें कंस करून त्या कंसांत ज्या सूक्ष्मांशगुणाचें संकलन करावयाचे त्या बरोबर असलेली पदें लिहून त्यापुढे विकारी पदांचा सूक्ष्मांश जसें सूक्ष असे लिहावे असे मी योजिले आहे. जसें

$\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} = \frac{\text{त}}{\text{ज}^2}$ याचें संकलन ॐ $\left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^2}\right)$ सूव असें लिहावयाचें. $\text{व} = \text{सं}\ (\text{क्ष}) = \text{क्ष}^3$

याचा सूक्ष्मांशगुण $\frac{\text{सूव}}{\text{सूक्ष}} = ३\ \text{क्ष}^2$ असा आहे तेव्हां

$$\text{ॐ}\ (३\ \text{क्ष}^2)\ \text{सूक्ष} = \text{क्ष}^3$$

तसेंच $\quad \text{क} = \text{ब} + \text{ब}^2$ असेल तर

सूक्ष्मांक्ष गुण $\quad \frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = १ + २\text{ब}$

याचे संकलन $\quad \text{क} = \text{ब} + \text{ब}^2$ हे आहे.

२४९. सूक्ष्मांशगुणाबरोबर जो राशी असेल, त्यांत जर अनेक पदें असतील तर प्रत्येक पदाचें संकलन करून आलेली बेरीज त्या सूक्ष्मांशाच्या संकलनाबरोबर असते. संचयाचा सूक्ष्मांशगुण काढिताना, त्या संचयांत जी स्थीर पदें असतात त्यांचा लोप होत असतो. ती पदें संकलनांत घ्यावी लागतात, परंतु ती पदें संचयाच्या पूर्व परिचयानेंच समजतात.

२५०. सूक्ष्मांश समीकरण हा एक सूक्ष्मांश गणिताचा भाग आहे. ज्योतिर्गणितांत त्याची अनेक अडचणीच्या ठिकाणी योजना करावी लागते. परंतु तो विषय विस्तृत आणि खोल विचाराचा आहे. तेवढ्यासाठी तो विचार व त्या समीकरणाचें स्पष्टीकरण ज्या क्षणीं त्याची जरूर वाटेल तेथे करण्याचे योजिले आहे.

२५१. सूक्ष्मांश गणिताचा विचार करितांना सूक्ष्मतेचा विचार करावा लागतो. परंतु सूक्ष्मता हा शब्द सापेक्ष आहे. लाकडाचे वजनाचा विचार करिता त्यांत खंडी, मण यांचा हिशेब असतो. त्या प्रसंगी तोळे मासे गुंजा याचा हिशेब गाळावा लागतो. ५० खंडी, १०० खंडी अशा मोजणीत मणाचा हिशेब नसतो. अर्थात शेराची किंमत सुद्धां कांहीं नाही असेंच समजतो. त्याप्रमाणेंच मासे आणि गुंजा. यावरून आमची अपेक्षा असेल त्याप्रमाणें सूक्ष्मतेचा विचार करितांना तिची मर्यादा ठरवावी लागते. वरच्या विचारांत खंडींच्या संख्येनें एखाद्या डोंगराचें वजन सांगताना खंडीपर्यंतच आमच्या सूक्ष्मतेची मर्यादा जाते. समजूतीकरितां ह्या सूक्ष्मतेला पहिल्या पदवीची

सूक्ष्मता म्हणा पण त्यांत सूक्ष्मता मणापर्यंत नेणें असेल तर ती द्वितीय पदवीची सूक्ष्मता होय. ह्याचप्रमाणें शेरापर्यंत ३ री, तोळ्यापर्यंत ४ थी इत्यादि सूक्ष्मतेच्या पदव्या मानाव्या लागतात.

२५२. चित्रकारास एखादें चित्र काढावयाचें असतां प्रथम त्या चित्राचा आराखडा तो तयार करितो, नंतर त्याची सुधारणा करीत करीत अखेर चित्र तयार करितो. खगोलस्थ पदार्थांच्या गतिस्थितीचा विचार करितांना अशीच कृति करावी लागते. पूर्व कालच्या विद्वान गणकांनीं ग्रहा संबंधी ज्या मोजमापी केल्या त्या आरंभी स्थूल मानल्या असून त्यांत सुधारणा होत गेली आहे. एखाद्या परिमेय भागाची मोजणी प्रथम स्थूल मानानें करितात ती किंमत खरी आहे असे मानून त्या परिमेय भागाचा दुसऱ्या ज्या भागाशी संबंध असेल त्याची मोजणी करितात आणि त्या मोजणीच्या आधारें उलट पूर्वपरिमेयाची मोजणी करितात. ही मोजणी पूर्वमोजणी पेक्षां सूक्ष्म झाली तर ती बरोबर मानून पुन्हां पूर्वीप्रमाणे किंवा अन्य रीतीनें तिची ही सूक्ष्मता साधिता येते.

२५३. अनेक प्रसंगी परिमेय मापनाचा विचार वर सांगितल्याप्रमाणें पदवी पदवीनेंच करावा लागतो. प्रस्तुत ग्रंथांत ही पद्धति सर्वत्र पुढें योजिली आहे. कोन आणि चल त्रिज्या म्हणजे रेषा ह्याच्या मापनांत ह्या पदव्याच योजिल्या आहेत. जी संख्या एकं परिमाणाच्या सुमारें $\frac{१}{३०}$ जवळ असेल ती संख्या पहिल्या पदवीची आहे असें स्वीकारलें आहे. हिच्या वर्गाजवळ असलेली संख्या दुसऱ्या पदवीची, घनाजवळ असलेली संख्या तिसऱ्या पदवीची संख्या, ह्याप्रमाणे पदव्यांचा क्रम स्वीकारला आहे.

२५४. अनेक पदात्मक कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या.

इच्छिलेला कोन अनेक पदात्मक आहे, म्हणजे त्या कोनाचे अनेक भाग आहेत, तर त्या कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या, त्या भागांच्या भुजज्या आणि कोभुजज्या यांनीं ठरवावयाच्या आहेत. कोनाची भुजज्यादि गुणोत्तरें हीं भावसंख्यात्मक असतात, आणि कोनाचें वृत्तपरिमाण हेंहि भावसंख्यात्मकच असतें. ह्यावरून भुजज्यादि गुणोत्तर हें वृत्तपरिमाण आहे असें मानिता येतें. ह्या कल्पनेप्रमाणें नभुक्ष ही एक भावसंख्या आहे म्हणून भु (नभुक्ष) असें मानता येतें. ह्या कल्पने-प्रमाणें—

$$घ = अ + प भु न ब + द भु म ब$$
$$+ त भु क ब + च भु ग ब$$

(१) ह्या मध्यें घ हें एका कोनाचें वृत्तपरिमाण आहे, व त्या बरोबर पुढील पदांचें एकीकरण करून आलेली संख्या आहे. तेव्हा घ कोनाची भुजज्या किंवा कोभुजज्या ही, पुढील प्रत्येक पदाची भुजज्या आणि कोभुजज्या यांनीं ठरवावयाची आहे.

(२) अ हे एका कोनाचें वृत्तपरिमाण आहे.

(३) पभुनब ही बकोनाच्या (म्हणजे ब ज्याचें वृत्तपरिमाण आहे त्या कोनाच्या न पटीची भुजज्या असून प हा तिला गुणक आहे. प हा गुणक पहिल्या पदवीचा आहे. म्हणजे प ची विशेष संख्यात्मक किमत $\frac{१}{२०}$ जवळ आहे.

(४) दभुमब वरच्याप्रमाणें ब कोनाच्या म पटीची भुजज्या असून तिला द हा गुणक आहे. व तो दुसऱ्या पदवीचा आहे. द ची किमत सुमारे $\frac{१}{४००}$ च्या जवळ आहे.

(५) व (६) वरच्याप्रमाणेच तभुकब आणि चभुगब यांचे स्पष्टीकरण आहे. त हा गुणक तिसऱ्या पदवीचा $\frac{१}{८०००}$ च्या जवळ आहे आणि च हा चवथ्या पदवीचा गुणक $\frac{१}{१६००००}$ ह्या संख्येजवळ आहे असे समजावे.

२५५. वरचें समीकरण मी खालीं लिहिल्याप्रमाणें लिहितो—

$$घ = अ + प + द + त + च$$

लेखनसौकर्याकरितां आणि विस्तार टाळण्याकरिता प द त च हीं अक्षरें पभुनब इत्यादिकांची निदर्शक आहेत. म्हणजे प हें अक्षर पभुनब असे आहे असें समजावें, तसेंच द म्हणजे दभुमब आहे. इत्यादि. इतके असून प मध्ये आणखीही विशेष अर्थ स्वीकारला आहे. तो असा कीं प हें पहिल्या पदवीचें एकच पद नसून तो पहिल्या पदवीच्या अनेक पदांचा समुदाय आहे. त्याचप्रमाणें द हा दुसऱ्या पदवीचा समुदाय, त हा तिसऱ्या पदवीचा समुदाय, च हा चवथ्या पदवीचा समुदाय आहे. ह्या सर्व पदांचे दोन भाग केले आहेत. एका भागांत अ हें वृत्तपरिमाण आणि दुसऱ्या भागांत, प द त च हीं पदें यांचें एकीकरण करून आलेली संख्या जिला मी स असे नांव देतों ती. तेव्हां

$$घ = अ + स$$
$$भुघ = भु (अ + स)$$
$$= भुअ कोभुस + कोभुअ भुस. \quad [ले. ५९ (१)]$$

स हे वृत्तपरिमाण आहे, याची भुजज्या आणि कोभुजज्या स च्या घातावळीनें समजते. लेख २३०, २३१ पहा.

म्हणजे

$$भुस = स - \frac{१}{६} स^{३} + \frac{१}{१२०} स^{५} - \ldots$$
$$आणि\ कोभुस = १ - \frac{१}{२} स^{२} + \frac{१}{२४} स^{४} - \ldots$$

ह्यामधील स हें पद पहिल्या पदवीचें आहे, $स^{२}$ दुसऱ्या पदवीचे, ह्याचप्रमाणे $स^{३}$ तिसऱ्या पदवीचे आणि $स^{४}$ चवथ्या पदवीचे आहे. प्रस्तुत ग्रंथात सूक्ष्मतेची मर्यादा

चवथ्या पदवीपर्यंत स्वीकारली आहे, म्हणून $स^{५}$ हें पद पांचव्या पदवीचें म्हणून विचारांत घेण्याचें कारण नाहीं. भुस आणि कोभुस यांच्या किंमती वरच्या भुघ च्या समीकरणांत लिहिल्या तेव्हां

$$भुघ = (१ - \frac{१}{२} स^{२} + \frac{१}{२४} स^{४})\ भुअ + (स - \frac{१}{६} स^{३})\ कोभुअ.$$

२५६. वरच्या समीकरणांत स हें पद वापरलें आहे तें काढून त्याच्या बरोबरीची संख्या त्या समीकरणांत ठेवून समीकरण तयार करावयाचें आहे. ती क्रिया खालीं दाखवितो. त्यांत सूक्ष्मतेची मर्यादा चवथ्या पदवीपर्यंत असल्यामुळें प च्या चतुर्घाता पेक्षां जास्त सूक्ष्म पदाची अपेक्षा नाहीं. तसेच $द^{३}$, प त आणि $प^{२}द$ या पेक्षां जास्त सूक्ष्म पदें घ्यावयाची नाहींत :—

$$स = प + द + त + च,$$
$$\frac{१}{२} स^{२} = \frac{१}{२} प^{२} + \frac{१}{२} द^{२} + पद + पत,$$
$$\frac{१}{६} स^{३} = \frac{१}{६} प^{३} + \frac{१}{२} प^{२}द,$$
$$\frac{१}{२४} स^{४} = \frac{१}{२४} प^{४}.$$

ह्यावरून

$$भुस = प + द + त + च - \frac{१}{६} प^{३} - \frac{१}{२} प^{२} द;$$
$$कोभुस = १ - \frac{१}{२} प^{२} - \frac{१}{२} द^{२} - पद - पन + \frac{१}{२४} प^{४}.$$

आतां

$$भुघ = भुअ\ कोभुस + कोभुअ\ भुस.$$

म्हणून

$$भुघ = \begin{cases} (१ - \frac{१}{२} प^{२} - \frac{१}{२} द^{२} - पद - पत + \frac{१}{२४} प^{४})\ भुअ \\ + (प + द + त + च - \frac{१}{६} प^{३} - \frac{१}{२} प^{२} द)\ कोभुअ \ldots\ldots (१) \end{cases}$$

ह्याप्रमाणेच को भु घ ची किंमत ठरवितां येते. ती अशी :

$$कोभुघ = कोभुअ\ कोभुस - भुअ\ भुस.$$

म्हणून

$$कोभुघ = \begin{cases} (१ - \frac{१}{२} प^{२} - \frac{१}{२} द^{२} - पद - पत + \frac{१}{२४} प^{४})\ कोभुअ \\ - (प + द + त + च - \frac{१}{६} प^{३} - \frac{१}{२} प^{२} द)\ भुअ \ldots. (२) \end{cases}$$

२५७. वरच्या समीकरणांत प द त च हीं पदें संक्षेपें दाखविलीं आहेत. त्याचीं वास्तव स्वरूपें घेऊन तीं समीकरणें लिहावयाचीं आहेत. परंतु तत्पूर्वी भुजज्या × कोभुजज्या, किंवा भुजज्या कोभुजज्या याचे वर्ग घांतादि घात कशा प्रकारचे

होतात याची माहिती करून देणारी समीकरणें प्रथम सिद्ध केली पाहिजेत. त्यापैकीं कांहीं समीकरणें पूर्वी सिद्ध केलेलीं आहेत. तथापि तीं सर्व एका ठिकाणीं लिहितों. तथापि लेख ५० ते ६६ पुन्हा पहा.

भु क्ष × को भु य = + $\frac{१}{२}$ भु (क्ष + य) + $\frac{१}{२}$ भु (क्ष — य) (१)
को भु क्ष × भु य = + $\frac{१}{२}$ भु (क्ष + य) — $\frac{१}{२}$ भु (क्ष — य) (२)
को भु क्ष × को भु य = $\frac{१}{२}$ को भु (क्ष+य) + $\frac{१}{२}$ को भु (क्ष—य) (३)
भु क्ष × भु य = — $\frac{१}{२}$ को भु (क्ष + य) + $\frac{१}{२}$ को भु (क्ष—य) (४)

ह्या चार समीकरणाच्या सहाय्यानें भुजज्या आणि कोभुजज्या यांच्या घातांच्या किमती ठरवितां येतात. त्या अशा

भु^{२} क्ष=भु क्ष × भु क्ष = + $\frac{१}{२}$ को भु (क्ष—क्ष) — $\frac{१}{२}$ को भु (क्ष+क्ष)
को भु (क्ष — क्ष) = को भु (०) = + १
म्हणून भु^{२} क्ष = $\frac{१}{२}$ — $\frac{१}{२}$ को भु २ क्ष,
को भु^{२} क्ष = को भु क्ष × को भु क्ष = $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{२}$ कोभु २ क्ष,
भु^{३} क्ष = भु^{२} क्ष × भु क्ष = ($\frac{१}{२}$ — $\frac{१}{२}$ को भु २ क्ष) × भु क्ष
= $\frac{१}{२}$ भु क्ष — $\frac{१}{२}$ को भु २ क्ष × भु क्ष
= $\frac{१}{२}$ भु क्ष — $\frac{१}{२}$ (भु ३ क्ष — $\frac{१}{२}$ भु क्ष)
= + $\frac{३}{४}$ भु क्ष — $\frac{१}{४}$ भु ३ क्ष
आणि को भु^{३} क्ष = + $\frac{३}{४}$ को भु क्ष + $\frac{१}{४}$ को भु ३ क्ष

ह्याप्रमाणेंच चतुर्घात, पंचघात इत्यादिकाच्या किमती काढितां येतात. त्या किमती काढून खालीं लिहिल्या आहेत :—

भु^{२} क्ष = $\frac{१}{२}$ — $\frac{१}{२}$ को भु२ क्ष
भु^{३} क्ष = $\frac{३}{४}$ भु क्ष — $\frac{१}{४}$ भु३ क्ष
भु^{४} क्ष = $\frac{३}{८}$ — $\frac{१}{२}$ को भु२ क्ष + $\frac{१}{८}$ को भु४ क्ष
भु^{५} क्ष = $\frac{५}{८}$ भु क्ष — $\frac{५}{१६}$ भु३ क्ष + $\frac{१}{१६}$ भु५ क्ष
भु^{६} क्ष = $\frac{५}{१६}$ — $\frac{१५}{३२}$ को भु२ क्ष + $\frac{३}{१६}$ कोभु४ क्ष — $\frac{१}{३२}$ कोभु६ क्ष
को भु^{२} क्ष = $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{२}$ को भु२ क्ष
कोभु^{३} क्ष = $\frac{३}{४}$ को भु क्ष + $\frac{१}{४}$ को भु३ क्ष
कोभु^{४} क्ष = $\frac{३}{८}$ + $\frac{१}{२}$ को भु२ क्ष + $\frac{१}{८}$ को भु४ क्ष
कोभु^{५} क्ष = $\frac{५}{८}$ को भु क्ष + $\frac{५}{१६}$ को भु३ क्ष + $\frac{१}{१६}$ कोभु५ क्ष
कोभु^{६} क्ष = $\frac{५}{१६}$ + $\frac{१५}{३२}$ कोभु२ क्ष + $\frac{३}{१६}$ को भु४ क्ष + $\frac{१}{३२}$ को भु६ क्ष.

२५८. लेख २५६ मधील समीकरणांत जीं संयुक्त पदें आली आहेत त्याचे स्पष्टीकरण करितो.

$$-\frac{१}{२}\text{प}^{२} = -\frac{१}{२}\text{प}^{२}\text{भु}^{२}\text{नब} = -\frac{१}{२}\text{प}^{२}\left(\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\text{को भु२ नब}\right)$$

$$= -\frac{१}{४}\text{प}^{२} + \frac{१}{४}\text{प}^{२}\text{को भु२ नब}$$

$$-\frac{१}{२}\text{द}^{२} = -\frac{१}{२}\text{द}^{२}\text{भु}^{२}\text{मब} = -\frac{१}{२}\text{द}^{२}\left(\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\text{को भु२ मब}\right)$$

$$= -\frac{१}{४}\text{द}^{२} + \frac{१}{४}\text{द}^{२}\text{को भु२ मब}$$

$$-\text{पद} = -\text{पद भुमब भुनब}$$

$$= -\text{पद}\left\{-\frac{१}{२}\text{कोभु (म+न) ब} + \frac{१}{२}\text{कोभु (म−न) ब}\right\}$$

$$= +\frac{१}{२}\text{पद को भु (म+न) ब} - \frac{१}{२}\text{पद को भु (म−न) ब}$$

$$-\text{पत} = +\frac{१}{२}\text{पत को भु (क+न) ब} - \frac{१}{२}\text{पत को भु (क−न) ब}$$

$$+\frac{१}{२४}\text{प}^{४} = \frac{१}{२४}\text{प}^{४}\text{भु}^{४}\text{नब} = \frac{१}{२४}\text{प}^{४}\left(\frac{३}{८}-\frac{१}{२}\text{कोभु २ नब}+\frac{१}{८}\text{कोभु ४ नब}\right)$$

$$= \frac{१}{६४}\text{प}^{४} - \frac{१}{४८}\text{प}^{४}\text{को भु२ नब} + \frac{१}{१९२}\text{प}^{४}\text{को भु४ नब}$$

ह्यावरून को भु स ची पदें एकत्र करून खालीं लिहिली आहेतः—

$$\text{को भु स} = \begin{cases} \left(१-\frac{१}{४}\text{प}^{२}-\frac{१}{४}\text{द}^{२}+\frac{१}{६४}\text{प}^{४}\right)+\left(\frac{१}{४}\text{प}^{२}-\frac{१}{४८}\text{प}^{४}\right)\text{को भु२ नब} \\ +\frac{१}{२}\text{पद को भु (म + न) ब} - \frac{१}{२}\text{पद को भु (म − न) ब} \\ +\frac{१}{२}\text{पत को भु (क + न) ब} - \frac{१}{२}\text{प त को भु (क − न) ब} \\ +\frac{१}{४}\text{द}^{२}\text{को भु२ मब} + \frac{१}{१९२}\text{प}^{४}\text{को भु४ न ब.} \end{cases}$$

२५९. वरच्या लेखांत जशी को भु स ची किमत सिद्ध केली तशी भुजज्या स ची किमत येथें सिद्ध करितों. त्या किमतींत दोन संयुक्त पदें आहेत त्यांचे स्पष्टीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें :—

$$-\frac{१}{६}\text{प}^{३} = -\frac{१}{६}\text{प}^{३}\text{भु}^{३}\text{नब} = -\frac{१}{६}\text{प}^{३}\left(\frac{३}{४}\text{भुनब} - \frac{१}{४}\text{भु३ नब}\right)$$

$$= -\frac{१}{८}\text{प}^{३}\text{भु नब} + \frac{१}{२४}\text{प}^{३}\text{भु३ नब}$$

$$-\frac{१}{२}\text{प}^{२}\text{द} = -\frac{१}{२}\text{प}^{२}\text{भु}^{२}\text{नब} \times \text{दभुनब}$$

$$= -\frac{१}{२}\text{प}^{२}\text{द}\left(\frac{१}{२} - \frac{१}{२}\text{को भु२ नब}\right)\text{भुमब}$$

$$= -\frac{१}{४}\text{प}^{२}\text{द भुमब} + \frac{१}{४}\text{प}^{२}\text{द को भु२ नब भुमब}$$

$$= -\frac{१}{४}\text{प}^{२}\text{द भुमब} + \frac{१}{८}\text{प}^{२}\text{द भु (म−२ ब) ब}$$

$$-\frac{१}{८}\text{प}^{२}\text{द भु (म − २ब) ब}$$

तेव्हां

$$\text{भु स} = \begin{cases} +\text{प भुनब} + \text{द भुमब} + \text{त भुकब} \\ +\text{च भुगब} - \frac{१}{८}\text{प}^{३}\text{भुनब} + \frac{१}{२४}\text{प}^{३}\text{भु३ नब} \\ +\frac{१}{८}\text{प}^{२}\text{द भु (म+२न) ब} - \frac{१}{८}\text{प}^{२}\text{द भु (म−२न) ब} \\ -\frac{१}{४}\text{प}^{२}\text{द भुमब} \end{cases}$$

२६०. लेख २५६ मध्यें भु घ ची किंमत समीकरण (१) मध्यें जी दिली आहे तिच्यात पदांची स्वरूपें सामान्य अशी लिहिली आहेत, त्यांचें स्पष्टीकरण सामान्यत्वें करूनच खालीं दिलें आहे :—

भु घ च्या किंमतीत अ कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या यांच्या किंमती आहेत. त्यांत अ कोन प्रत्यक्ष आहे आणि स कोन हा इतर कोनांचा प्रतिनिधि आहे. त्याची भुजज्या आणि कोभुजज्या वर दिली आहे त्यावरून घ कोनाची भुजज्या आणि कोभुजज्या यांची स्वरूपें खालीं दिली आहेत.

$$\text{भुघ} = \text{भुअ कोभुस} + \text{कोभुअ भुस}$$

भुअ आणि को भु स तसेच को भु अ आणि भु स हे दोन्ही गुणाकार करून आलेली सर्व पदें एकत्र लिहिली आहेत.

$$\text{भुघ} = \begin{cases}
(१ - \tfrac{१}{४}\text{प}^{२} - \tfrac{१}{४}\text{द}^{२} + \tfrac{१}{६४}\text{प}^{४})\ \text{भुअ} \\
+ \tfrac{१}{२}\text{पभु}(\text{नब} + \text{अ}) + \tfrac{१}{२}\text{पभु}(\text{नब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{भु}(२\,\text{नब} + \text{अ}) - \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{भु}(२\,\text{नब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{२}\text{दभु}(\text{मब} + \text{अ}) + \tfrac{१}{२}\text{दभु}(\text{मब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{४}\text{पदभु}\{(\text{म} + \text{न})\text{ब} + \text{अ}\} - \tfrac{१}{४}\text{पदभु}\{(\text{म} + \text{न})\text{ब} - \text{अ}\} \\
- \tfrac{१}{४}\text{पदभु}\{(\text{म} - \text{न})\text{ब} + \text{अ}\} + \tfrac{१}{४}\text{पदभु}\{(\text{म} - \text{न})\text{ब} - \text{अ}\} \\
+ \tfrac{१}{२}\text{तभु}(\text{कब} + \text{अ}) + \tfrac{१}{२}\text{तभु}(\text{कब} - \text{अ}) \\
- \tfrac{१}{१६}\text{प}^{३}\text{भु}(\text{नब} + \text{अ}) - \tfrac{१}{१६}\text{प}^{३}\text{भु}(\text{नब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{४८}\text{प}^{३}\text{भु}(३\,\text{नब} + \text{अ}) + \tfrac{१}{४८}\text{प}^{३}\text{भु}(३\,\text{नब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{२}\text{चभु}(\text{गब} + \text{अ}) + \tfrac{१}{२}\text{चभु}(\text{गब} - \text{अ}) \\
- \tfrac{१}{९६}\text{प}^{४}\text{भु}(२\,\text{नब} + \text{अ}) - \tfrac{१}{९६}\text{प}^{४}\text{भु}(२\,\text{नब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{३८४}\text{प}^{४}\text{भु}(४\,\text{नब} + \text{अ}) - \tfrac{१}{३८४}\text{प}^{४}\text{भु}(४\,\text{नब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{४}\text{पतभु}\{(\text{क} + \text{न})\text{ब} + \text{अ}\} - \tfrac{१}{४}\text{पतभु}\{(\text{क} + \text{न})\text{ब} - \text{अ}\} \\
- \tfrac{१}{४}\text{पतभु}\{(\text{क} - \text{न})\text{ब} + \text{अ}\} + \tfrac{१}{४}\text{पतभु}\{(\text{क} - \text{न})\text{ब} - \text{अ}\} \\
- \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{दभु}(\text{मब} + \text{अ}) - \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{दभु}(\text{मब} - \text{अ}) \\
+ \tfrac{१}{१६}\text{प}^{२}\text{दभु}\{(\text{म} + २\,\text{न})\text{ब} + \text{अ}\} \\
+ \tfrac{१}{१६}\text{प}^{२}\text{दभु}\{(\text{म} + २\,\text{न})\text{ब} - \text{अ}\}. \\
- \tfrac{१}{१६}\text{प}^{२}\text{दभु}\{(\text{म} - २\,\text{न})\text{ब} + \text{अ}\} \\
- \tfrac{१}{१६}\text{प}^{२}\text{दभु}\{(\text{म} - २\,\text{न})\text{ब} - \text{अ}\}. \\
+ \tfrac{१}{८}\text{द}^{२}\text{भु}(२\,\text{मब} + \text{अ}) - \tfrac{१}{८}\text{द}^{२}\text{भु}(२\,\text{मब} - \text{अ})
\end{cases}$$

२६१. कोभुघ ची सारणी. वरच्याप्रमाणे कोभुघ चीं किंमत खालीं लिहिली आहे.

$$\text{कोभुघ} = \text{कोभुअ कोभुस} - \text{भुअ भुस}$$

कोभुअकोभुस आणि भुअभुस हे दोन्ही गुणाकार करून आलेलीं सर्व पदें खालीं एकत्र लिहिलीं आहेत.

$$\left(१ - \tfrac{१}{४}\text{प}^{२} - \tfrac{१}{४}\text{द}^{२} + \tfrac{१}{६४}\text{प}^{२}\right) \text{कोभुअ}$$

$$\left(- \tfrac{१}{२}\text{प} + \tfrac{१}{१६}\text{प}^{३}\right) [\text{कोभु}(\text{नब} - \text{अ}) - \text{कोभु}(\text{नब} + \text{अ})]$$

$$\left(- \tfrac{१}{२}\text{द} + \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{द}\right) [\text{कोभु}(\text{मब} - \text{अ}) - \text{कोभु}(\text{मब} + \text{अ})]$$

$$\left(+ \tfrac{१}{८}\text{प}^{२} - \tfrac{१}{९६}\text{प}^{४}\right) [\text{कोभु}(२\text{न} - \text{अ}) + \text{कोभु}(२\text{न} + \text{अ})]$$

$$- \tfrac{१}{४८}\text{प}^{३} [\text{कोभु}(३\text{नब} - \text{अ}) - \text{कोभु}(३\text{नब} + \text{अ})]$$

$$+ \tfrac{१}{४}\text{पद} [\text{कोभु}\{(\text{म}+\text{न})\text{ब} - \text{अ}\} + \text{कोभु}\{(\text{म}+\text{न})\text{ब} + \text{अ}\}]$$

$$- \tfrac{१}{४}\text{पद} [\text{कोभु}\{(\text{म}-\text{न})\text{ब} - \text{अ}\} + \text{कोभु}\{(\text{म}-\text{न})\text{ब} + \text{अ}\}]$$

$$+ \tfrac{१}{४}\text{पत} [\text{कोभु}\{(\text{क}+\text{न})\text{ब} - \text{अ}\} + \text{कोभु}\{(\text{क}+\text{न})\text{ब} + \text{अ}\}]$$

$$- \tfrac{१}{४}\text{पत} [\text{कोभु}\{(\text{क}-\text{न})\text{ब} - \text{अ}\} + \text{कोभु}\{(\text{क}-\text{न})\text{ब} + \text{अ}\}]$$

$$- \tfrac{१}{२}\text{त} [\text{कोभु}(\text{कब} - \text{अ}) - \text{कोभु}(\text{कब} + \text{अ})]$$

$$- \tfrac{१}{२}\text{च} [\text{कोभु}(\text{गब} - \text{अ}) - \text{कोभु}(\text{गब} + \text{अ})]$$

$$+ \tfrac{१}{८}\text{द}^{२} [\text{कोभु}(२\text{मब} - \text{अ}) + \text{कोभु}(२\text{मब} + \text{अ})]$$

$$+ \tfrac{१}{३८४}\text{प}^{४} [\text{कोभु}(४\text{नब} - \text{अ}) + \text{कोभु}(४\text{नब} + \text{अ})]$$

$$- \tfrac{१}{१६}\text{प}^{२}\text{द} [\text{कोभु}\{(\text{म} + २\text{न})\text{ब} - \text{अ}\}$$

$$+ \text{कोभु}\{(\text{म} + २\text{न})\text{ब} + \text{अ}\}].$$

$$+ \tfrac{१}{१६}\text{प}^{२}\text{द} [\text{कोभु}\{(\text{म} - २\text{न})\text{ब} - \text{अ}\}$$

$$+ \text{कोभु}\{(\text{म} - २\text{न})\text{ब} + \text{अ}\}].$$

२६२. ग्रहगणितांत वरच्या दोन समीकरणांची विशेष आवश्यकता असते म्हणून ती दोन्ही एथें सिद्ध करून लिहिली आहेत. एखाद्या अज्ञात राशीची मोजणी सूक्ष्मतेच्या पदवी पदवीनें करिता येते हा सूक्ष्मांश गणिताचा भाग आहे. म्हणून ही समीकरणें एथें दिली आहेत. त्याप्रमाणेंच खालीं दाखविलेल्या कृत्याचें समीकरण केवळ पदवीच्या क्रमानेंच सिद्ध केले आहे. तें समीकरण असें—

$$\text{य} = \text{क्ष} + \text{प भु नक्ष} + \text{द भु मक्ष} + \text{त भु कक्ष} + \text{च भु गक्ष} + \cdots\cdots$$

हें समीकरण सामान्य स्वरूपाचें आहे. ह्यामध्यें क्ष हें विकारी पद असून य हें अवलंबी पद आहे. त्याशिवाय प न वगैरे संख्या आहेत त्या स्थीर संख्या आहेत.

ग्रहगणितांत आपणास ह्या समीकरणाची अशी आवश्यकता उत्पन्न होते कीं, ह्या प्रमाणें सिद्ध असलेल्या समीकरणापासून क्ष हें अव्यक्त पद समजून आणि य हें व्यक्त पद समजून य च्या सहाय्यानें क्ष ची किंमत तयार करावयाची. सूक्ष्मांशगणिताच्या सहाय्यानें असलीं समीकरणें सोडविण्याच्या रीति इंग्लिश ग्रंथांत अनेक आहेत. परंतु त्या रीति सिद्ध करण्यास सूक्ष्मांश गणिताचें उत्तम ज्ञान असले पाहिजे. त्या गणित पद्धतीचा मार्ग सुलभ व जवळचा आहे. परंतु महाराष्ट्र भाषेंत इतक्या उच्च प्रतीच्या गणितावर ग्रंथ झाले नसल्यामुळें, दीर्घ विस्तार झालेला पत्करून उपपत्तीची दृष्टि किंचितही न टाकितां वरचा सिद्धांत सिद्ध करीत आहे.

२६३. समीकरणाचें मूळ स्वरूप--

य = क्ष + प भु न क्ष + द भु म क्ष + ...

ह्यांतील क्ष ची किंमत आपणास पाहिजे आहे म्हणून

क्ष = य — प भु न क्ष — द भु म क्ष — ...... (अ)

सूक्ष्मतेचा विचार बाजूस ठेवून प्रथम

क्ष = य — प भु न क्ष.....

असे मानूं. ह्याला न नें गुणून त्याची भुजज्या करू

भु न क्ष = भु (न य — प न भु न क्ष)

प भु न क्ष=प भु (न य—प न भु न क्ष) =प भु न य—प^2 न भु न क्ष × को भु न क्ष

प्रथम आपण क्ष ची किंमत पहिल्या पदवी पर्यंतच काढूं म्हणून प^{2}नभुनक्ष हें दुसऱ्या पदवीचे पद सोडून दिलें तेव्हां.

— प भु न क्ष = प भु न य......

ही किंमत समीकरण (अ) मध्यें ठेविली तेव्हां

क्ष = य — प भु न य [पहिली पदवी] (प)

२६४. क्ष ची किंमत पहिल्या पदवीची आपणाला समजली. आता क्ष ची दुसऱ्या पदवीची किंमत शोधूं.

क्ष = य — प भु न य.

ह्या समीकरणाला न नें गुणून त्याची भुजज्या करूं.

न क्ष = न य — प न भु न य.

भु न क्ष = भु (न य — प न भु न य)

=भु न य को भु (प न भु न य) — को भु न य भु (पनभुनय).

भुजज्या आणि कोभुजज्या वृत्तपरिमाणाच्या घातावळीनें मांडता येतात जसें भु क्ष = क्ष — $\frac{1}{6}$ क्ष^3, आणि को भु क्ष = १ — $\frac{1}{2}$ क्ष^2 ह्याप्रमाणें.

को भु (प न भु न य) = १ — $\frac{1}{2}$ प^2 न^2 भु^{2} न य + ...

आणि भु (प न भु न य) = पं न भु न य—......

आपणाला दुसऱ्या पदवीची पदें पाहिजे आहेत, आणि आपण भु न क्ष ची किंमत सिद्ध करीत आहोत भु न क्ष ला प हा गुणक पहिल्या पदवीचा आहे म्हणून $\frac{1}{2}$ प^{2}न^2 हें पद सोडून दिले तेव्हां

पभुनक्ष = पभुनय × १ — कोभुनय × पनभुनय.

— पभुनक्ष = — पभुनय + प^{2}न × भुनय × कोभुनय.

= — पभुनय + $\frac{1}{2}$ प^{2}न भु२ न य......... (१)

आता

दभुमक्ष = दभु{म (य — पनभुनय)}

= दभुमय × १ — द को भुनय × पनभुनय.

प × द या गुणकाने युक्त पद तिसऱ्या पदवीचे होतें. म्हणून तें सोडून दिले तेव्हां

— दभुमक्ष = — दभुमय. .... (२)

अ समीकरणांत (१) (२) ही पदें लिहिलीं तेव्हा

क्ष = य — पभुनय + $\frac{1}{2}$प^{2}नभु२ नय — दभुमय. (दुसरी पदवी) (द)

२६५. आतां आपणाला क्ष च्या किंमतीतील तिसऱ्या पदवीपर्यंत पदें शोधावयाची आहेत. ह्याकरिता.

क्ष = य — पभुनक्ष — दभुमक्ष — पभुकक्ष — (अ)

ह्या समीकरणांत उजवीकडच्या पेट्यांत क्ष च्या ठिकाणीं क्ष ची य च्या रूपानें निघालेली किंमत ठेवावयाची.

प्रथम पभुनक्षची किंमत तयार करूं.

नक्ष = नय — पनभुनय + $\frac{1}{2}$ प^{2}न^{2}भु२ नय — दनभुमय.

= नय — स असें मानिले तर.

भुनक्ष = भु (नय — स) = भुनयकोभुस — कोभुनयभुस ह्या समीकरणातील स ची किंमत घेऊन येणारी पदें दुसऱ्या पदवी पर्यंत पाहिजे आहेत, म्हणून

कोभुस = को भु (प न भु न य — $\frac{1}{2}$ प^2 न^2 भ२ न य + द न भु म य)

= १ — $\frac{1}{2}$ प^2 न^2 भु^{2} न य

भु स = प न भु न य — $\frac{1}{2}$ प^2 न^2 भु२ न य + द न भु म य

तेव्हां.

प भु न क्ष = प (१ — $\frac{1}{2}$ प^2 न^2 भु^{2} न य) भु न य

— प^2 न भु न य को भु न य + $\frac{1}{2}$ प^3 न^2 भु२ न य × को भु न य

— प द न भु म य × को भु न य

$$
\begin{aligned}
-\text{पभुनक्ष} = & -\text{पभुनय} + \tfrac{१}{२}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भु}^{३}\text{नय} + \tfrac{१}{२}\text{प}^{२}\text{नभु२नय} \\
& - \tfrac{१}{४}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भु३ नय} - \tfrac{१}{४}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भुनय} \\
& + \tfrac{१}{२}\text{पदनभु (म + न) य} + \tfrac{१}{२}\text{पदनभु (म − न) य}
\end{aligned}
$$

ह्या समीकरणांत $\text{भु}^{३}\text{नय}$ हें पद आहे याची किमत लेख २५७ प्रमाणे $\tfrac{३}{४}$ भुनय — $\tfrac{१}{४}$ भु३ नय ही आहे. हिला गुणक $\tfrac{१}{२}\text{प}^{३}\text{न}^{२}$ हा आहे. ह्याने गुणून $\tfrac{३}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}$ भुनय —$\tfrac{१}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}$ भु३ नय ह्या दोन्ही पदांत —$\tfrac{१}{४}\text{प}^{३}\text{न}^{२}$ भुनय आणि —$\tfrac{१}{४}\text{प}^{३}\text{न}^{२}$ भ३ नय ही एकत्र केली तेव्हा +$\tfrac{१}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}$ भुनय आणि —$\tfrac{३}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}$भु३ नय हीं पदें तयार होतात तेव्हां.

$$
\begin{aligned}
-\text{पभुनक्ष} = & -\text{पभुनय} + \tfrac{१}{२}\text{प}^{२}\text{नभु२नय} + \tfrac{१}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भुनय} \\
& - \tfrac{३}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भु३ नय} + \\
& + \tfrac{१}{२}\text{पदनभु (म+न) य} + \tfrac{१}{२}\text{पदनभु (म—न) य}
\end{aligned}
$$

आता भुमक्षची किमत पाहिजे. .... (१)

मक्ष = मय — पमभुनय.

भुमक्ष ला द हा द्वितीय पदवीचा गुणक आहे म्हणून मक्ष बरोबरीच्या पदांत पहिल्या पदवीपेक्षां जास्त सूक्ष्मतेची जरूर नाही म्हणून पमभुनय हें एकच पद पुरें आहे. तेव्हां

$$
\begin{aligned}
\text{भुमक्ष} &= \text{भु (मय—पमभुनय)}. \\
&= \text{भुमयकोभु(पमभुनय) — कोभुमयभु(पमभुनय)}. \\
&= \text{भुमय} - \tfrac{१}{२}\text{पमभु (म + न) य} + \tfrac{१}{२}\text{पमभु (म − न) य}
\end{aligned}
$$

तेव्हां.

$$
-\text{दभुमक्ष} = -\text{दभुमय} + \tfrac{१}{२}\text{पदमभु (म+न) य} - \tfrac{१}{२}\text{पदमभु (म—न) य} \quad \text{........ (२)}
$$

आता

$$
-\text{तभुकक्ष} = -\text{तभुकय} \quad \text{........ (३)}
$$

(१) (२) (३) ह्या किमती एकत्र केल्या

तेव्हां

$$
\text{क्ष} = \begin{cases} \text{य} - \text{पभुनय} - \text{दभुमय} + \tfrac{१}{२}\text{प}^{२}\text{नभु२ नय} \\ - \text{तभुकय} + \tfrac{१}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भुनय} - \tfrac{३}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भु३ नय} \\ + \tfrac{१}{२}\text{पद(म+न)भु(म+न)य} - \tfrac{१}{२}\text{पद (म—न) भु(म—न) य} \end{cases}
$$

(तिसरी पदवी) (त)

२६६. इच्छिलेलें समीकरण तिसऱ्या पदवी पर्यंत सोडविलें आहे. आता तें समीकरण चवथ्या पदवी पर्यंत सोडवावयाचें आहे.

(त) समीकरणाला न नें गुणून त्याची भुजज्या तिसऱ्या पदवी पर्यंत करावयाची

नक्ष = नय — स

— भुनक्ष = — भु (नय — स) = — भुनय कोभुस + कोभुनयभुस

भुस = पन भुनय + दन भुमय — $\frac{१}{२}$ $प^{२}न^{२}$भु२ नय
+ तन भुकय + $\frac{३}{८}$ $प^{३}न^{३}$ भु३ नय = $\frac{१}{८}$ $प^{३}न^{३}$ भुनय
— $\frac{१}{२}$ पदन (म + न) भु (म + न)
+ $\frac{१}{२}$ पदन (म — न) भु (म — न) य.
— $\frac{१}{६}$ $प^{३}न^{३}$ ($\frac{३}{४}$ भुनय — $\frac{१}{४}$ भु३नय)

प को भु न य भु स = + $\frac{१}{२}$ $प^{२}$न भु२ नय + $\frac{१}{२}$ पदन भु (म + न) य
+ $\frac{१}{२}$ पदन भु (म — न) य — $\frac{१}{४}$ $प^{३}न^{२}$ भु३ नय
— $\frac{१}{४}$ $प^{३}न^{२}$ भुनय + $\frac{१}{२}$ पतन भु (क + न) य
+ $\frac{१}{२}$ पतन भु (क — न) य + $\frac{३}{१६}$ $प^{४}न^{३}$ भु४ नय
+ $\frac{३}{१६}$ $प^{४}न^{३}$ भु२ नय — $\frac{१}{१६}$ $प^{४}न^{३}$ भु२ नय
— $\frac{१}{४}$ $प^{२}$दन (म + न) भु (म + २ न)
— $\frac{१}{४}$ $प^{२}$दन(म + २ न) भुमय.
+ $\frac{१}{४}$ $प^{२}$दन (म — न) भुमय
+ $\frac{१}{४}$ $प^{२}$दन (म — न) भु (म — २ न) य.
— $\frac{१}{१६}$ $प^{४}न^{३}$ भु२ नय + $\frac{१}{४८}$ $प^{४}न^{३}$ भु४ नय
+ $\frac{१}{४८}$ $प^{४}न^{३}$ भु२ नय .... (१ ब)

को भु स = १ — $\frac{१}{२}$ $स^{२}$

कोणत्याही अनेक पदात्मक राशीचा वर्ग हा ; प्रत्येक पदाचा वर्ग आणि प्रत्येक दोन पदाच्या गुणाकाराची दुप्पट यांच्या बेरजेबरोबर असतो. तेव्हां

$\frac{१}{२}$ $स^{२}$ = $\frac{१}{२}$ $प^{२}न^{२}$ $भु^{२}$ नय + पदन^{२} भु मय भुनय — $\frac{१}{२}$ $प^{३}न^{३}$ भु २नय भुनय.

कोभुस = १ — $\frac{१}{४}$ $प^{२}न^{२}$ + $\frac{१}{४}$ $प^{२}न^{२}$ कोभु२ नय
— $\frac{१}{२}$ पदन^{२} कोभु (म — न) य
+ $\frac{१}{२}$ पदन^{२} कोभु (म + न) य.
— $\frac{१}{४}$ $प^{३}न^{३}$ कोभु३ नय + $\frac{१}{४}$ $प^{३}न^{३}$ को भु नय

ह्या समीकरणास — पभुनय यांनीं गुणिलें तेव्हां

$$
\begin{aligned}
-\text{पभुनय कोभुस} &= -\text{पभुनय} + \tfrac{१}{४}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भुनय} \\
&\quad - \tfrac{१}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भु३ नय} + \tfrac{१}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{भुनय} \\
&\quad + \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दन}^{२}\text{भुमय} - \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दन}^{२}\text{भु}(\text{म} - \text{२न})\text{य} \\
&\quad - \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दन}^{२}\text{भु}(\text{म} + \text{२न})\text{य} + \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दन}^{२}\text{भुमय} \\
&\quad + \tfrac{१}{८}\text{प}^{४}\text{न}^{३}\text{भु४ नय} - \tfrac{१}{८}\text{प}^{४}\text{न}^{३}\text{भु२नय} \\
&\quad - \tfrac{१}{८}\text{प}^{४}\text{न}^{३}\text{भु२ नय} \qquad \ldots\ldots \quad (\text{१ अ})
\end{aligned}
$$

$$\text{मक्ष} = \text{मय} - \text{स}$$

$$-\text{भुमक्ष} = -\text{भु}(\text{मय} - \text{स}) = -\text{भुमय कोभुस} + \text{कोभुमयभुस}.$$

$$
\begin{aligned}
\text{कोभुस} &= \text{१} - \tfrac{१}{२}\text{स}^{२} = \text{१} - \tfrac{१}{२}\text{प}^{२}\text{म}^{२}\text{भु}^{२}\text{नय} \\
&= \text{१} - \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{म}^{२} + \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{म}^{२}\text{कोभु२नय}
\end{aligned}
$$

ह्या समीकरणास — दभुमय यांनीं गुणिलें, तेव्हां

$$
\begin{aligned}
-\text{दभुमक्ष} &= -\text{दभुमय} + \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दम}^{२}\text{भुमय} \\
&\quad - \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{दम}^{२}\text{भु}(\text{म} + \text{२न})\text{य} \\
&\quad - \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{दम}^{२}\text{भु}(\text{म} - \text{२न})\text{य} \qquad \ldots\ldots \quad (\text{२अ}) \\
\text{भुस} &= +\text{पमभुनय} + \text{दमभुमय} - \tfrac{१}{२}\text{प}^{२}\text{मनभु२नय}
\end{aligned}
$$

ह्या समीकरणास + द कोभुमय यांनी गुणिलें, तेव्हां

$$
\begin{aligned}
+\text{दकोभुमयभुस} &= +\tfrac{१}{२}\text{पदमभु}(\text{म} + \text{न})\text{य} - \tfrac{१}{२}\text{पदमभु}(\text{म} - \text{न})\text{य} \\
&\quad + \tfrac{१}{२}\text{द}^{२}\text{मभु२मय} - \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दमनभु}(\text{म} + \text{२न})\text{य} \\
&\quad + \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दमनभु}(\text{म} - \text{२न})\text{य} \\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{२ब})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{भुकक्ष} &= \text{भु}(\text{कय} - \text{पकभुनय}) \\
&= \text{भुकय कोभु}(\text{पकभुनय}) - \text{कोभुकय भु}(\text{पकभु नय}.) \\
&= \text{भुकय} - \text{कोभुकय पकभुनय} \\
&= \text{भुकय} - \tfrac{१}{२}\text{पकभु}(\text{क} + \text{न})\text{य} \\
&\qquad + \tfrac{१}{२}\text{पकभु}(\text{क} - \text{न})\text{य}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\text{तभुकक्ष} &= -\text{तभुकय} + \tfrac{१}{२}\text{पतकभु}(\text{क} + \text{न})\text{य} \\
&\quad - \tfrac{१}{२}\text{पतकभु}(\text{क} - \text{न})\text{य} \qquad \ldots\ldots \quad (\text{३})
\end{aligned}
$$

$$
-\,\text{चभुगक्ष} \;=\; -\,\text{चभुगय} \qquad \cdots\cdots (\text{४})
$$

$$
\text{क्ष} = \left\{
\begin{array}{l}
\text{य} - \text{पभुनय} - \text{दभुमय} + \tfrac{१}{२}\text{प}^{२}\text{न भु२नय} \\
\quad - \text{तभुकय} + \tfrac{१}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{ भुनय} - \tfrac{३}{८}\text{प}^{३}\text{न}^{२}\text{ भु३नय} \\
\quad + \tfrac{१}{२}\text{पद}(\text{म}+\text{न})\text{भु}(\text{म}+\text{न}) \\
\qquad - \tfrac{१}{२}\text{पद}(\text{म}-\text{न})\text{भु}(\text{म}-\text{न})\text{ य.} \\
\quad - \tfrac{१}{६}\text{प}^{४}\text{न}^{३}\text{ भु२नय} + \tfrac{१}{३}\text{प}^{४}\text{न}^{३}\text{ भु४नय} \\
\qquad + \tfrac{१}{४}\text{प}^{२}\text{दम}^{२}\text{ भुमय.} \\
\quad - \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{द}(\text{म}+\text{२न})^{२}\text{ भु}(\text{म}+\text{२न})\text{ य} \\
\qquad - \tfrac{१}{८}\text{प}^{२}\text{द}(\text{म}-\text{२न})^{२}\text{भु}(\text{म}-\text{२न})\text{ य.} \\
\quad + \tfrac{१}{२}\text{पत}(\text{क}+\text{न})\text{भु}(\text{क}+\text{न}) \\
\qquad - \tfrac{१}{२}\text{पत}(\text{क}-\text{न})\text{भु}(\text{क}-\text{न})\text{ य.} \\
\quad + \tfrac{१}{२}\text{द}_{१}\text{द}_{२}(\text{म}_{१}+\text{म}_{२})\text{ भु }(\text{म}_{१}+\text{म}_{२})\text{ य} \\
\qquad - \text{द}_{१}\text{द}_{२}(\text{म}_{१}-\text{म}_{२})\text{भु}(\text{म}_{१}-\text{म}_{२})\text{ य.} \\
\quad + \tfrac{१}{२}\text{द}^{२}\text{म भु}(\text{२म})\text{य} - \text{चभुगय} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{चवथी पदवी}]
\end{array}
\right.
$$

प्रकरण नववें

वेग आणि वेगवृद्धि व त्यांचीं पृथःकरणें

२६७. ह्या प्रकरणांत गतिशास्त्राचे सिद्धांत सिद्ध करून दाखविले आहेत. गति म्हणजे काय, तिचें मापन कसें करावें, परिमाण कोणतें घ्यावे, इत्यादि विषयाचे उपपादन केलें आहे. आकर्षणाच्या कार्यानें पदार्थाच्या गतीवर परिणाम कसे होतात व त्यायोगें पदार्थाचा गमन मार्ग कोणत्या आकाराचा होतो, त्या गमन मार्गाची दिशा कोणती होते हे येथें सोपपत्तिक वर्णिले आहे : पदार्थाचा गमनमार्ग पदार्थांचें चलन हे शब्द त्या पदार्थाच्या गुरुत्वमध्याला अनुसरून वापरले आहेत असें समजावें. पदार्थाचें अस्तित्व जर एकाच स्थानीं असेल तर तो पदार्थ स्थीर आहे असे म्हणतात, एथे त्या पदार्थाचा गुरूत्वमध्य एकाच स्थानीं आहे असें म्हणावें. यास्तव पदार्थाचें चलन किंवा गति त्याच्या गुरुत्वमध्याला अनुसरून वर्णिलीं असतात.

२६८. ज्या कारणानें स्थीर पदार्थास गति उत्पन्न होते, किंवा चल पदार्थाची गति वाढते अथवा कमी होते, त्या कारणास प्रेरणा असें म्हणतात. गति म्हणजे चलन अथवा पदार्थाचे एका ठिकाणाहून दुसरें ठिकाणीं जाणें. प्रेरणेनें चल पदार्थाची गति नष्ट होते : किंवा त्याच्या गमनाची दिशा बदलते. प्रेरणेपासून उत्पन्न होणाऱ्या क्रियेचा अथवा कार्याचा शोध ज्या शास्त्रांत केलेला असतो त्याला प्रेरणाशास्त्र म्हणतात. ह्या शास्त्राचे दोन भाग आहेत––(१) ज्या भागांत स्थीर पदार्थावर प्रेरणेची स्थीर कार्ये कशीं होतात ह्यांचा विचार असतो त्यास (स्थैर्योत्पादक प्रेरणाशास्त्र) म्हणतात ; आणि (२) ज्या भागांत, चल अथवा स्थीर पदार्थावर प्रेरणेची चल कार्ये कशीं होतात ह्याचा विचार असतो, त्याला 'गत्युत्पादक प्रेरणाशास्त्र' म्हणतात. प्रस्तुत ग्रंथाचा विषय ग्रह स्थान गणनेचा आहे. ग्रहाच्या गतीचें ज्ञान झाल्याशिवाय त्याच्या स्थानाचा निर्णय होत नाहीं म्हणून गतीचें मापन कसें करावें हा विषय गत्युत्पादक प्रेरणाशास्त्राचा आहे, त्याचें विवरण येथें करावयाचे आहे.

२६९. पदार्थांतील बिंदूच्या स्थलांतराला 'गति' म्हणतात, आणि ती गति ज्या त्वरेची असेल त्या त्वरेला 'वेग' म्हणतात. जी गति विवक्षित कालांत पदार्थाला (त्यातील बिंदूला) जास्त अंतर आक्रमण करावयास लावील त्या गतीचा वेग जास्त आहे असें म्हणावें, आणि कमी अंतर क्रमावयास लावील त्या गतीचा वेग कमी आहे असें म्हणावें. वेग दोन प्रकारचे आहेत––(१) समवेग आणि (२) विषमवेग. जो वेग कालाच्या प्रत्येक क्षणीं नियमित परिमाणाचा असतो म्हणजे एका क्षणी एक तर दुसऱ्या क्षणीं त्याहून भिन्न म्हणजे कमी किंवा जास्त असा नसतो त्या वेगास 'समवेग' म्हणतात ; आणि जो वेग कालाच्या प्रत्येक क्षणीं जास्त किंवा कमी होतो त्याला 'विषमवेग' म्हणतात.

२७०. कालाच्या एकं परिमाणांत पदार्थानें जें अंतर क्रमिलें असेल, म्हणजे त्याचें जें स्थलांतर झालें असेल त्या अंतरानें, समवेग मापितात. दोन बिंदूंमधील अंतर म्हणजे रेषा होय. वेग मापनाचें दर्शक रेषा होय. ज्याप्रमाणें उष्णता-मापक यंत्रांत, किंवा भारमापक यंत्रांत उष्णता किंवा हवेचा भार पारदस्तंभाच्या उंचीनें दाखवितात. एथे पारदस्तंभाची उंची परिमेय नव्हे, तसेंच कांहीं अंशी वेग आणि अंतर याचा संबंध आहे. इंग्लिश ग्रंथकार कालाचा एकं एक सेकंद हा मानितात आणि रेषेचा एकं फूट मानितात. एक पदार्थ एका सेकंदांत १२ फूट चालतो, दुसऱ्या सेकंदांतही १२ च फूट चालतो आणि ही त्याची चाल प्रतिक्षणीं सारखी अशी आहे, असें जर असेल तर त्या पदार्थाचा वेग सम आहे आणि तो १२ फूट आहे, असें म्हणतात. पदार्थाचा वेग १२ फूट आहे. हें वाक्य शुद्ध आहे. पण पदार्थाचा वेग एका सेकंदांत १२ फूट आहे असें वाक्य अशुद्ध होय. ह्या अशुद्ध वाक्यानें अशी भावना उत्पन्न होते कीं, $\frac{1}{2}$ सेकंदांत त्या पदार्थाचा वेग ६ फूट आहे ती खरी नाहीं. सेकंदाचे कितीही तुकडे केले तरी प्रत्येक तुकड्यांत त्या पदार्थाचा वेग १२ फूटच असतो. वेग आणि काल मापण्याचे एकं ह्या शास्त्रांत फूट आणि सेकंद मानण्याचा संकेत ठरलेला आहे. तथापि अति मोठ्या गतीचा वेग कालाच्या एकं ह्या परिमाणांत म्हणजे एका सेकंदांत फुटानें न दाखविता मैल ह्या रेषा परिमाणानें दाखवितात. असें जरी आहे तरी इच्छेप्रमाणें पण सूक्ष्म अशी दुसरीं परिमाणें स्विकारली तर कार्यात न्यूनत्व येणार नाही.

२७१. एक परमाणु नियमित वेगानें चलन पावत आहे, म्हणजे तो समान काल भागांत समान अंतर क्रमीत आहे. अर्थात् त्याचा वेग सम आहे. तो दर सेकंदांत ग फूट चलन पावत आहे, म्हणजे त्याचा वेग ग फूट आहे. तो परमाणु क संख्यांक सेकंदांत जे अंतर क्रमील त्यास 'चाल' असें म्हणूं. चाल ही च ह्या अक्षरानें दाखवूं तेव्हां वेग, काल आणि चाल यांचा एकमेकांशी असलेला संबंध खालच्या समीकरणानें दाखविला जातो :—

$$\text{चाल} = \text{वेग} \times \text{काल}$$

आणि

$$\text{ग} = \frac{\text{च}}{\text{क}}$$

म्हणजे परमाणूची चाल जितके फूट असेल त्या संख्येला त्या चालीस लागलेला काल क सेकंद, ह्या क संख्येनें भागिलें म्हणजे वेग येतो. ह्या रीतीनें सम वेगाचें मापन करिता येतें. म्हणजे चाल दाखविणाऱ्या फूटास काल दाखविणाऱ्या सेकंदांनीं भागिल्यानें वेग येतो. हा सम वेग होय.

२७२. एथे वाचकांनीं हे लक्षात ठेवावे कीं, वेग हे परिमेय नव्हे. हीं भाव संख्या आहे. रुपयाला ४ पायली धान्य मिळतें एथें ४ पायली भाव सांगितला, पण किंमत

रुपया, आठ आणे, दोन रुपये वगैरे कांहीं तरी किंमतीनें गुणिल्याशिवाय तें धान्य होत नाही. एक सेकंद संपून दुसरा सुरू होण्याचा जो क्षण, त्याला स्थिति आहे पण महत्त्व नाहीं. म्हणजे भूमितीत जसा बिंदु तसा काल ह्या परिमेयात क्षण आहे. त्या क्षणीं परमाणूच्या अंगीं जी चलनाची शक्ति त्या शक्तीला वेग असें म्हणावयाचे. अर्थात त्या क्षणीं तो परमाणू वेगाइतके अंतर चालला नाहीं. परंतु त्या वेगानें तो एक सेकंदभर चालला तर त्या वेगाइतके फूट चालेल. क्षणाला जर विस्तार नाहीं तर त्यात चलन होणेंच नाहीं. सम वेगात एका सेकंदातील चाल, आणि त्या सेकंदातल्या अनंत क्षणांपैकीं प्रत्येक क्षणीं असलेला वेग ही दोन्हीं सारखीच असतात, म्हणून वेग व चाल यांतील भिन्नत्व लक्ष्यांत येत नाहीं. यासाठीं स्मरणांत असावे कीं, वेग हा अंतर म्हणजे रेषा नव्हे, तथापि परमाणु त्या वेगानें एका सेकंदात तितकें अंतर आक्रमण करूं शकेल.

२७३. स्थीर वेगाचें मापन कसें करावे याचें विवरण वर केले आहे. आता चल वेग कसा मापावयाचा त्याचें विवरण करितो. चल वेग हा प्रत्येक क्षणीं सारखा नाहीं, त्याचें मापन कसें करावें ही अशक्यता वाटते. पण येथें असें मानिलें आहे कीं, पदार्थाचा विवक्षित एखाद्या क्षणीं जो वेग असेल तो कालाच्या एका परिमाणांत सर्व क्षणी सारखा आहे.

वेग (चल किंवा स्थीर) हा चालीच्या सूक्ष्मांशाचें कालाच्या सूक्ष्मांशाशीं जें गुणोत्तर त्या गुणोत्तराबरोबर असतो. स्थीर वेगांत $\text{ग} = \text{च}$ असते (कारण $\text{क} = 1$ म्हणून $\text{ग} = \text{च} \times 1$) किंवा

$$\text{ग} = \frac{\text{च}}{\text{क}} = \frac{\text{च}}{1 \text{ सेकंद}}$$

कारण चाल ही एका सेकंदातील आहे. उजव्या पेटयांतील अपूर्णांकाच्या अंश छेदास न ह्या संख्येनें भागिले तर :

$$\text{ग} = \frac{\text{च} \div \text{न}}{1 \text{ सेकंद} \div \text{न}} = \frac{\frac{\text{च}}{\text{न}}}{\frac{1 \text{ सेकंद}}{\text{न}}}$$

ह्यातील न ही संख्या कोणतीही असली तरी ग मध्ये कांहीं बदल होत नाहीं. आता न ही संख्या अमर्याद मोठी मानिली तर

$$\frac{\text{च}}{\text{न}} = \text{चालीचा सूक्ष्मांश}$$

$$\frac{1 \text{ सेकंद}}{\text{न}} = \text{कालाचा सूक्ष्मांश}$$

सूक्ष्मांश गणिताच्या लेखनपद्धतिप्रमाणें

$$\frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} = \text{वेग} = \text{ग}. \quad (१)$$

२७४. स्थीर वेगाचें मापन सोपे आहे. चाल फुटात्मक घेऊन तिला सेकंदात्मक कालानें भागिलें म्हणजे वेग येतो. वेग चल असला तर तो सप्रमाण पद्धतीनें ठरवावा लागतो. अशी कल्पना करा कीं क कालाच्या अंत्यक्षणीं तो वेग $\text{ग}_१$ फूट होता त्या क्षणानंतर कालाची वृद्धि $\triangle$ क इतकी झाली त्या क्षणीं तो वेग $\text{ग}_२$ होता, क कालाच्या अंत्यक्षणीं चाल च फूट आणि (क + $\triangle$ क) कालाच्या अंत्यक्षणीं (च + $\triangle$ च) फूट होती. एथें $\triangle$ च ही चाल $\triangle$ क कालातली आहे. व ती कालाप्रमाणें वाढणारी आहे, त्यावरून ठरते कीं, $\text{ग}_१$ वेगापेक्षां $\text{ग}_२$ वेग मोठा आहे.
$\triangle$ च ही चाल $\text{ग}_१$ $\triangle$ क पेक्षा लहान नाहीं आणि $\text{ग}_२$ $\triangle$ क पेक्षां मोठी नाहीं,
$\frac{\triangle \text{ च}}{\triangle \text{ क}}$ हे गुणोत्तर $\text{ग}_१$ पेक्षा लहान नाहीं आणि $\text{ग}_२$ पेक्षा मोठे नाहीं.

आतां सूक्ष्मांश $\triangle$ क हा कालाचा अतिसूक्ष्म अंश मानिला तर $\triangle$ च चालीचा सूक्ष्मांश होईल आणि $\text{ग}_१$ व $\text{ग}_२$ हे वेग समान होतील अर्थात त्यामध्यें असलेला क कालाच्या अत्यंक्षणीचा वेग ग हाही त्याबरोबरच होईल. म्हणजे

$$\text{ग}_१ = \text{ग} = \text{ग}_२$$

आणि $\frac{\triangle \text{ च}}{\triangle \text{ क}}$ हे गुणोत्तर $\frac{\text{सूच}}{\text{सूक}}$ होईल म्हणून

$$\frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} = \text{वेग} = \text{ग}$$

२७५. वेगाची दिशा आणि घनर्णत्व, जडत्व हा पदार्थाचा सांसिद्धिक धर्म आहे. तो धर्म असा कीं प्रत्येक पदार्थ कारणाशिवाय चलन पावत नाहीं. आणि चल म्हणजे गतिमान पदार्थ कारणाशिवाय स्थीर होत नाहीं म्हणजे पदार्थ हा गतिविषयीं उदासीन असतो. त्याला कोणी गति दिली तर तो गतिमान होतो, आणि ती गति कोणी नष्ट केल्याशिवाय थांबत नाहीं.

परमाणू जर सरळ मार्गानें गमन करीत असेल तर त्याच्या गमनाची दिशा सर्व मार्गांत एकच असते. परमाणूवर एकदाच एका प्रेरणेचे कार्य घडले तर त्या क्षणीं त्याला जी गति उत्पन्न होईल, व ती ज्या दिशेची असेल त्याप्रमाणेच तो परमाणू त्याच गतीनें व त्याच दिशेनें सतत गमन करील. परंतु त्यावर अन्य प्रेरणेचें कार्य घडत असेल तर आणि ते कार्य पूर्वीच्याच दिशेत घडेल तर त्या परमाणूची गति वाढेल किंवा कमी होईल परंतु दिशा भिन्न होणार नाहीं. परमाणूवर एकाच कालीं दोन प्रेरणांचीं कार्यें घडत आहेत आणि त्या दोन्ही प्रेरणांच्या दिशा भिन्न आहेत, तर त्या

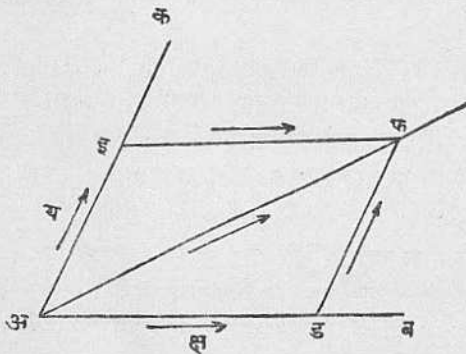
परमाणूचें गमन कोणत्या दिशेनें किती परिमाणाचें होईल हे ठरवितां येतें. प्रेरणा म्हणजे शक्ति हिच्याशी तिजपासून उत्पन्न झालेला वेग समप्रमाणांत असता, प्रेरणा आणि वेग ह्या दोहींला परिमाण आणि दिशा ह्यांची आवश्यकता असतें. दोन प्रेरणांच्या संयोगानें जी प्रेरणा उत्पन्न होते तिला त्या दोन प्रेरणांची फलित प्रेरणा म्हणतात. प्रत्येक सरळ रेषा स्वतःची लांबी आणि दिशा यांनी युक्त असते, त्या-प्रमाणेच प्रेरणा आणि वेग ही दोन्हीही महत्त्व आणि दिशा यांनी युक्त असतात. या साम्यामुळें प्रेरणा किंवा वेग ही आम्ही रेषांनीं दाखवितो.

२७६. एका परमाणूवर दोन प्रेरणा कार्य करितात, त्यांचीं कार्यें एकाच सरळ रेषेत नाहींत, कांहीं कोनानें कार्य करितात. तर त्या परमाणूचें गमन कोणत्या दिशेनें आणि किती परीमाणाचे होईल हें ठरवावयाचें.

उदाहरणार्थ, अ हा एक बिंदु आहे (परमाणूचें स्थान बिंदूनेच दाखविले जाते) ह्यावर अब अक ह्या दोन दिशांनी क्ष आणि य ह्या दोन प्रेरणा कार्य करितात. तर त्या दोन प्रेरणांचे एकत्र कार्य किती परिमाणाचें होईल, व ते कोणत्या दिशेनें होईल हें ठरवावयाचें ह्या एकत्र कार्यास फलित प्रेरणा म्हणतात.

एथें आपणाला प्रेरणेच्या कार्याचा विचार करावयाचा आहे ; प्रेरणेचें कार्य म्हणजे त्या प्रेरणेपासून उत्पन्न होणारा वेग होय, वेगाचें लेखन प्रेरणेप्रमाणेंच सरळ रेषेनें करितात. सरळ रेषेनें वेगाचें महत्त्व आणि दिशा कळतें. वेग ज्या परिमाणांचा असेल तत्परिमित रेषा परिमाणाची रेषा तो वेग दाखविण्यास घ्यावी.

क्ष आणि य ह्या वेगाचे प्रमाण ३ : २ आहे ते त्यापासून उत्पन्न होणारे वेग ३ : २ ह्याच प्रमाणात असले पाहिजेत. अ बिंदूवर ह्या दोन प्रेरणा बअक कोनाने कार्य करितात म्हणजे क्ष प्रेरणा अब दिशेने आणि य प्रेरणा अक दिशेने कार्य करिते. तेव्हां एका काल विभागात अ बिंदु अब रेषेने अड इतका जाईल आणि अक रेषेने अइ इतका जाईल अर्थात तो



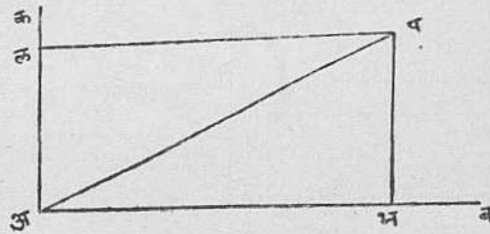
अफ दिशेनें जाईल. एथे अशी कल्पना करा कीं, क्षय ह्या दोन प्रेरणांपैकीं य प्रेरणा प्रथम स्तंभित ठेवू, तेव्हा अ बिंदु क्ष प्रेरणेनें ड स्थानी आला, नंतर क्ष प्रेरणा स्तंभित ठेवू आणि य प्रेरणेचे कार्य सुरू करू. हें कार्य अक दिशेचें असल्यामुळें

ड पासून अक दिशेशी समांतर दिशेनेच अ बिंदू जाईल आणि तो अई इतकाच जाईल. म्हणजे तो फ बिंदूत जाईल. अफ इफ बिंदु साधले तर अइ = डफ आणि अड = इफ म्हणून अइफड हा समांतर भुज चौकोन आहे, व अफ त्याचा कर्ण आहे.

जोपर्यंत प्रेरणांचे गुणोत्तर ३ : २ आहे तोपर्यंत कोणत्याहि लहान किंवा मोठ्या काल विभागांत जो समांतर भुज चौकोन होईल त्याचा कर्ण अफ च्या बाहेर पडणार नाहीं. ह्यावरून असा सिद्धांत सिद्ध होतो की, एका "बिंदुवर दोन प्रेरणा कांहीं कोनानें कार्य करीत असतील तर त्या प्रेरणांच्या दिशांत आणि त्या प्रेरणांच्या परिमाणांच्या प्रमाणांत दोन सरळ रेषा घेऊन समांतर भुज चौकोन पुरा केला असता त्याच्या कर्णाइतकी त्या दोन प्रेरणांची फलित प्रेरणा असते, व कर्णाची जी दिशा तीच त्या फलित प्रेरणेची दिशा असते." ह्या सिद्धांतांत जो समांतर भुज चौकोन वर्णिला आहे त्याला 'प्रेरणा समांतर भुज चौकोन' म्हणतात. तसेंच वरच्या समांतर भुज चौकोनाच्या सिद्धतेमध्यें अ बिंदुचें चलन अ पासून ड पर्यंत आणि ड पासून फ पर्यंत असे प्रत्येक प्रेरणेचें कार्य निरनिराळे घेतल्याने झालेल्या दोन रेषा आणि फलित प्रेरणा अफ ही तिसरी रेषा अशा तीन रेषांनी अडफ त्रिकोण बनला आहे त्याला प्रेरणा-त्रिकोण म्हणतात. प्रेरणा त्रिकोणाचा सिद्धांत असा आहे कीं, "त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकी कोणत्याही कोनाची एक बाजू ही दुसऱ्या दोन बाजूंची फलित प्रेरणा असते." वरच्या अडफ त्रिकोणांत अ कोन घेतल्यास अड आणि डफ ह्यांची फलित प्रेरणा अफ आहे ; ड कोन घेतल्यास डफ आणि फअ ह्यांची फलित प्रेरणा डअ ही आहे. किंवा डअ आणि अफ ह्यांची फलित प्रेरणा डफ आहे.

२७७. विवक्षित वेगाचें पृथःकरण एकमेकीवर लंब अशा दोन दिशांत करावयाचे. अप ही रेषा ग वेगाची दिशा आणि महत्त्व दाखविते. तो वेग अब दिशेत किती होईल, म्हणजे किती परिमाणाचा किंवा केवढ्या महत्त्वाचा होईल, आणि अब वर लंब अशा एक दिशेत किती परिमाणाचा म्हणजे किती महत्त्वाचा होईल हें ठरवावयाचें.

एथे अब ची दिशा दिलेली आहे, ती अप च्या दिशेशी पअब कोन करिते. म्हणजे पअब कोन दिलेला आहे. हा कोन ब ह्या अक्षरानें दाखवूं.



आतां आपणास अप वेगाचें पृथःकरण करावयाचें आहे म्हणजे हा वेग ज्या दोन वेगांच्या संयोगानें झालेला आहे ते दोन वेग निरनिराळे करावयाचे आहेत. आणि त्या वेगाच्या दिशा एकमेकींवर लंब असल्या पाहिजेत. त्यापैकीं एका प्रेरणेची अब दिशा ज्ञात आहे.

प्रेरणा त्रिकोणावरून आपणाला हे समजते कीं एक प्रेरणा अब दिशेंत आहे, आणि दुसरी प्रेरणा अब वर लंब असून तिची दिशा प बिंदुतून जाते, म्हणून प बिंदुपासून अब वर पम लंब काढिला तेव्हां अमप हा प्रेरणा त्रिकोण झाला. अर्थात अप ही ज्यांची फलित प्रेरणा आहे अशा त्या दोन प्रेरणा अम आणि मप ह्या होत, आणि त्या एकमेकींवर लंबही आहेत.

अप हा वेग ग अक्षरानें दाखवितों, ह्याचेंच वर पृथःकरण करून दाखविले आहे. त्यापैकीं एका पृथक भागाची दिशा अप वेगाच्या दिशेशीं बअप कोन करिते. हा कोन ब अक्षरानें दाखवितो. आतां—

$$\left.\begin{aligned} \text{अम} &= \text{अप} \times \text{कोभुब} \\ \text{अल} &= \text{अप} \times \text{कोभु (लअप)} \end{aligned}\right\} \text{त्रिकोणमिति}$$

$$\text{पण लअप कोन} = (९०^\circ - \text{ब}) \text{ कोन}$$

$$\text{कोभु (लअप)} = \text{कोभु } (९०^\circ - \text{ब}) = \text{भुब}$$

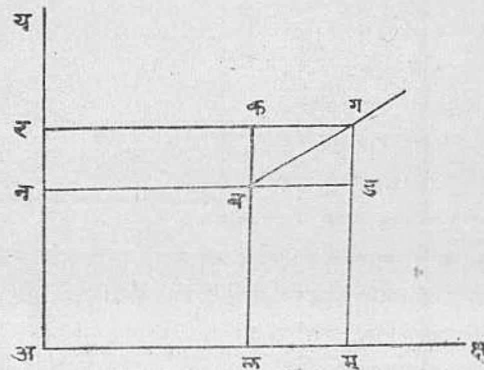
$$\text{म्हणून} \quad \text{अम} = \text{ग कोभु ब}$$

$$\text{अल} = \text{ग भु ब, किंवा ग कोभु } (९० - \text{ब})$$

ह्यावरून ठरते की, एकमेकींवर लंब असणाऱ्या दोन दिशांमध्यें विवक्षित वेगाचें पृथःकरण करावयाचे असेल तर, त्या विवक्षित वेगांच्या दिशेशीं जे कोन होतील त्या कोनाच्या कोभुजज्यांनीं त्या विवक्षित वेगास गुणावें.

२७८. विवक्षित वेगाचे पृथःकरण एकमेकींवर लंब असणाऱ्या दोन दिशांत केले असता किती परिमाणाचें होतें हे वर सांगितले आहे. त्या पृथग्वेगाचा संबंध अन्योन्य लंबभुज स्थल निर्णायिकाशीं कसा येतो याचा येथें विचार करूं.

अक्ष अय हे एकमेकावर लंब अक्ष आहेत (बैज्यभूमिति लेख १०९). बग रेषेनें ग वेग दाखवूं. ह्या वेगाचें पृथःकरण अक्ष, अय ह्या अक्षाशीं समांतर दिशांत केलें असतां सुक्ष्मांश गणित पद्धतीनें त्या पृथग्वेगांचीं स्वरूपें कशी होतात ते येथें दाखवित आहे. (बैज्य भूमितींत घ हा प्रस्थापित बिंदु आहे त्या स्थानीं येथे अ वापरला आहे.)



ब आणि ग बिंदूपासून, अक्ष अक्षावर बल गम लंब काढिले, आणि अय अक्षावर बन गर लंब काढिले. लब नब वाढविल्या.

तेव्हां वरच्या लेखाप्रमाणें बग वेगाचें पृथःकरण बड, बक रेषांच्या परिमाणाचे होईल. क्ष अक्षाशी समांतर बड आहे, य अक्षाशी समांतर बक आहे. गबड हा कोन क्ष अक्षाशी बग वेगानें केला आहे त्यास ब हे नांव देऊ तेव्हा:

लम = बड = बग × कोभु ब = ग कोभु ब (१)

नर = बक = बग × कोभु (९०° — ब) = गभुब (२)

ब बिंदूचे अन्योन्य लंब भुज (क्ष, य) हे आहेत.

क्ष = अल = नब आणि य = अन = लब.

आता बड हा नब चा म्हणजे क्ष भुजाचा अंश आहे, तसाच बक हा लब चा म्हणजे य भुजाचा अंश आहे, आणि बग हा ब बिंदूच्या चालीचा अंश आहे. बग हा चालीचा सूक्ष्मांश मानिला तर (कारण वेग हा चालीचा सूक्ष्मांश असतो) बड हा क्ष भुजाचा सूक्ष्मांश होईल आणि बक हा य भुजाचा सूक्ष्मांश होईल. तेव्हा त्रिकोणमितीच्या लक्षणावरून—

$$\text{कोभुब} = \frac{\text{बड}}{\text{बग}} = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूच}}$$

$$\text{भुब} = \frac{\text{बक}}{\text{बग}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूच}}$$

ह्या किंमती समीकरण (१) व (२) यांत ठेविल्या तेव्हां

$$\text{क्ष अक्षाच्या दिशेत वेग} = \text{ग को भु ब} = \text{ग}\,\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूच}}$$

$$\text{य अक्षाच्या दिशेत वेग} = \text{ग भुब} = \text{ग}\,\frac{\text{सूय}}{\text{सूच}}$$

परंतु वेग $= \text{ग} = \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}}$ लेख २७३, २७४.

म्हणून

$$\text{ग वेगाचें पृथःकरण अक्ष दिशेंत} = \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूच}} = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \quad (१)$$

$$\text{ग वेगाचें पृथःकरण अय दिशेंत} = \frac{\text{सूच}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूय}}{\text{सूच}} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \quad (२)$$

२७९. पदार्थाच्या गतीसंबंधानें कांहीं सिद्धांत अनुमान आणि अनुभव यांनीं सिद्ध झालेले आहेत. त्याचा उपयोग प्रत्यक्ष प्रमाणासारखा जागोजाग करावा लागतो. यासाठीं ते सिद्धांत खालीं देतो.

सिद्धांत (१) प्रत्येक परमाणु आपल्या स्थितिविषयीं उदासीन असतो. ह्यातील 'स्थितिविषयी उदासीन' या शब्दांचा अर्थ असा कीं, जी स्थिति असेल तिचा त्याग न करणें. परमाणु स्थीर असेल तर ती स्थीरता न सोडणें. तसेच परमाणु गतियुक्त असेल तर त्या गतीचाही त्याग न करणें. इतकेच नव्हे तर त्या गतींत कांहींसुद्धा फरक न करणें, म्हणजे कम जास्त न करणें आणि ज्या गतींत तो आहे त्या गतीची जी दिशा त्या दिशेतही बदल न करणें. असा स्थितिविषयी उदासीन ह्या शब्दाचा अर्थ आहे.

सिद्धांत (२) प्रेरणेनें परमाणूच्या गतींत जो फरक होते तो त्या प्रेरणेशी प्रमाणांत असतो. आणि तो फरक ती प्रेरणा ज्या दिशेनें कार्य करीत असेल त्या दिशेचा असतो.

'प्रेरणेचें प्रमाण' ह्या दोन शब्दांचा जो अर्थ आहे त्यावरून असें दिसून येतें कीं, प्रेरणेचें मापन करितां येतें. प्रेरणा हें परिमेय आहे, अर्थात हें परिमेय मापनास परिमाण पाहिजे. याचें येथें दिग्दर्शन करितों.

अवकाश.—प्रत्येक पदार्थ कांहीं तरी जागा व्यापितो, जी जागा व्यापितो तिला त्या पदार्थाचा अवकाश म्हणतात. अवकाशाचे मापन घनफूट, घनहात अशा घन-परिमाणांनीं करितात.

घनता किंवा दाढर्य.—निरनिराळे पदार्थ एक एक घनफूट घेतले तर त्यांत कांहीं पदार्थांचे परमाणु जास्त तर कांहींचें कमी असतात. यास्तव विवक्षित पदार्थाची घनता एकं मानून त्याच्याशी तुलनेने इतर पदार्थाची घनता अमुक परिमाणें असें ठरविलेले आहे.

प्रकृत्यंश.—प्रकृत्यंशाची मोजणी वजनानें होते. विवक्षित पदार्थाच्या घनतेचा एकं आणि अवकाशाचा एकं यांनी युक्त जो प्रकृत्यंशाचा भाग त्याला प्रकृत्यंशाचा एकं म्हणतात.

प्रेरणा.—प्रेरणा म्हणजे परमाणूला गतिमान करणारें कार्य. प्रेरणेचे परिमाण असें आहे कीं, कालाच्या ठराविक अशा एकं परिमाणांत, प्रकृत्यंशाच्या एकं परिमित पदार्थास, अंतराचा एकं इतके चलन जी प्रेरणा देईल त्याला प्रेरणेचा एकं म्हणावें.

प्रत्येक प्रेरणा, नेहमीं तिच्याशी समान आणि विरुद्ध अशा प्रेरणेचा प्रतिकार करणारी असते. (एथे प्रेरणा हा शब्द तिच्या कार्याच्या अर्थि योजिला आहे.)

परमाणूचें वक्ररेषेनें गमन

२८०. एक परमाणु सरळ रेषेनें स्थीर अथवा चल वेगानें गमन करीत आहे. याप्रमाणें गमन करीत असतां एकदम त्याला आकर्षण करणारा पदार्थ, त्याच्या गमनाची जी सरळ रेषा आहे तिला सोडून तिच्या बाहेर उत्पन्न झाला तर त्या पदार्थाची प्रेरणा त्या परमाणूवर कार्य करू लागेल. पण ह्या कार्यानें त्या परमाणूची जी सरळ

रेखेनें जाण्याची क्रिया ती सोडावी लागून प्रतिक्षणीं त्या आकर्षक पदार्थाकडे जाण्याची क्रिया करावी लागेल. ही क्रिया प्रतिक्षणीं घडत असल्यामुळें त्या परमाणूस गमनाचा सरळ रेषात्मक मार्ग सोडून वक्ररेषेनें गमन करावें लागतें. त्या आकर्षक पदार्थाच्या प्रेरणेचें कार्य, आकर्षक पदार्थ आणि गमन करणारा परमाणू यांमधील अंतर सतत सारखें राहील असें असेल तर त्या परमाणूचा गमन मार्ग वर्तुळाकार होईल. आकर्षक पदार्थाच्या प्रेरणेची दिशा आणि गमन करणाऱ्या परमाणूची दिशा, परमाणूच्या स्थान-भेदें करून भिन्न भिन्न होऊं शकतात. त्यामुळें प्रेरणेचें कार्य भिन्न भिन्न होऊ शकतें, दोन्ही दिशांमध्यें काटकोन असून तो सतत राहणारा असेल तर गमन मार्ग वर्तुळ होतो, तिर्यक्कोण असेल तर गमनमार्ग निरनिराळ्या वक्ररेषांचे होतात. ह्या वक्र-रेषात्मक गमन मार्गाचा विचार आपणाला करावयाचा आहे.

२८१. एक बिंदु एका पातळीत वक्ररेषेनें गमन करीत आहे, त्याच्या विवक्षित क्षणींच्या वेगाचें पृथःकरण चलत्रिज्या आणि तिजवर लंब अशा दोन दिशांत करावयाचें.

तपन हा एका परमाणूचा वक्ररेषात्मक गमन मार्ग आहे. त्यांत प हा परमाणू आहे, प परमाणु म्हणजे बिंदु आहे, प बिंदूचें (क्ष, य) हे भुज कोटि आहेत, अक्ष आणि अय हे त्या भुज कोटीचे अक्ष आहेत. हे अक्ष असे स्वीकारले आहेत कीं, अक्ष अय ह्या अक्षांचा प्रस्थापित बिंदु अ आहे तो असा ठरविला आहे कीं, प परमाणूवर जी आकर्षक प्रेरणा आहे त्या प्रेरणेचें कार्य अ बिंदूतून घडत आहे. अर्थात अप ही प परमाणूच्या तपन ह्या वक्ररेषात्मक गमन मार्गाची चलत्रिज्या आहे. ती र अक्षरानें दाखविली आहे. पअ चलत्रिज्येनें अक्ष अक्षाशी प अक्ष = ब कोन केला आहे. पअ चलत्रिज्या म्हणजे र, आणि ब कोन ही प बिंदूची अक्षीय निर्णायकें आहेत आणि अक्ष रेषा हाच त्या निर्णायकाचा अक्ष आहे. प बिंदूपासून अक्षवर पम लंब केला. तेव्हां

$$\text{क्ष} = \text{अम आणि य} = \text{पम}$$

तसेंच

$$\text{क्ष} = \text{र कोभुब}$$

$$\text{य} = \text{र भुब}$$

ह्या प्रमाणें अन्योन्य लंब भुज निर्णायकें (क्ष, य) आणि अक्षीय निर्णायकें (र, ब) यांचा अन्योन्य संबंध पूर्वी ठरविला आहे.

विवक्षित कालाच्या क्षणीं प चा वेग ग आहे.

विवक्षित ग वेगाचें पृथःकरण अन्योन्य लंब भुजांशी समांतर दिशांत कशा स्वरूपांत येतें तें लेख २७८ मध्यें दाखविलें आहे, ती दोन्ही समीकरणें खालीं लिहिली आहेत :—

$$\text{ग वेगाचें पृथःकरण अक्ष दिशेंत} = \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{ग वेगाचें पृथःकरण अय दिशेंत} = \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots (२)$$

ही पृथःकरणें लंबभुज क्ष य यांच्या दिशेंतली आहेत तीं त्याच दिशेंत पण (र, ब) च्या स्वरूपाचीं करूं. काल हें विकारीपद जसे क्ष य ह्या संचयाचें आहे तसे ते र, ब चेही आहे. आणि

$$\text{क्ष} = \text{अम} = \text{र कोभुब} \cdots\cdots\cdots (१)$$
$$\text{य} = \text{पम} = \text{र भुब} \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

ह्या दोन्ही समीकरणांचे कालानुवर्ती सूक्ष्मांशगुण काढिले. ते असे— र आणि ब हे दोन्ही कालांचे संचय आहेत. म्हणजे कालाच्या एकं परिमाणांत जो वेग त्याचे संचय आहेत.

दोन संचयांच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण लेख २०१ (४) मध्यें जी रीति लिहिली आहे त्याप्रमाणें काढितां येतो. ती रीति अशी—

दोन संचयांच्या गुणाकाराचा सूक्ष्मांशगुण हा, प्रत्येक संचयाच्या सूक्ष्मांश गुणास तदितर संचयानें गुणून जे गुणाकार येतील त्या गुणाकारांच्या बेरजेबरोबर असतो.

ह्या रीतीप्रमाणें क्ष चा सूक्ष्मांशगुण हा, क्ष = र × कोभुब आहे म्हणून र च्या सूक्ष्मांशगुणास कोभुबनें गुणावयाचे आणि कोभुबच्या सूक्ष्मांश गुणास र नें गुणावयाचे व दोन्ही गुणाकारांची बेरीज करावयाची.

$$\frac{\text{सू (कोभुब)}}{\text{सूब}} = -\ \text{भुब, ह्यातील ब कचा संचय आहे,}$$

म्हणून

$$\frac{\text{सू (कोभुब)}}{\text{सूक}} = \frac{\text{सू (कोभुब)}}{\text{सूब}} \times \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = -\ \text{भुब}\ \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

आणि

$$\text{र} \times \frac{\text{सू (कोभुब)}}{\text{सूक}} = -\ \text{रभुब}\ \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

तेव्हां

$$\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} = \text{कोभुब}\ \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} - \text{रभुब}\ \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots (३)$$

तसेच

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} = \text{भुब}\ \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{र कोभुब}\ \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots (४)$$

२८२. प बिंदूच्या वेगाचें पृथःकरण अक्षीय निर्णायकाच्या किंमतीनें निघालें आहे. पण तें पृथक वेग अक्ष अय यांच्या दिशांतील म्हणजे त्या दिशांशीं समांतर दिशांतील आहेत, ते आपणास चलत्रिज्येच्या दिशेतील व तिजवर लंब असलेल्या दिशांतील आणावयाचे आहेत. वेगाचें एकमेकीवर लंब दिशेंत पृथःकरण करावयाचें असतां त्या वेगास पृथग्भूत दिशांच्या कोनांच्या कोभुजज्येनें गुणिल्यानें पृथःकरण होतें. चलत्रिज्येची दिशा क्ष अक्षाशी ब अंशाचा किंवा ब वृत्तपरिमाणाचा कोन करिते आणि चलत्रिज्येवर लंब दिशा म्हणजे अई दिशा क्षअई कोन करिते म्हणजे (९०° + ब) एवढा कोन करिते यांच्या कोभुज्येनें अक्ष दिशेतील वेगास गुणिलें म्हणजे त्याचें पृथःकरण चलत्रिज्येच्या दिशेत आणि तिजवर लंब अशा दिशेत होईल. अक्ष दिशेतील वेग $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$ हा आहे, लेख २८१ समीकरण (१). तेव्हां

$$\text{चलत्रिज्येशी समांतर दिशेंत वेग} = \text{कोभुब}\ \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \quad \cdots\cdots (५)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेंत वेग} = -\ \text{भुब}\ \frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \quad \cdots\cdots (६)$$

२८३. वर क्ष अक्षाशीं समांतर असलेल्या वेगाचें इष्ट दिशांत पृथःकरण केलें त्याप्रमाणेंच य अक्षाशीं समांतर असलेल्या वेगाचें त्याच दिशेंत पृथःकरण करावयाचे आहे. यास्तव त्या इष्ट दिशा य अक्षाशीं जे कोन करतील त्यांच्या कोभुजज्यांनीं $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ या वेगास गुणावयाचे. य अक्षाची दिशा अय ही चलत्रिज्येशी पअय कोन करिते म्हणजे (९०° — ब) कोन करिते, या कोनाची कोभुजज्या म्हणजे ब कोनाची भुजज्या होय. म्हणून भुब $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ हा चलत्रिज्येशीं समांतर असा अय दिशेतील वेगाचा पृथग्भूत भाग होय. चलत्रिज्येवर लंब दिशा अई ही अय अक्षाशी ईअय कोन करिते, पण हा कोन ब कोनाबरोबर आहे. म्हणून कोभुब $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ हा चलत्रिज्येवर लंब असणाऱ्या दिशेतील $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ ह्या वेगाचा पृथग्भूत भाग आहे. म्हणजे

$$\text{चलत्रिज्येशी समांतर दिशेंत वेग} = \text{भुब}\ \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \quad \cdots (७)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेंत वेग} = \text{कोभुब}\ \frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \quad \cdots (८)$$

वरच्या लेखातील समीकरण (५) व (६) ह्या समीकरणांत क्ष अक्षाशी समांतर अशा वेगाचे पृथग्भाग ते समीकरण (७) व (८) ह्यांतील य अक्षाशीं समांतर अशा पृथग्भागांत अनुक्रमें मिळविले तेव्हां

$$\text{चलत्रिज्येशी समांतर वेग} = \text{कोभुब}\,\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} + \text{भुब}\,\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots (९)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेंत वेग} = -\,\text{भुब}\,\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} + \text{कोभुब}\,\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} \cdots (१०)$$

ह्या समीकरणांत जी $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$ आणि $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ ही दोन पदें आहेत, त्यांच्या जागीं त्यांच्या-बरोबर असलेल्या किंमती समीकरण (३) व (४) मध्यें तयार केल्या आहेत त्या ठेवू. त्याची योजना अशी,

$$\text{कोभुब}\,\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} = \text{कोभु}^{2}\text{ब}\,\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} - \text{रभुब कोभुब}\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

$$\text{भुब}\,\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} = \text{भु}^{2}\text{ब}\,\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{रभुब कोभुब}\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

समीकरण (९) मध्यें ह्या दोन समीकरणांची बेरीज आहे.

$$\text{चलत्रिज्येशीं समांतर वेग} = (\text{कोभु}^{2}\text{ब} + \text{भु}^{2}\text{ब}) \times \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}}$$

$$= \frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots (११)$$

आणि

$$-\,\text{भुब}\,\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} = -\,\text{भुब कोभुब}\,\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{रभु}^{2}\text{ब}\,\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$$

$$\text{कोभुब}\,\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} = \text{भुब कोभुब}\,\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{रकोभु}^{2}\text{ब}\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

समीकरण (१०) मध्यें ह्या दोन समीकरणांची बेरीज आहे. म्हणून

$$\text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेंत वेग} = \text{र}\,(\text{भु}^{2}\text{ब} + \text{कोभु}^{2}\text{ब})\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

$$= \text{र}\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots (१२)$$

बेरजेत ($\text{भु}^{2}\text{ब} + \text{कोभु}^{2}\text{ब}$) हें पद उत्पन्न होतें पण त्याची किंमत १ असते.

२८४. जो वेग प्रतिक्षणीं बदलत असतो त्याला चल वेग म्हटलें आहे. चल वेग प्रतिक्षणीं वाढत असेल किंवा कमी होत असेल, त्या वाढीला किंवा क्षयाला आपण वेगवृद्धि असें एकच नांव देऊ. ज्यावेळीं वेगवृद्धीनें वेग वाढत असेल, तेव्हां ती वेगवृद्धि धन आहे असें म्हणून ती + ह्या चिन्हानें दाखवू, आणि ज्यावेळीं वेगवृद्धीनें वेग

कमी होत असेल, तेव्हां ती वेगवृद्धि ऋण आहे असें म्हणू आणि ती — ह्या चिन्हानें दाखवू. वेगवृद्धि दाखविण्यास ध हें चिन्हाक्षर योजू.

२८५. विवक्षित क कालाच्या अंत्यक्षणीं एका परमाणुला ग हा वेग होता, हा काल अल्पांशानें वाढवून क $+$ Δ क झाला तर वेगही Δ ग ह्या अल्पांशानें वाढेल म्हणजे तो ग $+$ Δ ग हा होईल. Δ क ह्या काल विभागाच्या आरंभीं वेगवृद्धि $ध_१$ परिमाणाची होती व त्याच काल विभागाच्या अंतीं वेगवृद्धि $ध_२$ होती असे घेऊ. ह्यावरून Δ क ह्या काल विभागातील कोणत्याही क्षणीची वेगवृद्धि $ध_१$ पेक्षां कमी नसून जास्त होती आणि $ध_२$ पेक्षां जास्त नसून कमी होती, अशीच असली पाहिजे. ती ध आहे असें घ्या. Δ क ह्या काल विभागात वेग ग चा ग $+$ Δ ग झाला, म्हणजे वाढ Δ ग झाली, ही वाढ वेगवृद्धि Δ क $\times$ $ध_१$ ह्या-पेक्षां कमी नाहीं, आणि Δक $\times$ $ध_२$ ह्यापेक्षां जास्तही नाहीं. म्हणजेच Δग ही वेगवृद्धि Δक $\times$ $ध_१$ पेक्षां कमी नाहीं, आणि Δक $\times$ $ध_२$ पेक्षां जास्त नाहीं.
$\frac{\Delta ग}{\Delta क}$ हे गुणोत्तर $ध_१$ " " " " $ध_२$ " " "

आता Δक हा काल विभाग अत्यंत सूक्ष्म मानिला तर तो कालाचा सूक्ष्मांश होईल आणि Δग हा वेगाचा सूक्ष्मांश होईल तेव्हां $\frac{\Delta ग}{\Delta क} = \frac{सूग}{सूक}$ होईल, आणि $ध_१$ व $ध_२$ ह्या वेगवृद्धि समान होतील, अर्थात त्यांच्या मध्यवर्ती असलेली वेगवृद्धि ध ही सुद्धां $ध_१$ व $ध_२$ यांच्याबरोबर होईल. म्हणून

$$\frac{सूग}{सूक} = ध \cdots\cdots\cdots\cdots (१३)$$

कालाच्या वाढीनें वेग वाढत असेल तर ध चें चिन्ह $+$ (धन) होईल, आणि कालाच्या वाढीने वेग कमी होत असेल तर ध चें चिन्ह (ऋण) — होईल.

२८६. पूर्वी सिद्ध केले आहे कीं, वेग हा, चालीच्या सूक्ष्मांशाचे कालाच्या सूक्ष्मांशाशी होणाऱ्या सूक्ष्मांश गुणोत्तराबरोबर असतो. लेख २७४ पहा. म्हणजे

$$\frac{सूच}{सूक} = ग$$

ह्या समीकरणाचे दोन्ही पेटचांचे शून्यलब्धिगुण म्हणजे सूक्ष्मांशगुण केले तर

$$\frac{सू^२च}{सूक^२} = \frac{सूग}{सूक}$$

पण $\frac{सूग}{सूक}$ $=$ ध असे सिद्ध केले आहे. म्हणून

$$\frac{सू^२च}{सूक^२} = ध \cdots\cdots\cdots\cdots (१४)$$

२८७. एक परमाणु एकाच पातळीत असलेल्या वक्ररेषात्मक मार्गानें गमन करीत आहे, आणि त्याचा वेग चल आहे, तर त्याच्या वेगवृद्धीचें पृथःकरण चल-त्रिज्येच्या दिशेंत आणि चलत्रिज्येवर लंब असणाऱ्या दिशेंत, अर्थात त्या दिशांशीं समांतर असणाऱ्या दिशांत करावयाचें.

विवक्षित क्षणीं तो परमाणु ज्या बिंदूंत आहे त्या बिंदूचीं अन्योन्य लंबभुज निर्णायकें (क्ष, य) आहेत, आणि अक्षीय निर्णायकें (र, ब) ही आहेत. यांचा एकमेकाशी जो संबंध आहे तो अनेक वेळा दाखविलेला आहे. लेख २८१ पहा, आणि त्याच लेखातील आकृति पहा.

वेगाचें कालानुवर्ती जे सुक्ष्मांशगुणोत्तर असेल तीच वेगवृद्धि असते. असे वर सिद्ध केले आहे. क्ष अक्षाशी समांतर वेग $\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$ या वेगाबरोबर असतो. आणि वेगवृद्धि $\frac{\text{सू}^2\text{क्ष}}{\text{सूक}^2}$ या बरोबर असते. ह्याप्रमाणेच य अक्षाशी समांतर वेग $\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}}$ ह्या बरोबर असतो, म्हणून य अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि $\frac{\text{सू}^2\text{य}}{\text{सूक}^2}$ या बरोबर असते.

$$\text{क्ष अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सू}^2\text{क्ष}}{\text{सूक}^2} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{अ})$$

$$\text{य अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सू}^2\text{य}}{\text{सूक}^2} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{ब})$$

ह्यापैकी (अ) वेगवृद्धीला कोभुब ने आणि (ब) वेगवृद्धीला भुब ने गुणून दोन्ही गुणाकारांची बेरीज केली म्हणजे चलत्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि होईल, आणि (अ) वेगवृद्धीला —भुबनें गुणून आणि (ब) वेगवृद्धीला कोभुब ने गुणून दोन्ही गुणाकारांची बेरीज केली म्हणजे चलत्रिज्येवर लंब रूप अशा दिशेत वेगवृद्धि येईल. म्हणजे

$$\text{चलत्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि} = \text{कोभुब}\,\frac{\text{सू}^2\text{क्ष}}{\text{सूक}^2} + \text{भुब}\,\frac{\text{सू}^2\text{य}}{\text{सूक}^2} \quad \cdots (१५)$$

$$\text{चलत्रिज्येवर लंब दिशेत वेगवृद्धि} = \text{कोभुब}\,\frac{\text{सू}^2\text{य}}{\text{सूक}^2} - \text{भुब}\,\frac{\text{सू}^2\text{क्ष}}{\text{सूक}^2} \quad \cdots (१६)$$

२८८. वरच्या वेगवृद्धि अन्योन्य लंब भुजांच्या किंमतीनें निघाल्या आहेत परंतु त्या आपणाला अक्षीय निर्णायकांच्या किंमतीनें पाहिजे आहेत. त्या पुढील कृतीनें तयार होतात. लेख २८१ मधील समीकरण (३) वरून ते समीकरण असे

$$\frac{सूक्ष}{सूक} = \frac{सूर}{सूक} कोभुब - रभुब \frac{सूब}{सूक}$$

ह्या समीकरणाचे दोन्ही पेटयांचे कालानुवर्ती सूक्ष्मांशगुण काढिले, हा सूक्ष्मांशगुण काढावयाचा असता उजव्या पेटयात जास्त पदें उत्पन्न होतात म्हणून अनेक भाग करूं

$$\frac{सू}{सूक}\left(\frac{सूर}{सूक} कोभुब\right) = \frac{सू२र}{सूक^२} कोभुब + \frac{सूर}{सूक} \cdot \frac{सू}{सूक}(कोभुब)$$

$$= \frac{सू२र}{सूक^२} कोभुब - \frac{सूर}{सूक} भुब \frac{सूब}{सूक} \cdots\cdots (१७)$$

$$\frac{सू}{सूक}\left(- रभुब \frac{सूब}{सूक}\right) = - \frac{सूर}{सूक} भुब \frac{सूब}{सूक} - र \frac{सूब}{सूक} कोभुब \frac{सूब}{सूक}$$

$$- रभुब \frac{सू२ब}{सूक^२} \cdots\cdots (१८)$$

ह्यामधील उजवीकडच्या पदांची बेरीज डावीकडच्या दोन्ही पदांच्या बेरजेबरोबर म्हणजे $\frac{सू२क्ष}{सूक^२}$ ह्याबरोबर आहे म्हणून

$$\frac{सू२क}{सूक^२} = \frac{सू२र}{सूक^२} कोभुब - \frac{सूर}{सूक} भुब \frac{सूब}{सूक} - \frac{सूर}{सूक} भुब \frac{सूब}{सूक}$$

$$- रकोभुब \left(\frac{सूब}{सूक} \times \frac{सूब}{सूक}\right) - रभुब \frac{सू२ब}{सूक^२}$$

$$= \left\{\frac{सू२र}{सूक^२} - र\left(\frac{सूब}{सूक}\right)^२\right\} कोभुब$$

$$- \left(२\frac{सूर}{सूक} \cdot \frac{सूब}{सूक} + र\frac{सू२ब}{सूक^२}\right) भुब \cdots\cdots\cdots (१९)$$

लेख २८१ मधील समीकरण (४) वरून. तें समीकरण असें--

$$\frac{सूय}{सूक} = भुब \frac{सूर}{सूक} + र कोभुब \frac{सूब}{सूक}$$

$$\frac{सू२य}{सूक^२} = \frac{सू}{सूक}\left(\frac{सूर}{सूक} भुब\right) + \frac{सू}{सूक}\left(रकोभुब \frac{सूब}{सूक}\right) \cdot$$

उजवीकडच्या दोन पदांपैकी प्रत्येक घेऊन त्याचें सूक्ष्मांशगुण करूं

$$\frac{सु}{सूक}\left(\frac{सूर}{सूक}भुब\right) = \frac{सू^२र}{सूक^२}भुब + \frac{सूर}{सूक}कोभुब\frac{सूब}{सूक} \cdots\cdots$$

$$\frac{सु}{सूक}\left(रकोभुब\frac{सूब}{सूक}\right) = \frac{सूर}{सूक}कोभुब\frac{सूब}{सूक} - र\frac{सूब}{सूक}भुब\frac{सूब}{सूक}$$

$$+ र कोभुब\frac{सू^२ब}{सूक^२} \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{सू^२य}{सूक^२} = \frac{सू^२र}{सूक^२}भुब - रभुब\frac{सूब}{सूक}\times\frac{सूब}{सूक}$$

$$+\frac{सूर}{सूक}कोभुब\frac{सूब}{सूक} + \frac{सूर}{सूक}कोभुब\frac{सूब}{सूक} + रकोभुब\frac{सू^२ब}{सूक^२}$$

$$= \left\{\frac{सू^२र}{सूक^२} - र\left(\frac{सूब}{सूक}\right)^२\right\}भुब$$

$$+\left(२\frac{सूर}{सूक}\cdot\frac{सूब}{सूक} + र\frac{सू^२ब}{सूक^२}\right) कोभुब \cdots\cdots\cdots(२०)$$

समीकरण (१९) हें कोभुब नें गुणिलें, आणि समीकरण (२०) हे भुब नें गुणिले आणि गुणाकारांची बेरीज केली म्हणजे चलत्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि येईल; तसेच समीकरण (१९) हें—भुब नें गुणून (२०) हें कोभुब ने गुणिलें आणि गुणाकारांची बेरीज केली तर चलत्रिज्येवर लंब दिशेत, किंवा त्या दिशांच्या समांतर दिशांत वेगवृद्धि येईल. बेरजेमध्ये ($भु^२ब + कोभु^२ब$) हें पद उत्पन्न होईल, पण त्याची किंमत १ ह्या संख्येबरोबर असते. म्हणून

$$चलत्रिज्येशी\ समांतर\ वेगवृद्धि = \frac{सू^२र}{सूक^२} - र\left(\frac{सूब}{सूक}\right)^२ \cdots\cdots(२१)$$

$$चलत्रिज्येवर\ लंब\ वेगवृद्धि = २\frac{सूर}{सूक}\cdot\frac{सूब}{सूक} + र\frac{सू^२ब}{सूक^२} \cdots\cdots(२२)$$

$$= \frac{१}{र}\left(२र\frac{सूर}{सूक}\cdot\frac{सूब}{सूक} + र^२\frac{सू^२ब}{सूक^२}\right)$$

$$= \frac{१}{र}\frac{सु}{सूक}\left(र^२\frac{सूब}{सूक}\right) \cdots\cdots\cdots(२३)$$

प्रकरण दहावें

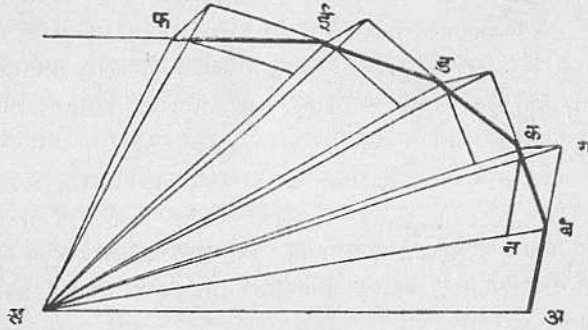
ग्रहकक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणें, आणि कक्षेसंबंधी पदांचा अन्योन्य संबंध

२८९. एक परमाणू सरळरेषेने गमन करीत असतां प्रतिक्षणीं त्यावर दुसऱ्या एकाद्या पदार्थाचें कांहीं आकर्षण घडत असेल तर म्हणजे तो दुसरा पदार्थ त्या परमाणूला आपणाकडे ओढीत असेल तर, तो परमाणू प्रतिक्षणीं आपल्या गमनाची दिशा आकर्षणाच्या प्रमाणांत सोडील, आणि ह्याप्रमाणें प्रतिक्षणीं दिशा सोडल्यामुळें त्या परमाणूच्या गमनाचा मार्ग वक्ररेषात्मक होईल, ह्या वक्ररेषेला त्या परमाणूची कक्षा म्हणतात. एथे परमाणू शब्द पदार्थाच्या गुरुत्वमध्याला अनुलक्षून आहे हें लक्षात असावें. ही वक्ररेषा म्हणजे ग्रहाची कक्षा कशा प्रकारची होईल, हें पुढे सिद्ध करितां येतें. परमाणूचा स्वतःचा वेग (पूर्वी प्राप्त झालेला) आणि आकर्षणाचें कार्य यांच्या संस्थितिप्रमाणें त्याची कक्षा निरनिराळ्या आकाराची होते. सूर्यासभोवती भ्रमण करणारे ग्रह आणि त्या ग्रहांसभोवती फिरणारे उपग्रह यांच्या कक्षा दीर्घ वर्तुळाकृति आहेत. यास्तव ह्या ग्रंथांत दीर्घ वर्तुळ कक्षेचाच विचार केला आहे.

२९०. ग्रहांच्या कक्षेसंबंधीं पदें खालीं लिहिल्याप्रमाणें आहेत. ग्रहाची कक्षा निर्माण करणारें आकर्षण, पूर्ण कक्षा भ्रमण करण्यास लागणारा काल, म्हणजे प्रदक्षिणा-काल, ग्रहाची चलत्रिज्या, ग्रहाची आरंभस्थानीय त्रिज्या (हिला आपण आरंभ त्रिज्या म्हणूं) ग्रहाची मंदोच्चीय त्रिज्या, केंद्र संन्निधानी त्रिज्या (ह्यापैकी मंदोच्चीय त्रिज्या सर्वात मोठी असते व केंद्र संन्निधानी त्रिज्या सर्वात लहान असते.) चल-त्रिज्यानिर्मित कोन, हा कोन आरंभ त्रिज्या आणि चलत्रिज्या यामध्यें केंद्रस्थानीं असतो. चलत्रिज्यानिर्मित क्षेत्र, हें क्षेत्र आरंभ त्रिज्या व चलत्रिज्या यांमधील कक्षा मर्यादित क्षेत्राचा भाग, किंवा कोणत्याही दोन त्रिज्या यांमधील कक्षांतरगत क्षेत्राचा भाग, या बरोबर असते. मध्यमत्रिज्या, किंवा ग्रहाचे मध्यमांतर, हे महत्तम त्रिज्या व लघुत्तम त्रिज्या यांच्या बेरजेच्या अर्धाबरोबर असतें, केंद्रगभुज ग्रहाची मध्यमगति, कक्षेची केंद्रच्युति वगैरे वगैरे पदें आहेत. ह्यांचे अन्योन्य संबंध ह्या प्रकरणांत सिद्ध करावयाचे आहेत.

२९१. एक परमाणू एका बिंदूपासून घडत असलेल्या आकर्षणानें वक्ररेषेनें गमन करीत असेल, तर आकर्षक बिंदूपासून गेलेली जी चलत्रिज्या ती, समान कालांत समान क्षेत्रें आक्रमिते. अर्थात ती चलत्रिज्या जीं क्षेत्रें क्रमितें तीं क्षेत्रें, ज्या कालांत उत्पन्न झाली असतील, त्या कालांशीं समप्रमाणांत असतात असें सिद्ध करावयाचे.

तो परमाणू एका काल विभागाच्या आरंभक्षणीं अ स्थानीं आहे आणि त्यावर स ह्या बिंदूपासून कांहीं परिमाणाचें आकर्षण सतत घडत आहे. ह्या काल विभागाचे कांहीं समान भाग केले, त्यापैकीं पहिल्या भागांत तो परमाणू अ पासून ब पर्यंत गेला असें माना. दुसऱ्या भागात, जर त्यावर कांहीं आकर्षण नसते तर तो परमाणू अब दिशेनेच ग बिंदूपर्यंत गेला असता, आणि अ ब रेषेबरोबर ब ग रेषा झाली असती



कारण बाह्य कारणाशिवाय जड पदार्थ आपली स्थिति बदलीत नाहींत. (लेख २७९, सि. १.) पण कालाच्या ह्या दुसऱ्या भागांत त्यावर स बिंदूपासून ब न रेषे इतकें आकर्षण घडलें. यास्तव त्या परमाणूवर दोन प्रेरणा बन बग ह्या लागू झाल्या, म्हणून तो बन कग ह्या समांतरभुज चौकोनाच्या ब क कर्णाच्या दिशेनें क पर्यंत जाईल. [प्रेरणा समांतरभुज चौकोनाचा सिद्धांत लेख २७६] तेव्हां अस व बस ह्या चलत्रिज्यांमधील क्षेत्र अ स ब त्रिकोण, बस व कस ह्या चलत्रिज्यांमधील ब स क त्रिकोणाबरोबर होईल असें सिद्ध करावयाचे

अब = बग [वर सिद्ध केलेले. २७९ सि. १]

म्हणून असब त्रिकोण = बसग त्रिकोण

पण सब कग ह्या रेषा समांतर आहेत.

म्हणून बसग त्रिकोण = बसक त्रिकोण = असब त्रिकोण.

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल कीं, असब त्रिकोणाबरोबरच कसड त्रिकोण आहे, आणि डसई व ईसक हेही असब त्रिकोणाबरोबर आहेत, आणि ते समान काल विभागांत चलत्रिज्येनें आक्रमिलेली क्षेत्रें आहेत.

आता कालाच्या समान भागांची संख्या अमर्याद वाढविली तर, त्रिकोणांची संख्याही अमर्याद होईल, आणि प्रत्येक त्रिकोणाची स बिंदूसमोरची बाजू अत्यंत सूक्ष्म होईल. आणि अ ब क ड ई फ हा मार्ग वक्ररेषात्मक होईल. ह्यावरून चलत्रिज्या समान कालांत समान क्षेत्रें आक्रमितें हा सिद्धांत सिद्ध आहे.

२९२. क्षेत्राच्या सूक्ष्मांशाचें कालाच्या सूक्ष्मांशाशी नियमित एकच असते.

$क_1$ $क_2$ हे दोन काल विभाग आहेत, ह्या काल विभागात चलत्रिज्येनें आक्रमिलेलीं क्षेत्रें, अनुक्रमें $क्ष_1$, $क्ष_2$ ही आहेत. तेव्हां वरच्या सिद्धांताप्रमाणें :

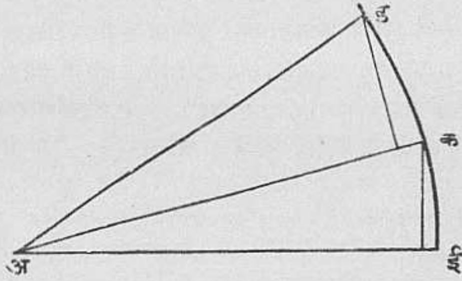
$$क_1 : क_2 = क्ष_1 : क्ष_2$$

किंवा

$$क्ष_2 \times क_1 = क_2 \times क्ष_1$$

$क्ष_1$, $क्ष_2$ ही क्षेत्रें वरच्या लेखांत जे असब, बसग त्रिकोण आहेत त्यांची आहेत किंवा त्यांच्या पटीची किंवा हिश्शाची आहेत. त्यापैकी $क_1$ हा कालाचा एकं मानिला आणि $क्ष_1$ हा क्षेत्राचा एकं मानिला, पण कालाचा एकं $क_1$ हा कालाचा सूक्ष्मांश असा अत्यंत सूक्ष्म मानिला आहे. आणि ह्या एकं परिमाण कालांत चलत्रिज्येनें आक्रमिलेलें क्षेत्र $\frac{1}{2}$ ज ह्या अक्षरानें दाखविले हा क्षेत्राचा एकं मानिला आहे.

२९३. दोन त्रिकोणांचे पाये समान आहेत आणि पायांच्या एका टोकात संपणाऱ्या बाजू समान आहेत. तर त्या त्रिकोणांचीं क्षेत्रें पायाच्या त्याच टोकाशीं असलेल्या कोनाच्या भुजज्येशीं प्रमाणांत असतात.



(आकृतिमध्यें ईक आणि कड ह्या वक्ररेषा आहेत त्या ठिकाणीं ईक, कड हे बिंदु सांधून सरळ रेषा आहेत असे घ्या.)

अईक आणि अकड हे दोन त्रिकोण आहेत, पहिल्याच्या अई, अक ह्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या अक, अड बाजूंशी अनुक्रमे समान आहेत, तर

अईक त्रिकोणाचें क्षेत्र : अकड त्रि. क्षेत्र : : भुकअई : भुडअक असें सिद्ध करावयाचे

$$अईक त्रि. क्षे. = \frac{1}{2} अई \times अक \times भुकअई$$

$$अकड त्रि. क्षे. = \frac{1}{2} अक \times अड \times भुडअक$$

बाजू बरोबर आहेत म्हणून

$$अईक त्रि. क्षे. : अकड त्रि. क्षे. :: भुकअई : भुडअक.$$

उपसिद्धांत.—अकई त्रिकोणाचा क बिंदु ई बिंदूशी मिळाला तर कअई कोन अत्यंत सूक्ष्म होईल, आणि हा सूक्ष्म कोन कालाच्या सूक्ष्मांशातच निर्माण होईल. (एथे क बिंदु ई बिंदूपासून ड कडे गमन करीत आहे अशी कल्पना आहे. अर्थात सूक्ष्म अशा कालांत क बिंदूचें गमन सूक्ष्म आणि त्यामुळें कोनही (ईअक हा) सूक्ष्मच होईल. तेव्हां अईक त्रि. क्षेत्र $= \frac{1}{2}$ अई $\times$ अक मुईअक.

अईक त्रिकोणाचें क्षेत्र अ नें दाखवू. अई $=$ अक $=$ र मानू. ईअक कोन ब नें दाखवूं.

तेव्हां

$$\frac{\text{सूअ}}{\text{सूक}} = \frac{1}{2} \text{र}^2 \frac{\text{सूअ}}{\text{सूक}} \cdots\cdots\cdots$$

$\frac{\text{सूअ}}{\text{सूक}}$ हा आपण क्षेत्राचा एकं मानू व त्यास $\frac{1}{2}$ ज म्हणूं

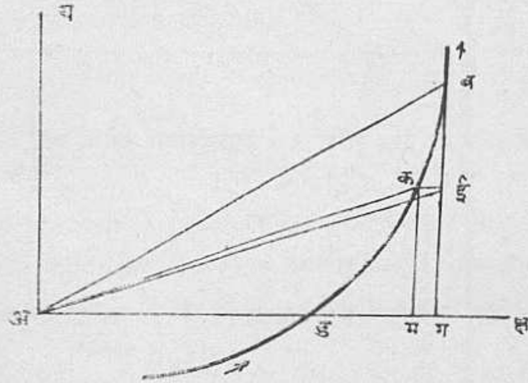
तेव्हा

$$\text{ज} = \text{र}^2 \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

२९४. कालाच्या सूक्ष्म अशा एकं परिमाणांत परमाणू गमनाच्या चलत्रिज्येनें आक्रमिलेलें क्षेत्र $\frac{1}{2}$ ज ह्याचा कक्षेच्या इतर पदांशीं संबंध.

गमन करणाऱ्या परमाणूचें अन्योन्य लंब भुजाशी $\frac{1}{2}$ ज चा संबंध.

अक्ष अय हे अन्योन्य लंब भुजाचे अक्ष आहेत. गमन करणारा परमाणू क कालाच्या अंतीं क ठिकाणीं आहे त्यावेळीं त्याचे भुज (क्ष, य) आहेत. $\triangle$क हा एक काल विभाग आहे. ह्या काल विभागांत तो परमाणू क पासून ब पर्यंत जातो. ब स्थानीं त्याचे भुज $\{$ (क्ष $+ \triangle$ क्ष) (य $+ \triangle$ य) $\}$ हे होतात. $\triangle$ क ह्या काल विभागांत चलत्रिज्येनें आक्रमिलेलें क्षेत्र अबक हे आहे. हा अबक त्रिकोण क्षेत्र शद्वानेंच दाखवितो आणि कालाच्या सूक्ष्म अशा एकं परिमाणात आक्रमिलेले क्षेत्र $\frac{1}{2}$ ज नें दाखवितो.



$\frac{1}{2}$ ज $\times \triangle$ क $=$ क्षेत्र (अबक त्रिकोण)

बाजूस दिलेल्या आकृतीवरून समजतें कीं,

क्ष = अम   य = कम

Δक्ष = मग Δय = बई

ह्यावरून

$\frac{1}{2}$ ज × Δ क   = क्षेत्र अबक त्रिकोण

= अबई त्रि.— कबई त्रि.— अकई त्रि.

= $\frac{1}{2}$ अग × बई — $\frac{1}{2}$ कई × बई — $\frac{1}{2}$ कई × कम

पण कई = मग]   = $\frac{1}{2}$ (अग — कई) × बई — $\frac{1}{2}$ कम × कई

= $\frac{1}{2}$ (अम — मग) × बई — $\frac{1}{2}$ कम × मग

= $\frac{1}{2}$ क्ष × Δ य — $\frac{1}{2}$ य × Δ क्ष

$$ज = २\frac{\text{क्षेत्र}}{\Delta \text{क}} = \text{क्ष}\,\frac{\Delta \text{य}}{\Delta \text{क}} - \text{य}\,\frac{\Delta \text{क्ष}}{\Delta \text{क}}$$

ह्या समीकरणातील काल विभाग Δक हा कालाचा सूक्ष्मांश मानिला तर Δय हा य भुजाचा सूक्ष्मांश होईल आणि Δक्ष हा क्ष भुजाचा सूक्ष्मांश होईल आणि ज हा $\frac{\text{सूअ}}{\text{सूक}}$ म्हणजे कालाच्या सूक्ष्म अशा एकं परिमाणात आक्रमिलेलें क्षेत्र होईल म्हणून

$$ज = \text{क्ष}\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} - \text{य}\,\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} \ldots\ldots$$

२९५. कालाच्या सूक्ष्म अशा एकं परिमाणांत चल त्रिज्येनें आक्रमिलेलें क्षेत्र अक्षिय निर्णायकांच्या किमतीनें ठरवावयाचे.

सप ही चल त्रिज्या आहे, तिने Δक ह्या काल विभागांत सपक हें क्षेत्र आक्रमिलें आहे. म्हणून

$\frac{1}{2}$ ज × Δ क = सपक क्षेत्र

स मध्य करून सप त्रिज्येनें पल कंस काढिला, आणि सक त्रिज्येनें कई कंस काढिला. ह्या आकृतीवरून दिसून येतें कीं, सपक क्षेत्र सपल क्षेत्रापेक्षां जास्त आहे. आणि सकई क्षेत्रापेक्षां कमी आहे.

आता सप = र = चलत्रिज्या

सक = र + Δर = चलत्रिज्या

आणि पसक कोन = Δब = पक कंस $\div$ त्रिज्या.

वर्तुळाच्या दोन त्रिज्या आणि त्यांच्या टोकांमधील वर्तुळाचा कंस यांनी मर्यादिलेलें क्षेत्र हें तो कंस आणि त्रिज्येचा वर्ग यांच्या गुणाकाराच्या अर्ध्याबरोबर असते. अर्थात सर्व वर्तुळाचे क्षेत्र π त्र^2 याबरोबर असते. तेव्हां

$$\text{सपल क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\text{र}^2 \times \Delta\text{ब}$$

$$\text{सकई क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\,(\text{र} + \Delta\text{र})^2 \times \Delta\text{ब}.$$

Δक हा काल विभाग आहे. हा विभाग कालाच्या एकं परिमाणाची पूर्ण पट असली पाहिजे कारण एकं परिमाण कालाचा सूक्ष्मांश हे स्वीकारले आहें. तेव्हां

$\frac{1}{2}$ ज $\times$ Δक = सपक क्षेत्र, सपल पेक्षां जास्त आणि सकई पेक्षां कमी आहे. म्हणून

$\frac{१}{२}$ ज $\times \Delta$क, $\frac{१}{२}$र$^{२}\Delta$ब पेक्षां जास्त आणि $\frac{१}{२}$ (र$+\Delta$र)$^{२} \times \Delta$ब पेक्षां कमी आहे.

$\frac{१}{२}$ज $\frac{\Delta क}{\Delta ब}$ हें गुणोत्तर $\frac{१}{२}$र^{२} पेक्षां जास्त आणि $\frac{१}{२}$(र$+\Delta$र)^{२} पेक्षां कमी आहे. आता Δक हा कालाचा सूक्ष्मांश मानिला तर Δब हें ब कोनाचा सूक्ष्मांश होईल आणि Δर $=$ ० म्हणून

$$\frac{१}{२}ज\ \frac{सूक}{सूब} = \frac{सू(सयक\ क्षेत्र)}{सूब} = \frac{१}{२}र^{२}$$

ह्यामधील सूक्ष्मांशगुण वृत्तपरिमाणासंबंधी, म्हणजे वृत्तपरिमाण विकारीपद मानून आणलेला आहे तो काल हें विकारीपद घेऊन आणावयाचा आहे यास्तव त्यास $\frac{सूब}{सूक}$ नें गुणावयाचें असतें. लेख २०५. म्हणून

$$ज\ \frac{सूक}{सूब} \times \frac{सूब}{सूक} = र^{२}\frac{सूब}{सूक}$$

पण

$$\frac{सूक}{सूब} \times \frac{सूब}{सूक} = १$$

म्हणून

$$ज = र^{२}\frac{सूब}{सूक}$$

२९६. ज ची किंमत अन्योन्य लंब भुज निर्णायकांच्या किंमतीनें लेख २९४ मध्यें तयार करून दाखविली आहे. त्यावरून ही ज ची किंमत सिद्ध होते. ती अशी—

$$ज = क्ष\frac{सूय}{सूक} - य\ \frac{सूक्ष}{सूक} \qquad [लेख\ २९४]$$

पण

$$क्ष = रकोभुब \text{ आणि } य = रभुब$$

$$\frac{सूय}{सूक} = भुब\ \frac{सूर}{सूक} + रकोभुब\ \frac{सूब}{सूक} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (१)$$

$$\frac{सूक्ष}{सूक} = कोभुब\frac{सूर}{सूक} - रभुब\ \frac{सूब}{सूक} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (२)$$

ह्यापैकी पहिल्या समीकरणाला क्ष नें म्हणजे रकोभुब नें गुणावयाचे आणि त्यागुणाकारांत दुसऱ्या समीकरणाला य म्हणजे र भु ब नें गुणून आलेला गुणाकार धनर्ण करावयाचा आहे. तेव्हां

$$\text{ज} = \text{क्ष}\,\frac{\text{सूय}}{\text{सूक}} - \text{य}\,\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}}$$

$$= \text{रभुबकोब}\,\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{र}^2\text{कोभु}^2\text{ब}\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

$$- \text{रभुबकोभुब}\,\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} + \text{र}^2\text{भु}^2\text{ब}\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

$$= \text{र}^2\,(\text{कोभु}^2\text{ब} + \text{भुब}^2)\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

पण $\text{भु}^2\text{ब} + \text{कोभु}^2\text{ब} = 1$ म्हणून

$$\text{ज} = \text{र}^2\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

२९७. ग्रहाच्या गमन मार्गानें झालेली जी वक्ररेषा तिच्या कंसाचा, चलत्रिज्येचा आणि चलत्रिज्यानिर्मित कोनाचा अन्योन्य संबंध ठरवावयाचा.

लेख २९५ मधील आकृति पहा अपक ही वक्ररेषा आहे, तिच्यांत अ हा स्थीर बिंदु आहे, ह्या अ बिंदू पासून वक्ररेषेची लांबी मोजावयाची आहे. अप कंस च नें दाखवूं, आणि पक $= \triangle$च आहे असें घेऊ. तसेंच कम $= \triangle$र मानूं.

पम $=$ र भु $(\triangle\text{ब}) =$ र$\triangle$ब. कारण सूक्ष कोनाची भुजज्या $=$ वृत्तपरिमाण असते. कम रेषा ही कल पेक्षां जास्त आहे पण परमावधीला त्या समान होतात. तेव्हां,

(ज्या) $\text{पक}^2 = \text{पम}^2 + \text{कम}^2$ (कारण कमप कोन काटकोन.)

कोनाच्या सूक्ष्मत्वामुळें ज्यापक आणि कंस पक ह्या रेषा समान आहेत. पक पम कम यांच्या जागीं मानलेल्या किंमती ठेविल्या. तेव्हां,

$$(\triangle\text{च})^2 = (\text{र}\triangle\text{ब})^2 + (\triangle\text{र})^2 \quad \cdots\cdots\cdots (\text{अ})$$

हें समीकरण $(\triangle\text{च})^2$ ह्या पदानें भागिलें. तेव्हां,

$$1 = \text{र}^2\,\frac{(\triangle\text{ब})^2}{(\triangle\text{च})^2} + \frac{(\triangle\text{र})^2}{(\triangle\text{च})^2}$$

क बिंदु प बिंदूशीं आला तर

$$\Delta च = सूच,\ \Delta ब = सूब,\ \Delta र = सूर \quad म्हणून$$

$$१ = र^{२} \left(\frac{सूब}{सूच}\right)^{२} + \left(\frac{सूर}{सूच}\right)^{२} \quad \cdots \cdots \cdots (१)$$

(अ) हें समीकरण$(\Delta ब)^{२}$ + ने भागिलें तर

$$\frac{(\Delta च)^{२}}{(\Delta ब)^{२}} = र^{२} + \frac{(\Delta र)^{२}}{(\Delta ब)^{२}}$$

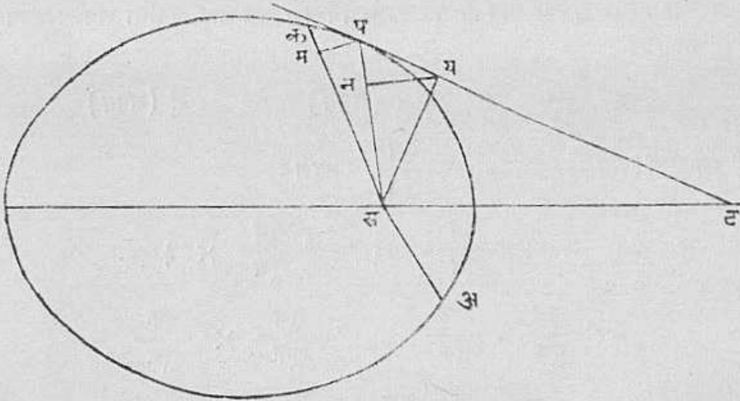
क बिंदु प बिंदूशी आला तर

$$\left(\frac{सूच}{सूब}\right)^{२} = र^{२} + \left(\frac{सूर}{सूब}\right)^{२} \quad \cdots \cdots \cdots (२)$$

(अ) हें समीकरण $(\Delta र)^{२}$ ह्या पदानें भागिलें तर

$$\left(\frac{सूच}{सूब}\right)^{२} = र^{२} \times \left(\frac{सूब}{सूर}\right)^{२} + १ \quad \cdots \cdots \cdots (३)$$

२९८. ग्रहाच्या कक्षेतील विवक्षित बिंदूतून काढलेली स्पर्शरेषा आणि त्याच बिंदूतील चलत्रिज्या यामधील कोन.



ह्या आकृतींत पस ही चलत्रिज्या आहे आणि पय ही प बिंदूतून काढलेली स्पर्श-रेषा आहे तर सपय कोनाची भुजज्या कोभुजज्या आणि स्पर्शरेषा ही त्रिकोणमिति-विषयक गुणोत्तरें ठरवावयाचीं. स ह्या केंद्रांपासून स्पर्शरेषेवर सय लंब केला.

आपण जेव्हां परमावधीची कल्पना करितो तेव्हां क बिंदू प च्या अत्यंत सन्निध येतो. त्यावेळेस कमप हा सूक्ष्म असा त्रिकोण होतो. (प पासून कस वर पम लंब केला आहे, आणि य बिंदूपासून पस वर यन लंब केला आहे.) तो सूक्ष्म त्रिकोण

पयस त्रिकोणाशी आणि पनय त्रिकोणाशी सरूप होतो. त्यावेळीं सपय कोन पकम कोनाबरोबर असतो, आणि पयन कोन कपम कोनाबरोबर असतो. व पनय आणि कमप हे कोन आहेत.

$$पक = \triangle च,\ कम = \triangle र,\ पम = र\triangle ब,$$

$$भुजज्या\ (सपय) = \frac{पम}{पक} = \frac{र\triangle ब}{\triangle च} = र\ \frac{सूब}{सूच} \cdot\cdot (४)$$

$$कोभु\ (सपय) = \frac{पय}{पस} = \frac{कम}{पक} = \frac{\triangle र}{\triangle च} = \frac{सूर}{सूच} \cdot\cdot (५)$$

$$स्प\ (सपय) = भु\ (सपय) \div कोभु\ (सपय) = र\frac{सूब}{सूच} \times \frac{सूच}{सूर}$$

$$= र\frac{सूब}{सूर} \qquad \cdot\cdot (६)$$

२३९. ग्रहाच्या कक्षेतील विवक्षित बिंदूतून काढिलेल्या स्पर्शरेषेवरील, केंद्रापासून काढिलेल्या लंबाचा कक्षेच्या पदाशी संबंध.

वरच्या विवरणांमध्यें सय हा पय स्पर्शरेषेवरील लंब आहे. ह्या लंबास आपण ल हें नांव देऊं.

$$ल = सय = पस\ भु\ (सपय) = र\ भु\ (सपय)$$

$$पण\ भु(सपय) = र\frac{सूब}{सूच}\ म्हणून$$

$$ल = र \times र\frac{सूब}{सूच} = र^2\frac{सूब}{सूच} \times \frac{१}{१}$$

$$= र^2\frac{सूब}{सूच} \times \frac{सूक}{सूक} = र^2\ \frac{सूब}{सूक} \times \frac{सूक}{सूच}$$

$$ल = र^2\frac{सूब}{सूक} \div \frac{सूच}{सूक}$$

परंतु

$$र^2\ \frac{सूब}{सूक} = ज\ आणि\ \frac{सूच}{सूक} = ग\ (वेग)$$

म्हणून

$$ल = ज \div ग \qquad \cdots\cdot (७)$$

३००. ग्रहाचा वेग आणि कक्षेचीं इतर पदें याचा अन्योन्य संबंध.

$$ल = र^२ \frac{सूब}{सूच}, \quad \frac{१}{ल^२} = \frac{१}{र^४\left(\frac{सूब}{सूच}\right)^२}$$

$$\frac{१}{ल^२} = \frac{१}{र^४}\left(\frac{सूच}{सूब}\right)^२ = \frac{१}{र^४} \times \left\{र^२ + \left(\frac{सूर}{सूब}\right)^२\right\}$$

[ले. २९७ स. (२)]

म्हणून

$$\frac{१}{ल^२} = \frac{१}{र^२} + \frac{१}{र^४}\left(\frac{सूर}{सूब}\right)^२ \cdots\cdots (८)$$

$\frac{१}{र}$ ही संख्या व ह्या अक्षरानें दाखविली तर,

$$\frac{सूव}{सूब} = \frac{सू}{सूब}(१ \div र) = -\frac{१}{र^२}\left(\frac{सूर}{सूब}\right)$$ [भागाकाराचा सू. गु.]

यास्तव

$$\frac{१}{ल^२} = व^२ + \left(\frac{सूव}{सूब}\right)^२ \cdots (९)$$

$$परंतु\ वेग^२ = ग^२ = \frac{ज^२}{ल^२} \qquad [स. (७)]$$

$$= ज^२ \left\{ व^२ + \left(\frac{सूव}{सूब}\right)^२ \right\} \cdots\cdots (१०)$$

३०१. एक परमाणु एका पातळींत स्वतःच्या कांहीं गतीनें गमन करीत असेल आणि त्यावर, त्याच पातळींत असलेल्या बिंदूपासून कांहीं आकर्षण सतत लागू होत असेल तर त्याच्या गमन मार्गाचें समीकरण सिद्ध करावयाचें.

(गमन मार्गाचें समीकरण ज्यांनीं बैज्यभूमिती वाचली असेल त्यांनाच कळेल इतरांना असे वाटेल कीं, 'गमन मार्ग म्हणजे वक्ररेषा, त्या वक्ररेषेचें समीकरण कसे? कारण समीकरण बीजगणितांत असते भूमितील नसतें'. असें ज्यांना वाटेल त्यांनी प्रकरण ७ वें बैज्यभूमिती हें पुनः वाचावें.)

त्या परमाणूवर प्रतिक्षणीं जें आकर्षण घडत आहे ते प्र परिमाणाचें आहे. म्हणजे प्रतिक्षणीं तो परमाणू प्र परिमाणाच्या रेषेइतका आकर्षक केंद्र बिंदूकडे जात आहे. अर्थात प्र ही त्याची वेगवृद्धि आहे. ही वेगवृद्धि चलत्रिजेच्या दिशेंत कार्य करणारी

आहे. आणि ती ऋण आहे. कारण आकर्षणानें चलत्रिज्या प्रतिक्षणीं कमी होत आहे.

अन्योन्य लंबभुजांच्या किंमतीनें वेगवृद्धि किती येते हें पूर्वी सिद्ध केलें आहे. लेख २८७ समीकरण (अ) (ब) पहा. ती समीकरणें अशी

$$\text{क्ष अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सू}^2\text{क्ष}}{\text{सूक}^2} \quad \cdots\cdots (\text{अ})$$

$$\text{य अक्षाशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सू}^2\text{य}}{\text{सूक}^2} \quad \cdots\cdots (\text{ब})$$

आतां —प्र ही वेगवृद्धि चलत्रिज्येच्या दिशेंतील आहे, हें वर दाखविलें आहे, हिचें पृथःकरण, क्ष अक्षाशी समांतर दिशेंत, आणि य अक्षाशी समांतर दिशेंत केलें तर तें अनुक्रमें — प्रकोभुब आणि — प्र भु ब अशी पृथःकरणें होतात. ह्यावरून त्या परमाणूच्या गमनमार्गाची सूक्ष्मांश समीकरणें खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतील :—

$$\frac{\text{सू}^2\text{क्ष}}{\text{सूक}^2} = -\text{ प्रकोभुब} \quad \cdots\cdots (११)$$

$$\text{आणि } \frac{\text{सू}^2\text{य}}{\text{सूक}^2} = -\text{ प्रभुब} \quad \cdots\cdots (१२)$$

३०२. वरची सूक्ष्मांश समीकरणें अन्योन्य लंब भुज आणि अक्षीय अशा दोन्ही प्रकारच्या स्थलनिर्णायकांनीं युक्त आहेत. पण आम्हास अक्षीय समीकरणाची आवश्यकता आहे. वरच्या दोन समीकरणापैकीं कोणतेही एक समीकरण घेऊन, त्यातील लंबभुजांच्या ठिकाणीं अक्षीय निर्णायकें आणिली म्हणजे इष्ट समीकरण तयार होईल. प्रथम समीकरण (११) घेऊं. तें असें—

$$\frac{\text{सू}^2\text{क्ष}}{\text{सूक}^2} = -\text{ प्रकोभुब}$$

आता $\text{क्ष} = \text{रकोभुब}$

आणि $\text{र} = \frac{१}{\text{व}}$ किंवा $\text{व} = \frac{१}{\text{र}}$ असें ठराविक लेखन स्वीकारित आहे.

तेव्हा,

$$\text{क्ष} = \frac{१}{\text{व}}\cdot\text{कोभुब} = \frac{\text{कोभुब}}{\text{व}}$$

ह्या समीकरणाचा शून्यलब्धिगुण किंवा सूक्ष्मांश गुणोत्तर काढिलें. लेख २०३ प्रमाणें.

$$\frac{\text{भाजक} \times (\text{भाज्य सू.गु.}) - \text{भाज्य} \times (\text{भाजक सू.गु.})}{\text{भाजकाचा वर्ग}}$$

तेव्हां

$$\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} = \left(-\text{व} \times \text{भुब} \frac{\text{सूव}}{\text{सूक}} - \text{कोभुब} \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \cdot \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \right) \times \frac{१}{\text{व}^{२}}$$

$$= - \left(\text{वभुब} + \text{कोभुब} \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right) \times \frac{१}{\text{व}^{२}} \cdot \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

परंतु

$$\text{ज} = \text{र}^{२} \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = \frac{१}{\text{व}^{२}} \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

म्हणून

$$\frac{\text{सूक्ष}}{\text{सूक}} = - \text{ज} \left(\text{वभुब} + \text{कोभुब} \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right)$$

ह्या समीकरणाचें पुनः सूक्ष्मांश गुणोत्तर काढिलें. प्रथम व संबंधीं सूक्ष्मांश गुण काढून त्यास $\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$ नें गुणीलें तर

$$\frac{\text{सू २ क्ष}}{\text{सूक}^{२}} = - \text{ज} \left\{ \frac{\text{सू}}{\text{सूब}} (\text{वभुब}) + \frac{\text{सू}}{\text{सूब}} \left(\text{कोभुब} \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right) \right\} \times \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

$$- \frac{\text{सूज}}{\text{सूक}} \left(\text{वभुब} + \text{कोभुब} \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right)$$

ह्या समीकरणांत उजवीकडे दोन पदें आहेत. पैकीं खालचें पद तूर्त ० असें घेतलें पाहिजे. कारण ज ही कालाच्या सूक्ष्म अशा एकं परिमाणांत चलत्रिज्येनें क्रमिलेलें क्षेत्र आहे. जेव्हां गमन करणाऱ्या पदार्थावर एकाच प्रेरणेचें कार्य घडत असेल तेव्हां ज ही संख्या स्थीर म्हणजे विकार न पावणारी असते अर्थात स्थीर संख्येचा सूक्ष्मांश गुण स्थीर असतो. म्हणून

$$- \frac{\text{सूज}}{\text{सूक}} \left(\text{वभुब} + \text{कोभुब} \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right) = ०$$

पण जेव्हां गमन करणाऱ्या पदार्थावर दुसऱ्या प्रेरणेचें कार्य घडत असेल तेव्हां हें पद विचारांत घ्यावे लागते.

वरच्या समीकरणांतील पहिलें पद अविस्तृत रीतीनें लिहिले आहे त्याचा प्रथम विस्तार लिहितो.

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}(\text{वभुब}) = \text{भुब}\ \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} + \text{व कोभुब}$$

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left(\text{कोभुब}\ \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) = -\ \text{भुब}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} + \text{कोभुब}\ \frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^2}$$

$$\frac{\text{सू२क्ष}}{\text{सूक}^2} = -\ \text{ज}\ \left(\text{व कोभुब} + \text{कोभुब}\ \frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^2}\right) \times \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

$$= -\ \text{ज व}^2 \times \frac{1}{\text{व}^2}\cdot\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}\text{कोभुब}\ \left(\text{व} + \frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^2}\right)$$

$$= -\ \text{ज}^2\text{ व}^2\text{ कोभुब}\ \left(\text{व} + \frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^2}\right)$$

पण

$$\frac{\text{सू२क्ष}}{\text{सूक}^2} = -\ \text{प्र कोभुब}$$

$$\left\{\frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^2} + \text{व}\right\} = \frac{\text{प्र}}{\text{ज}^2\text{व}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१३)$$

हें त्या परमाणूच्या गमन मार्गाचें अक्षीय सूक्ष्मांश समीकरण आहे. (१२) ह्या समीकरणापासूनही असेच समीकरण सिद्ध होते.

३०३. एक परमाणु दिलेल्या एका बिंदूपासून दिलेल्या दिशेनें व दिलेल्या वेगानें फेकला आहे. तो मध्याभिगामी प्रेरणेनें वक्र मार्गानें गमन करीत आहे. ज्या आकर्षणानें ती प्रेरणा उत्पन्न झाली आहे तें आकर्षण अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत कार्य करिते तर त्या परमाणूच्या कक्षेच्या पदाचा निर्णय करावयाचा.

ते आकर्षण म्हणजे मध्याभिगामिनी प्रेरणा प्र आहे. आकर्षक बिंदूपासून त्या परमाणूचें अंतर र आहे. म हे त्या आकर्षक पदार्थाचें अंतराच्या एकं परिमाणाइतक्या अंतरावर घडणारें आकर्षण होय. तेव्हां प्र $= \frac{\text{म}}{\text{र}^2}$ · एथें अंतराचा एक फूट घेतला आहे. व कालाचा सूक्ष्मांश एक सेकंद घेतला आहे. ह्यावरून त्या आकर्षक पदार्थाचें सामर्थ्य, एक फूट अंतरावरच्या परमाणूस आपणाकडे एका सेकंदांत म फूट ओढून घेण्याचें आहे. या योजनेंप्रमाणें

$$\text{र} = \frac{1}{\text{व}}\ \text{घेतला तर प्र} = \text{मव}^2$$

अशाप्रकारें आकर्षण घडत असले तर त्या परमाणूच्या गमनमार्गाचें सूक्ष्मांश समीकरण कसें होतें हें वरच्या लेखात सिद्ध केलें आहे. त्यातील प्र च्या ठिकाणी तिची वर आलेली किंमत मव^{२} ही लिहिली म्हणजे त्या समीकरणाचें स्वरूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें.

$$\frac{सू^{२}व}{सूव^{२}} + व = \frac{प्र}{ज^{२}व^{२}} = \frac{मव^{२}}{ज^{२}व^{२}} = \frac{म}{ज^{२}}$$

ह्या समीकरणांत म ही स्थीर संख्या आहे, आणि ज^{२} हीहि स्थीर संख्या आहे. व हे अवलंबी पद आहे आणि ब हे विकारी पद आहे. म्हणजे,

$$व = सं(ब)$$

ह्या स्थानी व = ज्ञ आणि ब स्थानी क्ष हीं अक्षरें योजून वरच्या समीकरणाचें स्वरूप

$$\frac{सू^{२}}{सूब^{२}}\left(व - \frac{म}{ज^{२}}\right) + \left(व - \frac{म}{ज^{२}}\right) = ०$$

अशा प्रकारचें होतें हें सिद्ध करितो.

$$ज्ञ = व \text{ आणि } क्ष = ब$$

तर

$$\frac{सूज्ञ}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूक्ष} \text{ आणि } \frac{सूव}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूब}$$

पण

$$ज्ञ = \left(व - \frac{म}{ज^{२}}\right) \text{आणि } क्ष = ब \text{ असेल तर}$$

$$\frac{सूज्ञ}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूक्ष} - ० \text{ आणि } \frac{सूब}{सूक्ष} = \frac{सूव}{सूब}$$

म्हणून

$$\frac{सू\left(व - \frac{म}{ज^{२}}\right)}{सूब} = \frac{सूव}{सूब}$$

आणि

$$\frac{सू^{२}\left(व - \frac{म}{ज^{२}}\right)}{सूब^{२}} = \frac{सू^{२}व}{सूब^{२}},$$

ह्यावरून सिद्ध होते कीं,

$$\frac{सू^{२}\left(व - \frac{म}{ज^{२}}\right)}{सूब^{२}} + \left(व - \frac{म}{ज^{२}}\right) = ० \cdots (१४)$$

३०४. हें जें समीकरण आपण सिद्ध केलें आहे, ह्या समीकरणावरून व संख्येची किमत $\frac{म}{ज^२}$ ह्या स्थीर संख्यांच्या रूपानें आणि व ह्या संख्येच्या रूपानें साध्य होते. यासाठी ह्या समीकरणाचे आपणाला संकलन करावयाचें आहे. संकलन म्हणजे काय ? तर अवलंबी पदांची किंमत विकारी पदानें ठरविणें म्हणजे संकलन होय. संकलनाविषयीं बरेंच स्पष्टीकरण केलें आहे. तें या प्रसंगीं पुनः पाहणें आवश्यक आहे ते पहा. लेख २४५ पासून २४९ पर्यंत. एथें आपणाला दिसत आहे कीं, एका संचयाचा द्वितीय सूक्ष्मांशगुण, त्या संचयाबरोबर संख्येंने आहे, मात्र चिन्ह निराळे आहे. ते एकाचे धन आणि एकाचे ऋण आहे. म्हणजे $\left(व - \frac{म}{ज^२} \right)$ या संख्येचा द्वितीय सूक्ष्मांश गुण $- \left(व - \frac{म}{ज^२} \right)$ हा आहे.

ह्यावरून आपणाला कळते कीं $\left(व - \frac{म}{ज^२} \right)$ हा ब कोनाचा वार्तिक संचय आहे. मग हा ब कोनाच्या भुजज्येचा असेल किंवा कोभुजज्येचा असेल. हें सूक्ष्मांश समीकरण चल त्रिज्येचें आहे. आणि बैज्यभूमितीमध्यें दीर्घ वर्तुळाच्या चल त्रिज्येचें समीकरण दिलें आहे. लेख १८५ (२) पहा. तें समीकरण असें

$$र = \frac{ध(१ - ई^२)}{१ + ईकोभुब}$$

म्हणजे

$$\frac{१}{र} = \frac{१ + ईकोभुब}{ध(१ - ई^२)} = व$$

ह्या समीकरणांत

$$\frac{१}{ध(१ - ई^२)} = अ \text{ मनिला तर}$$

$$व = अ(१ + ईकोभुब)$$

हें शंकुछिन्नांतर्गत दीर्घवर्तुळाच्या चल त्रिज्येचें समीकरण आहे. लेख २९८ मधील आकृति पहा. ह्या आकृतींत सप ही चल त्रिज्या आहे, अर्थात $\frac{१}{सप} = व$ आहे आणि पसट हा कोन ब नें दाखविला आहे. असें हें समीकरण आहे. ह्या समीकरणांत अक्षीय निर्णयकाचा अक्ष सट दिशेचा घेतला आहे, तो जर सअ दिशेतला घेतला तर ब कोनातून असट कोन, (यास आपण उ कोन म्हणूं तो) वजा केला पाहिजे.

म्हणून वरचें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें होईल. त्यांत ब चें जागीं (ब — उ) येईल. म्हणून—

$$\text{व} = \text{अ} \left\{ 1 + \text{ई कोभु} (\text{ब} - \text{उ}) \right\} \cdots\cdots (15)$$

३०५. चल त्रिज्येचें सूक्ष्मांश समीकरण

$$\frac{\text{सू}^2\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^2}\right)}{\text{सूब}^2} + \left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^2}\right) = 0$$

हें आहे. बैज्यभूमितीच्या समीकरणावरून कळते कीं हे कोभुजज्येचें समीकरण आहे. आणि हें चल त्रिज्येचें समीकरण आहे तें कोभुजज्येचेंच असलें पाहिजे, कारण पसट कोन = ब कोन ० असतां सप चल त्रिज्या सट दिशेत असून ती लघुतम होते, आणि ब कोन १८०° असता चल त्रिज्या महत्तम होते. परंतु हें भुजज्येचें समीकरण असतें तर ब कोन १८० अंश असता चलत्रिज्या लघुतमच झाली असती. म्हणून हें कोभुजज्येचें समीकरण आहे. कोणत्याही पदाचा शून्यलब्धिगुण करिताना म्हणजे सूक्ष्मांशगुण काढिताना त्या पदामध्यें असलेली स्थीर संख्या लुप्त होत असते, आणि सूक्ष्मांशगुणाचें संकलन करिताना ती लुप्त झालेली संख्या उत्पन्न होते. आतां

$$\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^2}\right) = \text{सं}(\text{ब}) = \text{कोभुब},$$

ह्या मध्ये स्थीर पद एकच नसता दोन असण्याचा संभव आहे. म्हणून ती पदें कोभुब मध्यें असलीं पाहिजेत. म्हणून

$$\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^2}\right) = \text{स्थ कोभु} (\text{णब} + \text{फ}) \cdots\cdots (\text{अ})$$

ह्या समीकरणाचें आपण सूक्ष्मांशगुण काढू. उजव्या पेटचांतील स्थ, ण, फ ह्या स्थीर संख्या आहेत. ब ही एकच चल संख्या आहे व तिचें सूक्ष्म चलन ह आहे. तेव्हां

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^2}\right) = \frac{1}{\text{ह}} \left[\text{स्थ कोभु}\left\{\text{ण}(\text{ब} + \text{ह}) + \text{फ}\right\} - \text{स्थ कोभु} (\text{णब} + \text{फ})\right]$$

$$= \frac{\text{स्थ}}{\text{ह}}\left[- 2\,\text{भु} \left\{\left(\text{णब} + \frac{\text{णह}}{2}\right) + \text{फ}\right\} \times \text{भु}\,\frac{\text{णह}}{2}\right]$$

$$= - \text{स्थण भु}\left\{\left(\text{णब} + \frac{\text{णह}}{2}\right) + \text{फ}\right\} \times \frac{\text{भु}\,\frac{\text{णह}}{2}}{\frac{\text{णह}}{2}}$$

$$\frac{\text{णेह}}{२} = ० \text{ मानिला तर } \frac{\text{भु}\,\frac{\text{णह}}{२}}{\frac{\text{णह}}{२}} = १ \text{ म्हणून}$$

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}}\right) = - \text{ स्थण भु (णब} + \text{फ)} \quad \cdot\cdot \quad (\text{अ})$$

तसेंच

$$\frac{\text{सू२}}{\text{सूब}^{२}}\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}}\right) = - \text{ स्थण}^{२}\text{ कोभु (णब} + \text{फ)} \quad \cdot\cdot \quad (\text{व})$$

(अ) समीकरणांत (ब) समीकरण मिळविले तर

$$\frac{\text{सू२}}{\text{सूब}^{२}}\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}}\right) + \left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}}\right) = (१ - \text{ण}^{२}) \text{ स्थ कोभु (णब}+\text{फ)}$$

ह्या समीकरणाचा उजवीकडचा पेटा ० आहे म्हणून ण किंवा $\text{ण}^{२}$ याची किंमत १ आहे म्हणून (अ) समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणें पाहिजे.

$$\left(\text{व} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}}\right) = \text{स्थ कोभु (ब} + \text{फ)}$$

म्हणजे

$$\text{व} = \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}} + \text{स्थ कोभु (ब} + \text{फ)} \quad \cdots\cdot \quad (\text{क})$$

समीकरण (१५) आणि (क) ही दोन्ही व ह्या एकाच पदाची आहेत. म्हणून

$$\frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}} + \text{स्थ कोभु (ब} + \text{फ)} = \text{अ} + \text{अई कोभु (ब} - \text{उ)}$$

स्थानांतरानें

$$\left(\text{अ} - \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}}\right) + \text{अई कोभु (ब} - \text{उ)} - \text{स्थ कोभु (ब} + \text{फ)} = ०$$

समीकरण (१५) हे सिद्ध आहे आणि (क) समीकरणातील $\frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}}$ आणि स्थ तसेंच फ ह्या शोध्य आहेत म्हणून

$$\text{फ} = -\text{उ} \;; \quad \text{स्थ} = \text{अई} \;;$$

$$\text{आणि} \quad \text{अ} = \frac{\text{म}}{\text{ज}^{२}} \;; \quad \text{म} = \text{अज}^{२} \;;$$

$$\text{ज}^{२} = \frac{\text{म}}{\text{अ}}$$

३०६. चल त्रिज्येचें सूक्ष्मांश समीकरण वर सोडवून दाखविले त्यांत व ची किंमत निघाली आहे ती खालच्या समीकरणांत आहे. ह्या समीकरणापासून कक्षेच्या कांहीं पदांचा संबंध कळतो तो येथें दाखवीत आहे. चल त्रिज्येच्या समीकरणाला मी व चें समीकरण असेंच म्हणतों. ते समीकरण असें—

$$व = \frac{म}{ज^२}\left\{ १ + ई\ कोभु\,(ब - उ) \right\}$$

ह्या समीकरणांत जेव्हां ब = उ असेल तेव्हां कोभु (ब — उ) = १

तेव्हां $$व = \frac{म}{ज^२}\left\{ १ + ई \right\} = \frac{१}{र}$$

आणि जेव्हां ब — उ = १८० अंश असेल तेव्हां कोभु (ब — उ) = — १

तेव्हां $$व = \frac{म}{ज^२}\left\{ १ - ई \right\} = \frac{१}{रा}$$

आणि $$र = \frac{१}{\frac{म}{ज^२}\,(१ + ई)}$$

$$रा = \frac{१}{\frac{म}{ज^२}\,(१ - ई)}$$

$$र + रा = \frac{\frac{म}{ज^२}(१ - ई) + \frac{म}{ज^२}(१ + ई)}{\frac{म^२}{ज^४}\,(१ - ई^२)}$$

$$= \frac{२}{\frac{म}{ज^२}\,(१ - ई^२)}$$

(र + रा) हा दीर्घ वर्तुळाचा बृहदक्ष आहे. याच्या अर्धास आपण बृ हे अक्षर योजूं म्हणजे $\frac{१}{२}$ (र + रा) = बृ.

$$बृ = \frac{१}{\frac{म}{ज^२}\,(१ - ई^२)} = \frac{ज^२}{म}\,\frac{१}{(१ - ई^२)}$$

आणि

$$बृ\,(१ - ई^२) = \frac{ज^२}{म}$$

३०७. एक परमाणु दीर्घवर्तुळ कक्षेनें गमन करीत आहे. तर त्या कक्षेंत त्याला पूर्ण प्रदक्षिणा करण्यास लागणारा काल आणि कक्षेची इतर पदें यांचा अन्योन्य संबंध.

$$\text{प्रदक्षिणा काल} = \frac{\text{दीर्घवर्तुळाचे क्षेत्र}}{\text{सूक्ष्म का. एकं क्षेत्र}} = \frac{\pi \text{ बृहदक्ष अर्ध} \times \text{लघ्वक्षार्ध}}{\frac{1}{2} \text{ज}}$$

आता $\text{ष}^2 = $ बृहदक्षार्ध आणि $\text{घ} = $ लघ्वक्षार्ध

आणि $\text{घ}^2 = \text{ष}^2 (१ - \text{ई}^2)$; $\text{घ} = \text{ष} \sqrt{(१ - \text{ई}^2)}$

तसेच $\text{ज}^2 = \text{म बृ} (१ - \text{ई}^2)$

म्हणून

$$\text{प्रदक्षिणा काल} = \frac{\pi \text{ षघ}}{\frac{1}{2} \text{ज}} = \frac{२ \pi \text{ बृ} \times \text{बृ} \sqrt{(१ - \text{ई}^2)}}{\sqrt{\{\text{म} \times \text{बृ} (१ - \text{ई}^2)\}}}$$

$$= २ \pi \sqrt{\frac{\text{बृ}^3}{\text{म}}}$$

ह्याच संबंधावरून परमाणूची म्हणजे ग्रहाची मध्यम गतीही समजते ती अशी—

$$\text{मध्यमगति} = \frac{२ \pi}{\text{प्रदक्षिणा काल}} = २ \pi \div २ \pi \sqrt{\frac{\text{बृ}^3}{\text{म}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{म}}{\text{बृ}^3}}$$

३०८. गतिशास्त्रांतील कांहीं सिद्धांत मागच्या व ह्या अशा दोन प्रकरणांत दिले आहेत. आकर्षण करणारा एकच पदार्थ असेल तर आकर्षित पदार्थाचें गमन कशा गतीनें होईल हें एवढ्याच सिद्धांतांनीं ठरवितां येते. पण स्वस्थ पदार्थांपैकीं प्रत्येक ग्रह दुसऱ्यास आकर्षण करितो. ह्यामुळें प्रत्येक ग्रहाच्या गमनांत भिन्नत्व येतें. तथापि सूर्याच्या महान महत्त्वामुळें ग्रहाचें आकर्षण सूर्याच्या आकर्षणाच्या तुलनेनें अत्यंत अल्प आहे. म्हणून ग्रहांच्या आकर्षणाचा विचार मागें ठेवून सूर्याकर्षणानें ग्रहगतीचा विचार करूं.

प्रकरण अकरावें

ग्रहाचें कक्षेतील स्थान

३०९. विवक्षित कालीं ग्रह आकाशांतील कोणत्या स्थानीं आहे हें ठरविणें ग्रहगणितांतील मुख्य कार्य आहे. ग्रहांचे गमनमार्ग म्हणजे कक्षा वर्तुळाकृति असल्या, आणि त्यांचें स्थान पाहणारा त्या वर्तुळाच्या मध्यबिंदुस्थळी असतां तर हे कार्य अत्यंत स्वल्प झाले असते. परंतु वस्तुस्थिति तशी नाहीं. म्हणजे ग्रहाच्या कक्षा वर्तुळाकृति नाहींत, आणि पहाणाराही त्या वर्तुळाच्या मध्य बिंदुस्थानीं नाहीं. ग्रहगतीच्या सिद्धांतावरून आणि दुसऱ्या अनेक प्रमाणावरून ग्रहाच्या कक्षा दीर्घवर्तुळाकृति आहेत. प्रत्येक ग्रहाची स्वतःची गति आणि सूर्याचें आकर्षण, ह्या दोन प्रेरणांनी त्या ग्रहाला वक्ररेषेनें गमन करावे लागते, आणि ती वक्ररेषा वर्तुळछिन्नाकृति असते. त्यापैकी, परवलव आणि उद्वलय ह्या वक्ररेषांचे गमनमार्ग ज्याचें आहेत, त्याना आपण ग्रह म्हणत नाहीं. त्यास धूमकेतु म्हणतों तथापि कांहीं धूमकेतु दीर्घवर्तुळ कक्षेचेही आहेत.

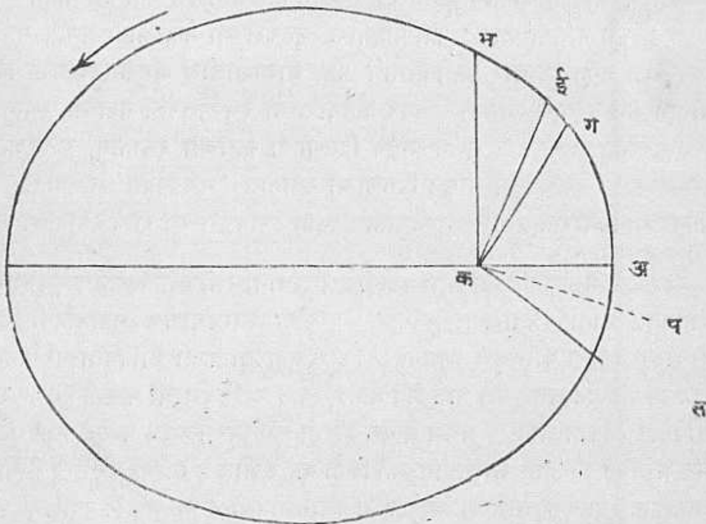
३१०. ग्रहाच्या कक्षा दीर्घवर्तुळाकृतीच्या आहेत. त्या दीर्घ वर्तुळाच्या केंद्रात (एका केंद्रांत) सूर्य आहे. ग्रहाचें स्थान पाहणारा, कक्षेच्या केंद्र स्थानीं नाहीं, तो भूपृष्ठावर आहे. यास्तव ग्रहगणिताचें काम तितकें सुलभ राहिलेलें नाहीं. प्रथम अशी कल्पना करावी लागते कीं, पाहणारा ग्रहकक्षेच्या केंद्रस्थानीं अर्थात सूर्यमध्यबिंदुस्थळी आहे. ह्या कल्पनेप्रमाणें ग्रह आकाशातील अमुक बिंदुस्थळीं दिसला पाहिजे असें ठरवावें लागतें. नंतर पाहणाराच्या स्थलांतरानें ग्रहाच्या स्थानांतील भेद ठरवावा लागतो. सूर्यमध्यांतून दिसणाऱ्या ग्रहाच्या स्थानास 'रविमध्य ग्रह' म्हणतात, आणि भूमध्यांतून दिसणाऱ्या स्थानास 'भूमध्यग्रह' म्हणतात. अशा प्रकारच्या विचारानें ग्रहाचें आकाशांतील स्थान ठरविण्याच्या रीति बसविल्या आहेत.

३११. प्रत्येक ग्रह आपल्या कक्षेतील केंद्रस्थानासभोवती म्हणजेच सूर्यासभोवती दीर्घवर्तुळ मार्गानें प्रदक्षिणा करितो. पृथ्वीही त्याप्रमाणेंच सूर्याभोवतीं फिरते. पृथ्वीच्या कक्षेला क्रांतिवृत्त म्हणतात. इतर ग्रहांच्या कक्षा क्रांतिवृत्ताच्या पातळीशी किंचित फरकाने असलेल्या पातळींत आहेत, त्यांत क्रांतिवृत्ताची पातळी हीच शर भोग मापनाला घेतली आहे. प्रथम प्रत्येक ग्रह हा क्रांतिवृत्ताच्याच पातळीत फिरतों असें धरून गणित करितात आणि नंतर तो किती बाहेर आहे हे त्याचा शर ठरवून त्यावरून सांगतात. प्रत्येक ग्रह दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रासभोवती वर्तुळ मार्गानें प्रदक्षिणा करितो असें कल्पून प्रदक्षिणा कालावरून त्याची मध्यम चाल तयार करितात. त्यास मध्यम भोग किंवा मध्यमग्रह म्हणतात नंतर दीर्घवर्तुळ मार्गामुळें त्याच्या स्थानांत येणारा भेद (अंतर) गणितानें ठरवितात. त्या भेदाला 'मंदफल' म्हणतात. ह्या

प्रकरणांत पृथ्वी हा ग्रह आणि आकर्षक सूर्य असें घेऊन पृथ्वीचें तिच्या कक्षेतील स्थान ठरवावयाचे आहे. इतर ग्रहांचे स्थान पृथ्वीच्याच सादृश्यानें ठरविता येते, तो विचार मागाहून करावयाचा आहे.

३१२. विवक्षित कालीं विवक्षित ग्रहानें आरंभ स्थानापासून क्रमिलेलें कोनात्मक अंतर दिलेले आहे. ह्या अंतराला स्पष्ट भोग म्हणतात. संक्षेपे त्यास स्पष्ट ग्रहच म्हणतात. आणि त्या ग्रहाचे केंद्रसन्निधान आरंभस्थानापासून किती अंतरावर आहे तें दिलें आहे, तसेंच ग्रहाच्या प्रदक्षिणाकालावरून त्याची कालाच्या एकं परिमाणांत होणारी चाल. हिला मध्यमगति म्हणतात तीही दिली आहे, आणि ग्रहाच्या दीर्घवर्तुळ कक्षेची केंद्रच्युति दिली आहे तर तो ग्रह **रेवती-योगताऱ्यांच्या** दिशेंत म्हणजेच आरंभ स्थानबिंदूत कोणत्या कालीं होता हें ठरवावयाचें म्हणजे आरंभ स्थानीं ग्रह ज्या कालीं होता त्या क्षणापासून प्रस्तुत क्षणापर्यंत किती काल गेला आहे हे ठरवावयाचे. सध्या आपणास पृथ्वी आणि सूर्य यांचा विचार करावयाचा आहे. ह्यांत सूर्य हा भूकक्षेच्या दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रस्थानीं आहे तथापि पृथ्वी स्थीर आणि तिच्या सभोवती दीर्घवर्तुळ कक्षेनें फिरणारा सूर्य आहे अशी कल्पना केल्यास गणितांत दोष येत नाहीं. ह्या आधारावरून तसें गणित केले आहे.

३१३. सूर्याची अ ई भ ही दीर्घवर्तुळ कक्षा आहे. ह्या कक्षेत ई स्थानीं सूर्य



आहे. क हें ह्या कक्षेचें केंद्र आहे, आणि अ हा बिंदु कक्षेचे केंद्र सन्निधान आहे. कत ही **रेवती योगताऱ्याची** दिशा असून अकत कोन केंद्र संन्निधानाचा भोग आहे.

तकई हा कोन सूर्याचा स्पष्ट भोग आहे. मध्यम गतीनें सूर्य ग स्थानीं आहे. तकग हा मध्यम सूर्य आहे. सूर्य मध्यम गतीनें कत दिशेत ज्या क्षणीं होता, त्या क्षणापासून काल मोजावयाचा आहे. सूर्याला मध्यम गतीने त क ग कोन क्रमण्याला क काल लागला आहे. आणि ग ही सूर्याची मध्यम गति आहे. म्हणजे

ग = सूर्याची मध्यम गति.

कग = सूर्याचे मध्यम भोग, तकग कोन.

उ = सूर्याचे केंद्रसान्निधान, तकअ कोन.

ब = सूर्याचे स्पष्ट भोग. तकई कोन.

ब—उ = सूर्याचे मंद केंद्र अकई कोन.

३१४. वर जो सिद्धांत सिद्ध करण्याचे योजिले आहे त्यांत (ब—उ) हा कोन दिला आहे, आणि क हा काल शोधावयाचा आहे. तेव्हां काल आणि कोन यांचा संबंध दाखविणारें समीकरण आपणास मिळाले पाहिजे. तो संबंध दाखविणारें सूक्ष्मांश समीकरण आहे तें खालीं दाखविल्याप्रमाणें :—

$$र^2 \frac{सूब}{सूक} = ज$$

किंवा

$$\frac{सूब}{सूक} = \frac{ज}{र^2} \cdots\cdots\cdots (अ)$$

हें सूक्ष्मांश समीकरण असून त्याच्या उजव्या पेटचातील पदें अव्यक्त आहेत. त्या अव्यक्त पदांच्या किंमती व्यक्त पदांनें काढून त्या किंमती समीकरणांत लिहून ती अव्यक्त पदें लुप्त केली पाहिजेत. तेव्हां

$$र^2 = \frac{बृ^2 (१ - ई^2)^2}{\left\{१ + ई\,कोभु\,(ब - उ)\right\}^2}$$

आणि

$$ज^2 = म\,बृ\,(१ - ई^2) \qquad [ले.\ ३०७]$$

म्हणून

$$ज = \sqrt{\left\{म\,बृ \times (१ - ई^2)\right\}}$$

ह्या किंमती वरच्या समीकरण (अ) मध्यें लिहिल्या तर

$$\frac{सूक}{सूब} = \frac{र^2}{ज} = \frac{बृ^2 (१ - ई^2)^2}{\left\{१ + ई\,कोभु\,(ब - उ)\right\}^2 \times \sqrt{\left\{मबृ(१-ई^2)\right\}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left\{बृ^4 (१ - ई^2)^4\right\}}}{\sqrt{\left\{मबृ\,(१ - ई^2)\right\}}} \times \left\{१ + ई\,कोभु\,(ब - उ)\right\}^{-2}$$

$$= \sqrt{\frac{बृ^3}{म}} \times (१ - ई^2)^{\frac{3}{2}} \times \left\{१ + ई\,कोभु\,(ब - उ)\right\}^{-2}$$

परंतु

$$\sqrt{\frac{बृ^{३}}{म}} = \frac{१}{ग} = \frac{१}{\text{रवि मध्यम गति}} \qquad [\text{ले. }३०७]$$

म्हणून

$$\frac{सूक}{सूब} = \frac{१}{ग}(१ - ई^{२})^{\frac{३}{२}} \times \left\{ १ + ई \text{ कोभु } (ब - उ) \right\}^{-२} \ldots\ldots (ब)$$

हें सूक्ष्मांश समीकरण तयार झाले ह्या समीकरणांतील क ची किंमत ब च्या किंमतीनें काढतां येते. ह्या समीकरणांत क हें अवलंबी पद आहे आणि ब हें विकारी पद आहे. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेटयांचें संकलन केलें तर येणाऱ्या संख्या समान येतील. डाव्या पेटयांतील $\frac{सूक}{सूब}$ याचें संकलन क ही संख्या आहे. आणि उजव्या पेटयाचें संकलन केलें म्हणजे क ची किंमत येईल.

३१५. वरच्या (ब) समीकरणाचें संकलन करावयाचे आहे. संकलन करावयास ज्यांचे संकलन करावयाचे त्या संख्या एकावयवी असाव्या लागतात. संयुक्त संख्यांचे संकलन करिता येत नाहीं. यासाठीं ह्या समीकरणाच्या उजव्या पेटयांतील दुसऱ्या अवयवाचा — २ घात करावयाचा आहे तो पहिल्या प्रकरणांतील २१ व्या लेखांकाप्रमाणें करिता येतो. तो घात विस्तार असा :

$$(१ + अ)^{न} = १ + नअ + \frac{न(न - १)}{१ \cdot २}अ^{२} + \frac{न(न - १)(न - २)}{१ \cdot २ \cdot ३}अ^{३} + \ldots\ldots$$

(ब) समीकरणांत घातविस्तार केला पाहिजे असे दोन्ही अवयव आहेत, दुसऱ्या अवयवांत संकलनीय ब संख्या आहे तेव्हां त्याचा घातविस्तार पाहिजे आणि पहिल्या अवयवांत $ई^{२}$ ही संख्या आहे. जरी ही संख्या स्थीर आहे तरी संकलनाची सूक्ष्मता किती पाहिजे हें समजण्यासाठी, म्हणजे $(१ - ई^{२})^{\frac{३}{२}}$ ह्यांतील ई च्या कोणत्या घातापर्यंत सूक्ष्मता पाहिजे यासाठी ह्या अवयवाचाही घातविस्तार केला पाहिजे. हा घातविस्तार खालीं दिल्याप्रमाणें होतो. वरच्या समीकरणांत अ च्या जागीं $- ई^{२}$ आणि न च्या जागीं $+ \frac{३}{२}$ लिहा. तेव्हां

$$(१ - ई^{२})^{\frac{३}{२}} = १ + \tfrac{३}{२}(-ई^{२}) + \frac{\frac{३}{२}(\frac{३}{२} - १)}{१ \cdot २}(-ई^{२})^{२}$$

$$= १ - \tfrac{३}{२}ई^{२} + \tfrac{१}{२} \cdot \tfrac{३}{४}ई^{४} - \ldots\ldots\ldots \qquad (१)$$

पुढचें पद $ई^{६}$ हे फार सूक्ष्म म्हणून ते सोडलें.

दुसऱ्या अवयवांत अ च्या जागीं ई कोभु (ब — उ) आणि न च्या जागीं — २ ठेविलें म्हणजे त्याचा घात विस्तार होईल. प्रथम न = — २ घेऊन अ च्या किंमतीनेंच समीकरण लिहिले तर

$$(१ + \text{अ})^{-२} = १ - २\text{अ} + ३\text{अ}^{२} - ४\text{अ}^{३} + \ldots\ldots$$

म्हणून

$$\left\{१ + \text{ई कोभु}(\text{ब}-\text{उ})\right\}^{-२} = \left\{\begin{array}{l} १ - २\,\text{ई कोभु}(\text{ब}-\text{उ}) + ३\,\text{ई}^{२}\text{कोभु}^{२}(\text{ब}-\text{उ}) \\ - ४\,\text{ई}^{३}\text{कोभु}^{३}(\text{ब}-\text{उ}) + ५\,\text{ई}^{४}\text{कोभु}^{४}(\text{ब}-\text{उ}) \\ - ६\,\text{ई}^{५}\,\text{कोभु}^{५}(\text{ब}-\text{उ}) + \text{इत्यादि.} \end{array}\right.$$

ह्या विस्तारांत कोभु (ब — उ) ह्या त्रिकोणमिती गुणोत्तरांचा वर्ग घन इत्यादि घात आहे. तो ही संकलनास योग्य नाहीं. यास्तव त्या घातांच्या किंमती (ब — उ) ह्या कोनाच्या पटीच्याकोभुजज्येनें दाखवितां येतात. लेख २५७ पहा. त्याप्रमाणें किंमती पुढच्या समीकरणांत लिहिल्या आहेत.

$$\left\{१ + \text{ई कोभु}(\text{ब}-\text{उ})\right\}^{-२} = \left\{\begin{array}{l} १ - २\,\text{ई कोभु}(\text{ब}-\text{उ}) + ३\,\text{ई}^{२}\left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\,\text{कोभु}\,२(\text{ब}-\text{उ})\right\} \\ - ४\,\text{ई}^{३}\left\{\frac{३}{४}\,\text{कोभु}(\text{ब}-\text{उ}) + \frac{१}{४}\,\text{कोभु}\,३(\text{ब}-\text{उ})\right\} \\ + ५\,\text{ई}^{४}\left\{\frac{३}{८} + \frac{१}{२}\,\text{कोभु}\,२(\text{ब}-\text{उ}) + \frac{१}{८}\,\text{कोभु}\,४(\text{ब}-\text{उ})\right\} \\ - ६\,\text{ई}^{५}\left\{\frac{५}{८}\,\text{कोभु}(\text{ब}-\text{उ}) + \frac{५}{१६}\,\text{कोभु}\,३(\text{ब}-\text{उ}) + \right. \\ \qquad\qquad \left. \frac{१}{१६}\,\text{कोभु}\,५(\text{ब}-\text{उ})\right\} \end{array}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ (२)$$

ह्या समीकरणास वरचें समीकरण (१) यानें गुणावयाचे आहे, म्हणजे $१ - \frac{३}{२}\text{ई}^{२} + \frac{३}{८}\text{ई}^{४}$ ह्या प्रत्येक संख्येनें गुणावयाचें. १ ह्या संख्येनें गुणून जो गुणाकार येईल तो समीकरण (२) मध्यें आहे. $-\frac{३}{२}\text{ई}^{२}$ ने आणि $+\frac{३}{८}\text{ई}^{४}$ नें गुणून आलेले गुणाकार करून खालीं लिहिले आहेत. गुणाकाराची सूक्ष्मता $\text{ई}^{५}$ पर्यंत पाहिजे. पुढील नको.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{३}{२}\text{ई}^{२}\ \text{नें} \\ \text{आलेला} \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{३}{२}\text{ई}^{२} + ३\,\text{ई}^{३}\,\text{कोभु}(\text{ब}-\text{उ}) - \frac{९}{४}\text{ई}^{४} \\ -\frac{९}{४}\text{ई}^{४}\text{कोभु}(२\,\text{ब} - २\,\text{उ}) + \frac{९}{२}\text{ई}^{५}\,\text{कोभु}(\text{ब}-\text{उ}) \\ \qquad\qquad + \frac{३}{२}\,\text{इ}^{५}\,\text{कोभु}\,३(\text{ब}-\text{उ}) \end{array}$$

$$+\frac{३}{८}\text{ई}^{४}\ \text{नें}\Big\} + \frac{३}{८}\text{ई}^{४} - \frac{३}{४}\,\text{ई}^{५}\text{कोभु}(\text{ब}-\text{उ})$$

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \frac{१}{\text{ग}}\left\{\begin{array}{l} १ - २\,\text{ई कोभु}(\text{ब}-\text{उ}) + \left(\frac{३}{२}\text{ई}^{२} + \frac{३}{४}\text{इ}^{४}\right)\text{कोभु}\,२(\text{ब}-\text{उ}) \\ -\left(\text{ई}^{३} + \frac{३}{८}\text{ई}^{५}\right)\text{कोभु}\,३(\text{ब}-\text{उ}) + \frac{५}{८}\text{ई}^{४}\text{कोभु}\,४(\text{ब}-\text{उ}) \\ -\frac{३}{८}\,\text{ई}^{५}\text{कोभु}\,५(\text{ब}-\text{उ}) \end{array}\right.$$

हें समीकरण संकलनक्षम झालें. याचें संकलन करावयाचें.

३१६. संकलन म्हणजे काय याचें स्पष्टीकरण अनेक वेळां मागें केलें आहे. लेख २४५ ते २४९ पहा. तथापि लेख ३०५ मध्यें (अ) आणि (आ) हीं दोन समीकरणें आहेत, त्यांपैकीं (आ) समीकरणाचें संकलन (अ) समीकरण आहे. कारण (आ) समीकरण (अ) समीकरणाचा सूक्ष्मांशगुण आहे. तेव्हां (आ) समीकरणापासून (अ) समीकरण कसें बनेल ती कृति आपणास पाहिजे आहे. ह्यावरून असें ठरते कीं सूक्ष्मांशगुण काढतांना, भुजज्या आणि कोभुजज्या ह्या गुणोत्तराचा केंद्र गुणक तो केंद्रांत कायम राहून त्याच पदाला गुणक होतो. जसें (अ) समीकरणामध्यें [स्थकोभु (णब + फ)] ण हा केंद्रगुणक तो (आ) समीकरणामध्यें [— स्थणभु (णब+फ)]ण हा केंद्रगुणक राहून पदगुणक झाला आहे. आता (आ) समीकरणावरून (अ) समीकरणांत पद नेणें तर (आ) समीकरणात पदाला जो स्थण गुणक आहे त्याला ण नें भागिलें पाहिजे.

ज्या पदाचें संकलन करावयाचे त्या पदाला जर स्थीर गुण असेल तर तो गुणक संकलनांत जशाचा तसाच राहतो. संकलनांत जर केंद्र विरहित स्थीर संख्या असेल तर त्याला विकारी पद गुणक होतो. जसे

$$\frac{\text{सूय}}{\text{सूक्ष}} = \text{१} + \text{फ, तर य} = \text{क्ष} + \text{फक्ष.}$$

ह्यावरून पाहतां $+ \frac{\text{५}}{\text{८}} \text{ई}^{\text{४}}$ कोभु ४ (ब—उ) ह्या पदाचें संकलन $+\frac{\frac{\text{५}}{\text{८}}\text{ई}^{\text{४}}}{\text{४}}$ भु ४ (ब—उ) हे आहे. ह्याप्रमाणें वरच्या समीकरणाचें संकलन केलें तर तें खालीं दिल्याप्रमाणें होईल.

एखाद्या राशीचा सूक्ष्मांश गुण काढिताना त्या राशीमध्यें जर स्थीर पद असेल तर त्याचा लोप होत असतो. पण तें पद संकलनांत घेतलेंच पाहिजे तें पद सूक्ष्मांश समीकरणांत लुप्त झालेले असतें ते कोणते घ्यावे असा प्रश्न असतो. पण तो पूर्वानुसंधानाने सोडवावा लागतो. ह्या पदाला स्थीर क्षेपक म्हणू. त्याप्रमाणें ह्या समीकरणांत प ही स्थीर संख्या क्षेपक उत्पन्न झाला असे घेऊं. यावरून

$$\begin{aligned}\text{क}=\text{प}+\frac{\text{१}}{\text{ग}}\Big\{\text{ब} &- \text{२ ई भु (ब} - \text{उ)} + (\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ई}^{\text{२}} + \tfrac{\text{१}}{\text{८}}\text{ई}^{\text{४}})\,\text{भु२ (ब} - \text{उ)} \\ &- (\tfrac{\text{१}}{\text{३}}\text{ई}^{\text{३}} + \tfrac{\text{१}}{\text{८}}\text{ई}^{\text{५}})\,\text{भु ३ (ब—उ)} + \tfrac{\text{५}}{\text{३२}}\text{ई}^{\text{४}}\text{भु४ (ब—उ)} \\ &- \tfrac{\text{३}}{\text{४०}}\text{ई}^{\text{५}}\,\text{भु ५ (ब—उ)} + \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(क)}\end{aligned}$$

३१७. वर सिद्ध केलेलें समीकरण कालांचे आहे. क हा काल आहे. परंतु कालाचा अर्थबोध कांहीं होत नाहीं. कारण काल हा अनंत आहे. म्हणून क संख्या काल विभागाची आहे. काल विभाग म्हटला म्हणजे त्या विभागाला आरंभ आणि

शेवट पाहिजे आहे. हा काल विभागाचा शेवटचा क्षण रवीचे स्पष्ट भोग ब ज्या क्षणीं होते तो क्षण होय. पण ब भोगाचे चलन विषम आहे; कांहीं काल विभागांत जास्त तर कांहींमध्यें कमी. म्हणून मध्यम सूर्य ज्या क्षणी ० होता तो क्षण क ह्या कालाचा आरंभक्षण होय. ह्यावरून वरच्या समीकरणात जी प ही संख्या संकलनांत उत्पन्न झाली आहे ती आपण आरंभक्षण जो स्वीकारू त्यावर अवलंबून आहे. चल त्रिज्येनें आक्रमिलेला कोन मोजण्यास क्रांतिवृत्तस्थ **पौष्णांत बिंदुची** दिशा ही आरंभ स्थानीं मानिली आणि कालाच्या आरंभक्षणीची चल त्रिज्या आणि कोनाच्या आरंभीची चल त्रिज्या ह्या एकच मानिल्यास त्यामध्यें अंतर ० असावयाचे. म्हणून प ही संख्या ० आहे. पण भोग म्हणजे ब कोन मोजण्यास क प ही चल त्रिज्या आरंभ मानिल्यास, (३१३ लेखांतील आकृति पहा) त क प कोन क्रमण्यास चल त्रिज्येला लागलेला काल हा प होय. तेव्हां प ची किंमत केव्हां किती घ्यावयाची हे क प च्या संस्थितिप्रमाणें निरनिराळी होईल. तूर्त आम्ही क त हीच आरंभक्षणीची त्रिज्या असे घेऊन चालू.

वरचें समीकरण कालाचें आहे. पण ह्या समीकरणातील ग ही संख्या सोडून बाकी सर्व भावसंख्या म्हणजे केवल संख्या आहेत म्हणजे त्यास एकं हेच परिणाम आहे. ग ही संख्या वेग म्हणजे रेषा (वक्र आणि सरळ) आहे किंवा कोन आहे. (आमच्या ह्या गणितकार्यात कोन प्रेरणा दोन बिंदूमधील अंतर हे आम्ही रेषेनेच दाखवितो). ग ही कोनाची संख्या आहे आणि ती अंशादिनीं न दाखविता $\frac{\text{कंस}}{\text{त्रिज्या}}$ ह्या वृत्तपरिमाणानें दाखविली आहे. (वृत्तपरिमाण लेख ४७, ४८ पहा.)

ग ही चल त्रिज्येनें क्रमिलेल्या कोनाची संख्या आहे, आणि त्या संख्येचे परिमाण वर्तुळाच्या त्रिज्येइतक्या लांबीच्या कंसाबरचा मध्यकोण हें आहे. ग कोन हा कालाच्या एकं परिमाणात चल त्रिज्येनें आक्रमिलेला आहे. आणि तो मध्यम गतीचा आहे, यासाठी तो कालाच्या दिवस घटिका किंवा पळ ह्यापैकी हवा त्या परिमाणाचा मानिता येतो. ह्यावरून ग हा वेग किंवा गति ज्या काल परिमाणातील असेल त्या काल परिमाणाची क ही संख्या आहे असें ठरते.

वरचे समीकरण ग नें गुणिले म्हणजे क ग हा कोन होईल आणि तो मध्यम रवीचा होईल.

$$\text{क ग} = \begin{cases} \text{ब} - \text{२ ई भु (ब}-\text{उ)} + \frac{३}{४}\text{ई}^{२}\text{ भु २ (ब}-\text{उ)} \\ - \frac{१}{३}\text{ई}^{३}\text{ भु ३ (ब}-\text{उ)} + \frac{१}{८}\text{ई}^{४}\text{ भु २ (ब}-\text{उ)} \\ - \frac{१}{८}\text{ई}^{५}\text{ भु ३ (ब}-\text{उ)} + \frac{५}{३२}\text{ई}^{४}\text{ भु ४ (ब}-\text{उ)} \\ - \frac{३}{४०}\text{ई}^{५}\text{ भु ५ (ब}-\text{उ)} + \cdots\cdots \text{(भ)} \end{cases}$$

३१८. कोणत्यातरी एका क्षणी स्पष्ट सूर्य ब कोनात्मक आहे. व त्याच क्षणीं रवीचे केंद्र सन्निधान उ कोनात्मक आहे. आणि हे दोन्ही कोन भूमध्यातून **रेवती योगताऱ्याच्या** दिशेची जी रेषा ती आरंभ घेऊन मोजलेले आहेत, तर त्या क्षणीं मध्यम सूर्य किती होता हे क ग ह्या कोनानें कळते. (भूमध्य आणि **रेवती तारा** यांची जी दिशा तिशी समांतर सूर्यमध्य आणि **रेवती तारा** यांची दिशा असते.)

क ग हा मध्यम सूर्य आहे. त्याला ग नें म्हणजे रवीच्या मध्यम गतीनें भागिल्यास क हा काल समजतो.

इ ही केंद्रच्युति आहे. निरनिराळ्या ग्रहांची केंद्रच्युति निरनिराळी आहे. रवि (भू) कक्षेची केंद्रच्युति ०.०१६७७५१ आहे. आणि ह्या केंद्रच्युतीनें वृत्तपरिमाण एकं = ५७.२९५७८ अंश आहे. या संख्यांचा गुणाकार इ च्या बरोबर अंशात्मक किंमत होईल.

३१९. स्पष्ट सूर्यावरून रवीचें केंद्र संन्निधान ज्ञात असता मध्यम रवि साधनाचें समीकरण वर सिद्ध केले आहे. ते (भ) समीकरण होय. हे भोगाचें समीकरण होय आणि ते मध्यम भोग साधनाचें आहे. हें समीकरण वेधानें पृथ्वीचा प्रदक्षिणाकाल म्हणजे सूर्याचा प्रदक्षिणाकाल ठरविण्यास उपयोगी येते. वर्षमानही ठरते. या कामीं ब, उ आणि इ ह्या तीन संख्या ज्ञात असाव्या लागतात. आणि त्या वेधानें मोजिता येतात. याचा विचार पुढें करूं.

३२०. आतां मध्यम सूर्य आणि केंद्र संन्निधान यावरून स्पष्ट सूर्य कसा साधावा तें समीकरण आपणाला सिद्ध करावयाचे आहे. या कार्याकरिता कांहीं स्वतंत्र योजना करावयास नको. वर जे (भ) समीकरण सिद्ध केलें आहे त्यावरूनच सूर्याच्या स्पष्ट भोगाचें समीकरण सिद्ध होते. तो प्रकार आता दाखवितो. लेख २६२ मध्ये य चें समीकरण दिले आहे तें असे—

$$\text{य} = \text{क्ष} + \text{पभुनक्ष} + \text{दभुमक्ष} + \text{तभुकक्ष} + \text{चभुगक्ष}$$

ह्या समीकरणांतील क्ष ची किंमत काढावयाची आहे. हे कार्य लेख २६६ मधील शेवटच्या (च) समीकरणावरून करिता येतें.

आपलें (भ) समीकरण हें ह्याच समीकरणाप्रमाणें आहे. कसे तें पहा. (भ) समीकरणाच्या दोनी पेटयांत उ वजा केला तेव्हां—

$$\text{कग} - \text{उ} = \text{ब} - \text{उ} - \text{२ इ भु} (\text{ब} - \text{उ}) + \tfrac{\text{३}}{\text{४}} \text{इ}^{\text{२}} \text{ भु २ } (\text{ब} - \text{उ}) - \text{इत्यादि.}$$

यावरून ह्या दोन्ही समीकरणांतील सामान्य संख्यांचे सादृश्य किंवा समस्वरूपपणा लक्षांत येईल तो मी खालीं दाखवितो.

$य = कग - उ$ आणि $क्ष = व - उ.$

$न = १,\ म = २,\ क = ३,\ ग = ४.$

$प = -२इ,\ द = +\frac{३}{४}इ^{२},\ त = -\frac{१}{३}इ^{३}.$

$च_{१} = +\frac{५}{३२}इ^{४}$ आणि $च_{२} = +\frac{३}{८}इ^{४}.$

ह्या किंमती (च) समीकरणामध्यें ठेवून पदें तयार करूं; (च) समीकरण चवथ्या पदवीपर्यंत आहे, आणि क ग चे समीकरण पांचव्या पदवीपर्यंत आहे. ही ५ व्या पदवीची पदें मागे ठेवू. (च) समीकरणात १७ पदें आहेत. त्या प्रत्येक पदापासून क ग चे कोणतें पद निघते ते शोधूं. ही पदें क्रमानें एकाखालीं एक लिहिली आहेत.

(१) $-पभुनय = -(-२इ)भु१(कग - उ)$
$= +२इभु(कग - उ)$

(२) $-दभुमय = -(+\frac{३}{४}इ^{२})भु२(कग - उ)$
$= +\frac{३}{४}इ^{२}भु२(कग - उ)$

(३) $+\frac{१}{२}प^{२}नभु२नय = +\frac{१}{२}(+४इ^{२})भु२(कग - उ)$
$= +२ई^{२}भु२(कग - उ)$

(४) $-तभुकय = -(-\frac{१}{३})इ^{३}भु३(कग - उ) = +\frac{१}{३}इ^{३}भु३(कग - उ)$

(५) $+\frac{१}{८}प^{३}न^{२}भुनय = +\frac{१}{८}(२इ)^{३}भु(कग - उ) = -इ^{३}भु(कग - उ)$

(६) $-\frac{३}{८}प^{३}न^{२}भु३नय = -\frac{३}{८}(-२इ)^{३}भु३(कग - उ)$
$= +३इ^{३}भु३(कग - उ)$

(७) $+\frac{१}{२}पद(म+न)भु(म+न)य = -\frac{३}{४}इ^{३} \times ३भु३(कग - उ)$
$= -\frac{९}{४}इ^{३}भु३(कग - उ)$

(८) $-\frac{१}{२}पद(म-न)भु(म-न)य = +\frac{३}{४}इ^{३}भु(कग - उ)$

(९) $-\frac{१}{६}प^{४}न^{३}भु२नय = -\frac{१}{६} \times १६इ^{४}भु२(कग - उ)$
$= -\frac{८}{३}इ^{४}भु२(कग - उ)$

(१०) $+\frac{१}{३}प^{४}न^{३}भु४नय = +\frac{१}{३} \times १६इ^{४}भु४(कग - उ)$
$= +\frac{१६}{३}इ^{४}भु४(कग - उ)$

(११) $+\frac{१}{४}प^{२}दम^{२}भुमय = +\frac{१}{४} \times ४इ^{२} \times \frac{३}{४}इ^{२} \times ४भु२(कग - उ)$
$= +३इ^{४}भु२(कग - उ)$

(१२) $-\frac{१}{८}प^{२}द(म+२न)^{२}भु(म+२न)य = -\frac{१}{८} \times ४इ^{२} \times \frac{३}{४}इ^{२}$
$\times १६भु४(कग - उ) = -६इभु४(कग - उ)$

(१३) $+\frac{१}{८}प^{२}द(म-२न)^{२}भु(म-२न)य = ०$

$$(\text{१४})\ +\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{पत}\ (\text{क}+\text{न})\ \text{भु}\ (\text{क}+\text{न})\text{य} = +\tfrac{\text{४}}{\text{३}}\text{इ}^{\text{४}}\text{भु}\ (\text{४कग}-\text{४उ})$$

$$(\text{१५})\ -\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{पत}\ (\text{क}-\text{न})\ \text{भु}\ (\text{क}-\text{न})\ \text{य} = -\tfrac{\text{२}}{\text{३}}\text{इ}^{\text{४}}\text{भु२}\ (\text{कग}-\text{उ})$$

$$(\text{१६})\ +\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{द}^{\text{२}}\text{मभु२मय} = +\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\times\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\ \text{इ}^{\text{४}}\times\text{२भु४}\ (\text{कग}-\text{उ})$$

$$= +\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\ \text{इ}^{\text{४}}\text{भु४}\ (\text{कग}-\text{उ})$$

$$(\text{१७})\ +\tfrac{\text{५}}{\text{३२}}\ \text{इ}^{\text{४}}\ \text{भुगय} = \qquad = +\tfrac{\text{५}}{\text{३२}}\text{इ}^{\text{४}}\text{भु४}\ (\text{कग}-\text{उ})$$

$$(\text{१८})\ +\tfrac{\text{१}}{\text{८}}\ \text{इ}^{\text{४}}\ \text{भुगंय} = \qquad = +\tfrac{\text{१}}{\text{८}}\ \text{इ}^{\text{४}}\ \text{भु२}\ (\text{कग}-\text{उ})$$

ही निघालेली १८ पदें इ च्या घातांच्या क्रमानें एकत्र केली तर ४ थ्या पदवीपर्यंत समीकरण तयार होते. लेख २६६ मध्यें सांगितलेल्या क्रमानें पांचव्या पदवीची पदें शोधिता येतात. ती पदें शोधून तीही खालीं लिहिली आहेत. वरच्या भ समीकरणात उ वजा केला होता तो मिळविला तेव्हां (भ) समीकरणाचें स्वरूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होते :—

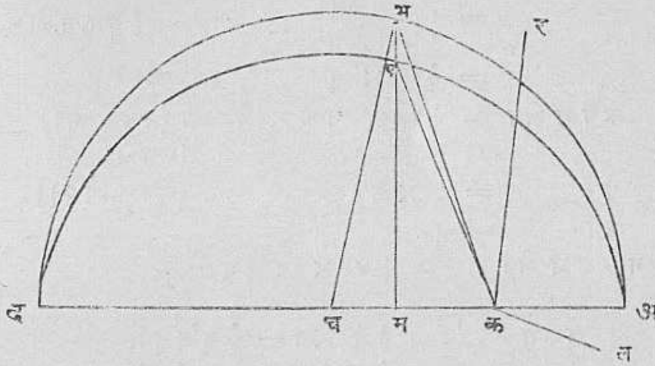
$$\text{ब} = \left\{ \begin{array}{l} \text{कग} + \text{२ इ भु}\ (\text{कग}-\text{उ}) + \tfrac{\text{५}}{\text{४}}\text{इ}^{\text{२}}\text{भु २}\ (\text{कग}-\text{उ}) \\ + \tfrac{\text{१३}}{\text{१२}}\text{इ}^{\text{३}}\ \text{भु ३}\ (\text{कग}-\text{उ}) - \tfrac{\text{१}}{\text{४}}\text{इ}^{\text{३}}\ \text{भु}\ (\text{कग}-\text{उ}) \\ + \tfrac{\text{१०३}}{\text{९६}}\text{इ}^{\text{४}}\text{भु४}\ (\text{कग}-\text{उ}) - \tfrac{\text{११}}{\text{२४}}\text{इ}^{\text{४}}\ \text{भु २}\ (\text{कग}-\text{उ}) \\ + \tfrac{\text{१०९७}}{\text{९६०}}\text{इ}^{\text{५}}\text{भु५}\ (\text{कग}-\text{उ}) - \tfrac{\text{४३}}{\text{६४}}\text{इ}^{\text{५}}\text{भु ३}\ (\text{कग}-\text{उ}) \\ + \tfrac{\text{५}}{\text{९६}}\ \text{इ}^{\text{५}}\ \text{भु}\ (\text{कग}-\text{उ}) \end{array} \right.$$

३२१. मध्यम सूर्यानें स्पष्ट सूर्य साधनाचें हें समीकरण सिद्ध केलें. हें समीकरण आणि लेख ३१७ मधील (भ) समीकरण, ही दोन्ही समीकरणें सूर्य किंवा पृथ्वी यांच्या कक्षेला उल्लेखून लिहिली आहेत. परंतु तीं समीकरणें सामान्यत्वें लिहिली आहेत. दिर्घवर्तुळकक्षा आणि ती कक्षा निर्माण करणारा आकर्षक त्या दीर्घवर्तुळाच्या एका केंद्रात अशी जी कक्षा असेल तिला उद्देशून हीं समीकरणें सिद्ध केली आहेत. हीच समीकरणें पाश्चात्य ग्रंथांत सिद्ध केली आहेत, परंतु त्यांची सिद्धता निराळ्या प्रकारची आहे. त्यांच्या सिद्धतेंत व्यापकपणा फार आहे तसा माझ्या सिद्धतेत नाहीं. बुधादि नेपच्यून पर्यंत ग्रह आणि चंद्र यांच्या कक्षा दीर्घवर्तुळात्मक आहे एवढाच विचार माझ्या सिद्धतेत आहे. परवलय उद्वलय ह्या आकाराचे धूमकेतूचे मार्ग यांचा विचार केला नाहीं. वर जीं समीकरणें सिद्ध केली त्यांची सिद्धता भिन्न असली तरी अंत्य स्वरूप प्रत्येक समीकरणाचे एकच आहे. हेंच कार्य एका इंग्लिश ग्रंथात अन्य प्रकारें केलें आहे, तो प्रकारही खाली दाखवितो. परंतु सर्वस्वी तोच प्रकार मला दाखविता येत नाहीं. कारण ह्या ग्रंथात जी साधनें सिद्ध केली आहेत त्यांच्याबाहेर मला जाता येत नाहीं.

३२२. एक परमाणु आकर्षक केंद्रासभोवतीं दीर्घवर्तुळ कक्षेने गमन करित आहे. ते आकर्षक केंद्र दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रात आहे. तर त्या परमाणूचे कक्षेतील स्थान,

त्याचे केंद्रापासून अंतर आणि कक्षेतील एका ठराविक बिंदुपासून प्रस्तुत स्थानीं येण्यास लागलेला काल यांचे अन्योन्य संबंध ठरवावयाचे.

अपद हें दीर्घ वर्तुळ आहे, आणि अद हा त्याचा बृहदक्ष आहे. क हे त्याचे एक केंद्र आहे, अर्थात अ ह्याचे केंद्र सन्निधान आहे. घ हा त्या दीर्घवर्तुळाचा मध्य आहे. ह्या



दीर्घवर्तुळ कक्षेत प हे परमाणूचें स्थान आहे. घ मध्य करून घअ किंवा घद त्रिज्येनें अभद वर्तुळ काढिले. ह्या वर्तुळास अक्षीयवृत्त म्हणा. प बिंदुपासून अद वर पम लंब केला, मप वर्तुळाला भ स्थानी मिळाली. कप, कभ आणि घभ रेषा सांधल्या.

या सिद्धतेत कांहीं पारिभाषिक शब्दयोजना आहे ती अशी

अ क प कोन = स्पष्टग्रह — केंद्र संनिधान = ब घेऊं.

ब = हें स्पष्ट मंदकेंद्र होय (आरंभ स्थान के. सं. मानिलें)

अ घ भ कोन = मध्येतर मंदकेंद्र = य घेऊ

ग ही ग्रहाची मध्यमगति आहे, तेव्हां $\frac{३६०}{ग} = \frac{२\pi}{ग}$ हा

त्या ग्रहाचा प्रदक्षिणा काल आहे. क हा एक काल विभाग आहे. ह्या काल विभागात तो ग्रह कअ रेषेपासून म्हणजे केंद्र सन्निधानापासून कग अंतर आक्रमील. हे त्या ग्रहाचे मध्यम मंदकेंद्र आहे. हे अंतर कअ आणि कर ह्या दोन चल त्रिज्या-मधील अकर कोन होय. आता प्र. का. ह्या त्या ग्रहाचा प्रदक्षिणाकाल म्हटला तर

$$ग = \frac{२\pi}{प्र. का.}$$

आणि
$$\frac{क ग}{२\pi} = \frac{क}{प्र. का.}$$

आतां

$$\frac{\text{क्षेत्र अकभ}}{\text{वर्तुळाचें क्षेत्र}} = \frac{\text{क्षेत्र अपक}}{\text{दी.व. चें क्षेत्र}} = \frac{\text{क}}{\text{प्र.का.}} = \frac{\text{कग}}{2\pi}$$

$$\text{अकभ क्षेत्र} = \text{अघभ क्षेत्र} - \text{कघभ क्षेत्र}$$

पण
$$\text{अघभ क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\ \text{अभ कंस} \times \text{अघ}$$
$$= \tfrac{1}{2}\ \frac{\text{अभ कंस}}{\text{अघत्रिज्या}} \times \text{अघ}^2 = \tfrac{1}{2}\ \text{वृत्त.प.अभ.बृ}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\ \text{य} \times \text{बृ}^2$$
$$\text{कघभ क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\text{घभ} \times \text{घक} \times \text{भुजज्या (कघभ कोन)}$$
[लेख ७० अ.]
$$\text{घक} = \text{बृ} \times \text{इ}$$
[लेख१७०(२)]
$$\text{घभ} = \text{बृ}$$

म्हणून
$$\text{कघभ क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\ \text{बृ} \times \text{बृइभुय}$$

तेव्हां
$$\text{अकभ क्षेत्र} = \tfrac{1}{2}\ \text{बृ}^2 \times \text{य} - \tfrac{1}{2}\ \text{बृ}^2\text{इभुय}$$
$$= \tfrac{1}{2}\ \text{बृ}^2\ (\text{य} - \text{इभुय})$$

आणि
$$\text{वर्तुळाचें क्षेत्र} = \pi\ \text{त्र}^2 = \pi\ \text{बृ}^2$$

ह्यावरून
$$\frac{\text{अकभ क्षेत्र}}{\text{वर्तुळाचें क्षेत्र}} = \frac{\tfrac{1}{2}\ \text{बृ}\ (\text{य} - \text{इभुय})}{\pi\ \text{बृ}} = \frac{\text{कग}}{2\pi}$$

म्हणून
$$\text{कग} = \text{य} - \text{इभुय} \ \ldots\ldots\ (1)$$

३२३. वरच्या लेखात मध्यम मंदकेंद्र आणि मध्येतर मंदकेंद्र यांचा संबंध सिद्ध केला आता ह्या लेखात स्पष्ट मंदकेंद्र आणि मध्येतर मंदकेंद्र यांचा संबंध सिद्ध करितो.

शंकुच्छिन्न भूमितिवरून ठरतें कीं,

$$\text{कप} = \text{र} = \frac{\text{बृ}\ (1 - \text{इ}^2)}{1 + \text{इकोभुब}}$$
[लेख १८५ (२)]

$$\text{कपकोभुब} = -\ \text{मक} = \text{घम} - \text{घक}$$

पण $\text{घम} = \text{बृकोभुय}$ आणि $\text{घक} = \text{बृ} \times \text{इ}$:

तेव्हां

$$\text{कपकोभुब} = \frac{\text{बृ}\ (1 - \text{इ}^2)}{1 + \text{इकोभुब}}\ \text{कोभुब} = \text{बृकोभुय} - \text{बृ} \times \text{इ}$$

$$(1 - \text{इ}^2)\ \text{कोभुब} = (\text{कोभुय} - \text{इ})\ (1 + \text{इकोभुब})$$

$$\text{कोभुब} - \text{इ}^2\text{कोभुब} = (\text{कोभुय} - \text{इ}) + \text{इकोभुय कोभुब} - \text{इ}^2\text{कोभुब}$$

$$\text{कोभुब} - \text{इ}\,\text{कोभुय}\,\text{कोभुब} = \text{कोभुय} - \text{इ}$$

$$\text{कोभुब}\,(१ - \text{इ}\,\text{कोभुय}) = \text{कोभुय} - \text{इ}$$

$$\text{कोभुब} = \frac{\text{कोभुय} - \text{इ}}{१ - \text{इ}\,\text{कोभुब}}$$

आणि

$$\text{स्प}\,\frac{\text{ब}}{२} = \sqrt{\left(\frac{१ - \text{कोभुब}}{१ + \text{कोभुब}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{१ - \text{इ}\,\text{कोभुय} - \text{कोभुय} + \text{इ}}{१ - \text{इ}\,\text{कोभुय} + \text{कोभुय} - \text{इ}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(१+\text{इ})\,(१ - \text{कोभुय})}{(१-\text{इ})\,(१ + \text{कोभुय})}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{१+\text{इ}}{१-\text{इ}}\right)}\,\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२} \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

म्हणून $$\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२} = \left(\frac{१-\text{इ}}{१+\text{इ}}\right)^{\frac{१}{२}}\,\text{स्प}\,\frac{\text{ब}}{२} \cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

३२४. वरच्या (२) ह्या समीकरणाच्या सहाय्यानें ब ची किंमत ठरविता येते. ह्या समीकरणाचें स्वरूप लेख २४४ समीकरण (२) प्रमाणें आहे. ते स्वरूप असें

$$\text{स्प}\,\text{क्ष} = \text{न}\,\text{स्प}\,\text{य}.$$

ह्यातील क्ष च्या जागीं $\frac{\text{ब}}{२}$ आणि य च्या जागीं $\frac{\text{य}}{२}$ व न च्या जागीं $\sqrt{\left(\frac{१+\text{इ}}{१-\text{इ}}\right)}$ ही संख्या आहे. आणि किंमतीच्या विस्ताराची जी श्रेणी आहे तिच्यांत न च्या जागीं $\left(\text{म} = \frac{१-\text{न}}{१+\text{न}}\right)$ म ही संख्या वापरली आहे. तेव्हां

$$\text{म} = \frac{१-\text{न}}{१+\text{न}} = \frac{१ - \sqrt{\left(\frac{१+\text{इ}}{१-\text{इ}}\right)}}{१ + \sqrt{\left(\frac{१+\text{इ}}{१-\text{इ}}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(१-\text{इ})} - \sqrt{(१+\text{इ})}}{\sqrt{(१-\text{इ})} + \sqrt{(१+\text{इ})}} \times \frac{\sqrt{(१-\text{इ})} - \sqrt{(१+\text{इ})}}{\sqrt{(१-\text{इ})} - \sqrt{(१+\text{इ})}}$$

$$= \frac{(१-\text{इ}) + (१+\text{इ}) - २\sqrt{(१-\text{इ}^२)}}{(१-\text{इ}) - (१+\text{इ})}$$

$$= -\frac{१}{२\,\text{इ}}\left\{२ - २\sqrt{(१-\text{इ}^२)}\right\} = -\frac{१-\sqrt{(१-\text{इ}^२)}}{\text{इ}}$$

लेख २४४ मधील समीकरण (२) मध्ये ब, य आणि म च्या किंमती लिहिल्या तेव्हां

$$\frac{\text{ब}}{२} = \frac{\text{य}}{२} + \frac{१-\sqrt{(१-\text{इ}^{२})}}{\text{इ}}\,\text{भुय} + \frac{१}{२}\,\frac{\left\{१-\sqrt{(१-\text{इ}^{२})}\right\}^{२}}{\text{इ}^{२}}\,\text{भु२य}$$

$$+ \frac{१}{३}\,\frac{\left\{१-\sqrt{(१-\text{इ}^{२})}\right\}^{३}}{\text{इ}^{३}}\,\text{भु३य} + \frac{१}{४}\,\frac{\left\{१-\sqrt{(१-\text{इ}^{२})}\right\}^{४}}{\text{इ}^{४}}\,\text{भु४य} + \cdots (\text{ब})$$

ह्या समीकरणातील संयुक्त पदाच्या किंमती इ च्या घातावलीच्या तयार करूं. इ च्या षड घातापेक्षां जास्त घाताची जरूर नाहीं, असें घेऊन गणित करूं. ह्या गणिताच्या सोयीकरितां

$$\sqrt{(१-\text{इ}^{२})} = (१-\text{इ}^{२})^{\frac{१}{२}}$$

$$(१-\text{इ}^{२})^{\frac{१}{२}} = १ - \tfrac{१}{२}\text{इ}^{२} - \tfrac{१}{८}\text{इ}^{४} - \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{६} - \tfrac{५}{१२८}\text{इ}^{८} \ldots . \;[\text{ले. २१}]$$

$$\frac{१}{\text{इ}}\left\{१-(१-\text{इ}^{२})\right\}^{\frac{१}{२}} = \frac{१}{\text{इ}}\left(\tfrac{१}{२}\text{इ}^{२} + \tfrac{१}{८}\text{इ}^{४} + \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{६} + \tfrac{५}{१२८}\text{इ}^{८} + \ldots\right)$$

$$= -\text{म}\}.$$

म्हणून

$$-\text{म} = \tfrac{१}{२}\text{इ} + \tfrac{१}{८}\text{इ}^{३} + \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{५} + \tfrac{५}{१२८}\text{इ}^{७} + \ldots .$$

$$= \tfrac{१}{२}\text{इ}\left(१ + \tfrac{१}{४}\text{इ}^{२} + \tfrac{१}{८}\text{इ}^{४} + \tfrac{५}{६४}\text{इ}^{६} + \ldots .\right)$$

$$= \tfrac{१}{२}\text{इ}\,(१ + \text{ध})$$

$$(-\text{म})^{\text{न}} = \frac{\text{इ}^{\text{न}}}{२^{\text{न}}}\left\{१ + \text{ध}\right\}^{\text{न}}$$

$$= \frac{\text{इ}^{\text{न}}}{२^{\text{न}}}\left\{१ + \text{नध} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२}\text{ध}^{२} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{१\cdot२\cdot३}\text{ध}^{३}\right\}$$

ह्या समीकरणात न = १ ; न = २ ; न = ३ इत्यादि संख्या घेऊन (− म) चा एक घात, वर्ग, घन, चतुर्घात यांच्या किंमती इच्या घातावळीनें काढू. त्यासाठीं ध $\text{ध}^{२}$ $\text{ध}^{३}$ इत्यादि किंमती काढिल्या पाहिजेत. तेव्हां

$$\text{ध} = \tfrac{१}{४}\text{इ}^{२} + \tfrac{१}{८}\text{इ}^{४} + \tfrac{५}{६४}\text{इ}^{६}$$

$$= \tfrac{१}{४}\text{इ}^{२}\left(१ + \tfrac{१}{२}\text{इ}^{२} + \tfrac{५}{१६}\text{इ}^{४}\right)$$

$$\text{ध}^{२} = \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{४}\left(१ + \tfrac{१}{२}\text{इ}^{२}\right)^{२} = \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{४}\left(१ + \text{इ}^{२}\right)$$

$$= \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{४} + \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{६}$$

$$\text{ध}^{३} = \tfrac{१}{६४}\text{इ}^{६}$$

ह्या ध च्या किंमती $(-\text{म})^{\text{न}}$ याच्या घातविस्तारात लिहिल्या आणि न = १; न = २ इत्यादि संख्या घेऊन ते घातविस्तार लिहिले तेव्हां

$$\begin{aligned}
-\ \text{म} &= \tfrac{१}{२}\,\text{इ}\left(१ + \tfrac{१}{४}\,\text{इ}^{२} + \tfrac{१}{८}\,\text{इ}^{४}\right)\\
+\ \text{म}^{२} &= \tfrac{१}{४}\,\text{इ}^{२}\left\{\left(१ + \tfrac{१}{२}\,\text{इ}^{२} + \tfrac{१}{४}\,\text{इ}^{४}\right) + \tfrac{१}{१६}\,\text{इ}^{४}\right\}\\
&= \tfrac{१}{४}\,\text{इ}^{२}\left(१ + \tfrac{१}{२}\,\text{इ}^{२} + \tfrac{५}{१६}\,\text{इ}^{४}\right)\\
-\ \text{म}^{३} &= \tfrac{१}{८}\,\text{इ}^{३}\left(१ + \tfrac{३}{४}\,\text{इ}^{२}\right)\\
+\ \text{म}^{४} &= \tfrac{१}{१६}\,\text{इ}^{४}\left(१ + \text{इ}^{२}\right)\\
-\ \text{म}^{५} &= \tfrac{१}{३२}\,\text{इ}^{५}\left(१ + ..\right) = \tfrac{१}{३२}\,\text{इ}^{५}\\
+\ \text{म}^{६} &= \tfrac{१}{६४}\,\text{इ}^{६}
\end{aligned}$$

३२५. वरच्या लेखातील (ब) समीकरणात य, भुय, भु२य इत्यादि मध्येतर मंदकेंद्राच्या संख्या आहे त्यांच्या किंमती लेख ३२२ मधील समीकरण (१) च्या आधारें तयार होतात. ह्या संख्या पदवी पदवीनें तयार करिता येतात. त्याचा उपक्रम खालीं लिहिल्याप्रमाणें :—

$$\text{य} = \text{कग} + \text{इभुय}$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेटयांची भुजज्या केली, तेव्हां

$$\begin{aligned}
\text{भु य} &= \text{भु (कग + इभुय)}\\
&= \text{भु (कग) कोभु (इभुय) + कोभु (कग) भु (इभुय)}
\end{aligned}$$

भुय ह्या पदाला इ हा गुणक आहे, म्हणून इभुय याला इ गुणक आल्यास तें पद $\text{इ}^{२}$ चें म्हणजे दुसऱ्या पदवीचें होईल, याकरिता भु (इभुय) आणि कोभु (इभुय) हीं पदें अनुक्रमें ० व १ मानिली

तेव्हां $\quad \text{इभुय} = \text{इभु (कग)}$

म्हणून $\quad \text{य} = \text{कग} + \text{इभु (कग)} \qquad ....(१)$

ह्या समीकरणाच्या दोन्हीं पेटयांचीं भुजज्या केली, तेव्हां

भुय = भुकग कोभु (इभुकग) + कोभुकग भु (इभुकग) ह्या विस्तारात

$$\begin{aligned}
\text{कोभु (इभुकग)} &= १ - \tfrac{१}{२}\,\text{इ}^{२}\text{भु}^{२}\text{कग}\\
\text{भु (इभुकग)} &= \text{इभुकग}
\end{aligned}$$

दुसऱ्या पदवीपर्यंत गणित हवे म्हणून $\text{इ}^{३}$ चें पद घनाचे होईल म्हणून सोडून दिले

$$\begin{aligned}
\text{इभुय} &= \text{इभुकग} + \text{इ}^{२}\text{भुकग कोभुकग}\\
&= \text{इभुकग} + \tfrac{१}{२}\text{इ}^{२}\ \text{भु२(कग)}
\end{aligned}$$

म्हणून $\quad \text{य} = \text{कग} + \text{इभुकग} + \tfrac{१}{२}\,\text{इ}^{२}\text{भु२(कग)} \cdots (२)$

ह्याप्रमाणे आलेल्या समीकरणातील य पदाची भुजज्या लेख २६० प्रमाणे करून जें समीकरण होईल त्याला इ ने गुणून कग मध्ये मिळविले म्हणजे य चें समीकरण पुढच्या पदवीला जाईल. त्याप्रमाणे

$$\text{य} = \text{कग} + \text{इभुकग} + \tfrac{१}{२}\,\text{इ भु २ कग} + \tfrac{३}{८}\text{इ}^{३}\,\text{भु ३ कग} - \tfrac{१}{८}\,\text{इ}^{३}\text{भुकग} \quad ..(३)$$

ह्याप्रमाणे य ची किमत कग च्या किमतींने ५ व्या पदवीपर्यंत तयार केली तर ती खालीं दाखविल्याप्रमाणे होते :—

$$\text{य} = \begin{cases} \text{कग} + (\text{इ} - \tfrac{१}{८}\text{इ}^{३} - \tfrac{१}{१९२}\text{इ}^{५})\text{भुकग} + (\tfrac{१}{२}\text{इ}^{२} - \tfrac{१}{६}\text{इ}^{४})\,\text{भु २ कग} \\ \quad + (\tfrac{३}{८}\text{इ}^{३} - \tfrac{२७}{१२८}\text{इ}^{५})\,\text{भु ३ कग} + \tfrac{१}{३}\text{इ}^{४}\text{भु ४ कग} + \tfrac{१२५}{३८४}\text{इ}^{५}\text{भु ५ कग} \\ \qquad ....(५) \end{cases}$$

याप्रमाणेच

$$-\,\text{२ मभुय} = \begin{cases} (\text{इ} + \tfrac{१}{८}\text{इ}^{३} + \tfrac{७}{१९२}\text{इ}^{५})\text{भुकग} + (\tfrac{१}{२}\text{इ}^{२} - \tfrac{१}{२४}\text{इ}^{४})\text{भु२कग} \\ + (\tfrac{३}{८}\text{इ}^{३} - \tfrac{१५}{१२८}\text{इ}^{५})\text{भु३कग} + \tfrac{१}{३}\text{इ}^{४}\text{भु४कग} + \tfrac{१२५}{३८४}\text{इ}^{५}\text{भु५कग} \\ \qquad ..(\text{अ}) \end{cases}$$

$$+\,\text{म}^{२}\text{भु२य} = \begin{cases} (\quad - \tfrac{१}{८}\text{इ}^{३} + \tfrac{१}{९६}\text{इ}^{५})\,\text{भुकग} + (\tfrac{१}{४}\text{इ}^{२} - \tfrac{१}{८}\text{इ}^{४})\text{भु२कग} \\ + (\tfrac{१}{४}\text{इ}^{३} - \tfrac{१५}{९६}\text{इ}^{५})\text{भु३कग} + \tfrac{१}{४}\text{इ}^{४}\text{भु४कग} + \tfrac{२५}{९६}\text{इ}^{५}\text{भु५कग} \\ \qquad ..(\text{आ}) \end{cases}$$

$$-\,\tfrac{२}{३}\text{म}^{३}\text{भु३य} = \begin{cases} (\quad + \tfrac{३}{९६}\text{इ}^{५})\text{भुकग} + (\quad - \tfrac{१}{८}\text{इ}^{४})\text{भु२कग} \\ + (\tfrac{१}{१२}\text{इ}^{३} - \tfrac{१२}{९६}\text{इ}^{५})\,\text{भु३कग} + \tfrac{१}{८}\text{इ}^{४}\text{भु४कग} + \tfrac{१५}{९६}\text{इ}^{५}\text{भु५कग} \\ \qquad ..(\text{इ}) \end{cases}$$

$$+\,\tfrac{१}{२}\text{म}^{४}\text{भु४य} = +(\quad - \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{५})\text{भु३कग} + \tfrac{१}{१२}\text{इ}^{४}\text{भु४कग} + \tfrac{१}{१६}\text{इ}^{५}\text{भु५कग} \quad ..(\text{ई})$$

$$-\,\tfrac{२}{५}\text{म}^{५}\text{भु५य} = \qquad + \tfrac{१}{८०}\text{इ}^{५}\text{भु५कग} \quad ..(\text{उ})$$

य च्या समीकरणांत म्हणजे (५) ह्या समीकरणांत (अ) (आ) (इ) (ई) (उ) ही पांच समीकरणें मिळविलीं म्हणजे ब ह्या स्पष्ट मंदकेंद्राची किमत कग ह्या मध्यम मंदकेंद्रानें येतें. ते समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें :—

$$\text{ब} = \begin{cases} \text{कग} + \text{२ इभुकग} + \tfrac{५}{४}\text{इ}^{२}\text{भु २ कग} \\ \quad + \tfrac{१३}{१२}\text{इ}^{३}\text{भु ३ कग} - \tfrac{१}{४}\text{इ}^{३}\text{भुकग} \\ \quad + \tfrac{१०३}{९६}\text{इ}^{४}\text{भु ४ कग} - \tfrac{११}{२४}\text{इ}^{४}\text{भु २ कग} \\ \quad + \tfrac{१०९७}{९६०}\text{इ}^{५}\text{भु ५ कग} - \tfrac{६४५}{९६०}\text{इ}^{५}\text{भु ३ कग} \\ \quad + \tfrac{५०}{९६०}\text{इ}^{५}\text{भुकग} \end{cases}$$

३२६. वर जें समीकरण सिद्ध केले तें आणि लेख ३२० मधील समीकरण ही दोन्ही अगदी सूक्ष्मपणें बरोबर आहेत. हीं दोन समीकरणें दोन प्रकारांनी सिद्ध केली असून अगदी ज्याअर्थी एकरूप आली आहेत त्याअर्थी तीं समीकरणें बरोबर आणि शुद्ध आहेत. आणि ज्या कल्पनेनें गणित केले आहे ती कल्पनाही सत्य आहे. सकृतदर्शनी ह्या दोन्ही समीकरणांत जें भिन्नत्व दिसतें तें भिन्नत्व नाहीं. पूर्व समीकरणांत ज्या ब आणि कग ह्या संख्या आहेत त्या कत ह्या दिशेपासून मोजलेल्या आहेत (ले. ३२२ आकृ. पहा) आणि वरच्या समीकरणातील संख्या क अ रेषेपासून मोजल्या आहेत. म्हणून पूर्वीचा ब कोन हा प्रस्तुत ब कोनापेक्षा तकअ कोनाने मोठा आहे. प्रस्तुत ब कोन बा कोनाने दाखविला तर

$$ब = बा + त \text{ किंवा } बा = ब - त$$

तसेंच $कग = काग + त$ किंवा $काग = कग - त$

एथे त म्हणजे केंद्र सन्निधान आहे, ते उ ने लिहिले तर प्रस्तुत समीकरणांतील ब चे जागीं ब – उ आणि कग चे जागीं (कग – उ) लिहा. ते केंद्रासुद्धा सर्व स्थानीं लिहा आणि दोन्ही समीकरणांत उ मिळवा म्हणजे $ब = कग + २ इभु (कग - उ) + इ$ असें त्यास स्वरूप येईल.

३२७. ह्या पद्धतीनें ग्रहाची चल त्रिज्या र हिची किंमत, बृ हे बृहदक्षाचे अर्ध, इ ही केंद्रच्युति आणि कग हे ग्रहाचे मध्यम मंदकेंद्र यांच्या साहाय्यानें तयार करण्याचे समीकरण सिद्ध होते त्याची सिद्धता खालीं दाखवीत आहे :— लेख ३२३ पहा.

$$कप = र$$

$$कप \; कोभुब = र \; कोभुब = बृ \; कोभुय - बृ \; इ$$

$$\frac{र}{बृ} = \frac{कोभुय - इ}{कोभुब}$$

पण

$$कोभुब = \frac{कोभुय - इ}{१ - इ \; कोभुय}$$

म्हणून

$$\frac{र}{बृ} = \frac{कोभुय - इ}{कोभुब} = (कोभुय - इ) \div \frac{कोभुय - इ}{१ - इ \; कोभुय}$$

$$= (कोभुय - इ) \times \frac{१ - इकोभुय}{कोभुय - इ} = १ - इ \; कोभुय$$

$$\frac{र}{बृ} = १ - इ \; को \; भु \; य \qquad \ldots . (१)$$

ह्या समीकरणातील य ह्या संख्येच्या जागीं आपणास कग ही संख्या आणता येते. वर सिद्ध केले आहे कीं,

$$\text{य} = \text{कग} + \text{इभुकग} + \tfrac{१}{२}\text{इ}^{२}\text{भु}\,२\,\text{कग} + \tfrac{३}{८}\text{इ}^{३}\text{भु}\,३\,\text{कग} - \tfrac{१}{८}\text{इ}^{३}\text{भुकग}$$

ह्या समीकरणाची दोन्हीं पेट्यांची कोभुजज्या लेख २६१ च्या आधारें केली ती खालीं लिहिल्याप्रमाणें येतें,

$$\begin{aligned}\text{कोभुय} = \text{कोभुकग} &- \tfrac{१}{२}\text{इ}\,(१ - \text{कोभु}\,२\,\text{कग})\\ &- \tfrac{१}{८}\text{इ}^{२}\,(३\,\text{कोभुकग} - ३\,\text{कोभु}\,३\,\text{कग})\\ &- \tfrac{१}{३}\text{इ}^{३}(\text{कोभु}\,२\,\text{कग} - \text{कोभु}\,४\,\text{कग})\end{aligned}$$

ह्या समीकरणास इ ह्या केंद्रच्युतीनें गुणून तें समीकरण दोन्ही पेटे १ = १ ह्या संख्यातून वजा केले तेव्हां

$$\frac{\text{र}}{\text{बृ}} = १ - \text{इकोभुय} = \begin{cases} + (१ - \text{इकोभुकग})\\ + \tfrac{१}{२}\text{इ}^{२}\,(१ - \text{कोभु}\,२\,\text{कग})\\ + \tfrac{१}{८}\text{इ}^{३}\,(३\,\text{कोभुकग} - ३\,\text{कोभु}\,३\,\text{कग})\\ + \tfrac{१}{३}\text{इ}^{४}\,(\text{कोभु}\,२\,\text{कग} - \text{कोभु}\,४\,\text{कग})\end{cases}$$

• •

प्रकरण बारावें

द्विधा आकर्षण निर्मित कक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणें

३२८. बुधादि ग्रहांना आकर्षण करणारा एकटा सूर्यच असता, किंवा चंद्राला पृथ्वीशिवाय इतर कोणी आकर्षण करीत नसतां तर, त्याची त्याच्या कक्षेतील स्थानें मागच्या प्रकरणांत सिद्ध केलेल्या सिद्धांतांनीं ठरवितां आलीं असतीं. परंतु वस्तुस्थिति तशी नाहीं. ग्रहाला सूर्य हा आकर्षण करितो तसेंच त्याला इतर प्रत्येक ग्रह आकर्षण करीतो. तसेंच चंद्राला पृथ्वी आकर्षण करिते, आणि सूर्यही आकर्षितो, इतकेच नव्हे तर ग्रह सुद्धा चंद्राला आकर्षितात. हें आकर्षण कार्य आकर्षकाच्या प्रकृत्यंशाच्या सम प्रमाणानें आणि आकर्षक व आकर्षित यांच्यामधील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असते. यामुळें विवक्षित ग्रहाच्या स्थानांत भिन्नत्व येतें. त्या भिन्नत्वासह ग्रहस्थानाचा विचार करावयाचा आहे. त्याचा उपक्रम ह्या प्रकरणांत करावयाचा आहे.

३२९. जर एखादा पदार्थ मध्याकर्षी प्रेरणेनें उत्पन्न होणाऱ्या आपल्या कक्षेत गमन करीत असतां त्यास तिसरा एखादा पदार्थ आकर्षण करूं लागला तर, त्याच्या गमनमार्गात व त्याच्या गतीत भिन्नत्व येईल आणि त्याची कक्षा भिन्न होईल. अशा पदार्थाच्या गतीविषयीं सामान्य स्वरूपानें आपण विचार करूं. ह्या विचारांत, विवक्षित ग्रह, सूर्य आणि इतर ग्रह यांचा समावेश होईल, तसा चंद्र, पृथ्वी, सूर्य आणि ग्रह यांचाही विचार होईल. कोणत्याही पदार्थाचें पोकळी-तील स्थान निश्चित करण्यास तीन गोष्टींची जरूरी असते. त्या तीन गोष्टी ग्रहा-संबंधीं अशा आहेत. (१) तो ग्रह क्रांतिवृत्ताच्या पातळी बाहेर अंशात्मक किती अंतरावर आहे, ज्याला आपण 'शर' म्हणतो ती पहिली गोष्ट. (२) कक्षेच्या केंद्रापासून किती अंतरावर आहे, ती रेषा. तिला आपण 'चलत्रिज्या' म्हणतो. ही दुसरी गोष्ट. आणि (३) कक्षेच्या कोणत्या भागी आहे, म्हणजे कक्षेतील ठरविलेल्या आरंभ स्थानापासून किती अंतरावर आहे, ते कोनात्मक अंतर. ह्याला आपण 'भोग' म्हणतो. ही तिसरी गोष्ट. ह्यावरून शर, चल त्रिज्या आणि भोग यांचा निर्णय कक्षेच्या इतर पदानीं आपणास ठरवावयाचा आहे.

३३०. ही तीन माने ठरविण्याकरिता ग्रहाच्या कक्षेची समीकरणें सिद्ध केली पाहिजेत. समीकरणाची समानता, एकंदर आकर्षण आणि त्यामुळें होणारी वेग-वृद्धि हिची, कक्षेच्या इतर पदाशीं समानता जुळवितां येते. एकंदर आकर्षण घडत असतां, त्या आकर्षणाच्या कार्यानें होणारी गतिवृद्धि, शर, चलत्रिज्या व भोग यांच्या दिशेंत कक्षेच्या पदांनीं दाखवितां येते. आणि त्यांचें समीकरण जुळवितां येते. ह्या पद्धतीनें पुढें प्रतिपादन केलें आहे.

३३१. ग्रहाला जो वेग आहे तो सर्व आकर्षणांनीं उत्पन्न झाला आहे. त्या वेगाची वृद्धि प्रति क्षणीं किती, जी असेल तिचें पृथःकरण चल त्रिज्येशी समांतर आणि चल त्रिज्येवर लंब किती असते हे कक्षेच्या पदांनीं नवव्या प्रकरणाच्या शेवटीं (लेख २८८) सिद्ध केलें आहे. समीकरण (२१) व (२२) पहा. ती खालीं दिली आहेत :—

$$\text{चल त्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि} = \frac{\text{सू}^{२}\text{र}}{\text{सू क}^{२}} - \text{र}\left(\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right)^{२} \quad \ldots \quad (१)$$

$$\text{चल त्रिज्येवर लंब अशी वेगवृद्धि} = \frac{१}{\text{र}}\,\frac{\text{सू}}{\text{सू क}}\left(\text{र}^{२}\,\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right) \quad \ldots \quad (२)$$

ह्यापैकीं समीकरण (२) ही चल त्रिज्येवर लंब अशी वेगवृद्धि आहे. परंतु भोगाची दिशा चल त्रिज्येवर लंब अशी ठरावीक अशा दोन बिंदूत असते सर्व कक्षेवर नसते. कक्षा वर्तुळाकृति असती तर स्पर्श रेषा चल त्रिज्येवर लंब असते. तशी दीर्घवर्तुळाकृति कक्षेची स्पर्शरेषा चल त्रिज्येवर लंब नसते. आणि ग्रहाच्या गमनाची दिशा, त्याच्या वक्र गमनमार्गाच्या वक्ररेषेशी जी स्पर्श रेषा त्या पदार्थाच्या स्थान बिंदूतून जाईल, त्या स्पर्शरेषेच्या दिशेची असते. यास्तव ह्या वेगाचें पृथः-करण करून, चल त्रिज्येशी समांतर आणि स्पर्शरेषेशीं समांतर वेगवृद्धि काढूं. तें विवरण पुढें लिहिल्याप्रमाणें.

३३२. वरच्या लेखांतील समीकरण (२) मधील वेगवृद्धि यन दिशेंतील आहे. (सप चल त्रिज्येवर यन लंब आहे) आकृति पहा.

हिचे पृथःकरण यप आणि पस दिशेंत करूं. प बिंदूतून पस वर पम लंब केला आणि त्याचा यन एवढा पम तुकडा पाडला, तसेंच म बिंदूतून पस शी मक समांतर काढिली. या कृतीनें झालेला पमक काटकोन त्रिकोण यनप त्रिकोणाशीं एकरूप आहे. वरच्या

लेखातील समीकरण (२) मधील वेगवृद्धि. हिला आपण ध म्हणूं ती यन किंवा पम परिमाणाची मानिली तर यप परिमाणाची वेगवृद्धि त्रैराशिकाने निघेल, ती अशी

$$यन : यप :: ध : \frac{यप}{यन} \times ध$$

पण

$$\frac{यप}{यन} = \frac{सप}{सय} = \frac{चल\ त्रिज्या}{स्पर्श\ रेषेवरील\ लंब} = \frac{र}{ल}$$

$\frac{र}{ल}$ ह्या अपूर्णांकास आपण थ अशी संज्ञा देऊं.

तेव्हां

$$स्पर्शरेषेशी\ समांतर\ वेगवृद्धि = थ \frac{सू}{सूक}\left(र^{२}\frac{सूब}{सूक}\right) \quad .. \quad (१)$$

वरच्या प्रमाणेच

$$यन : पन : :: ध : \frac{पन}{यन} \times ध$$

पण

$$\frac{पन}{यन} = \frac{पय}{यस} = कोस्प\ (सपय) = \frac{१}{स्प\ (सपय)} = \frac{१}{र\frac{सूब}{सूर}}$$

$$= \frac{१}{र}\frac{सूर}{सूब} \ldots\ldots [लेख\ २९८\ (६)]$$

तेव्हां चल त्रिज्येवर लंब असलेल्या वेगवृद्धीच्या पृथःकरणातील दुसरा भाग खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल. पहिला भाग स्पर्शरेषेशी समांतर वेगवृद्धि हा भाग ध वेगवृद्धि प्रमाणेच म्हणजे धन आहे तो जशाचा तसाच लिहिला. पण हा खाली लिहिलेला दुसरा भाग चल त्रिज्या कमी करणारा आहे म्हणून त्यास ऋण लिहिले आहे ; चल त्रिज्येशी समांतर असा ध वेगवृद्धीचा पृथःभाग

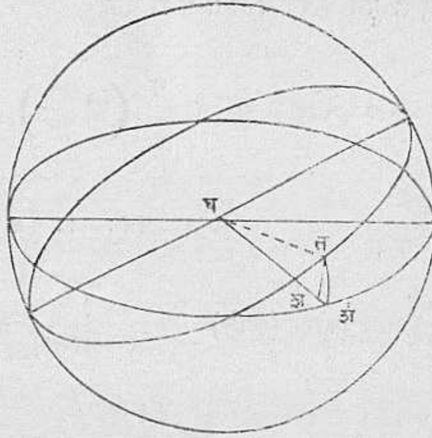
$$= \frac{१}{र}\frac{सू\ र}{सू\ ब} = \frac{१}{र}\frac{सू\ र}{सू\ ब} \times ध = \frac{१}{र^{३}}\frac{सूर}{सूब} \times \frac{सू}{सू\ क}\left(र^{२}\frac{सूब}{सूक}\right)$$

चल त्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि ले. ३३१ (१) प्रमाणे आहे, त्यांत ही ऋण करावयाची म्हणून

चल त्रिज्येशी समांतर वेगवृद्धि =

$$\frac{सू^{२}र}{सू\ क^{२}} - र\left(\frac{सू\ ब}{सू\ क}\right) - \frac{१}{र^{३}}\frac{सू\ र}{सू\ ब}\cdot\frac{सू}{सू\ क}\left(र^{२}\frac{सू\ ब}{सू\ क}\right) \quad .. \quad (२)$$

३३३. ग्रहाचा शर कोनात्मक असतो. परंतु आमची सर्व परिमाणें रेषा स्वरूपीं घेतली आहेत. प्रेरणा रेषा स्वरूपी गति रेषा स्वरूपी तसा कोन ही रेषा स्वरूपी. म्हणून शर हाही रेषा स्वरूपीच घेऊं. शर म्हणजे ग्रहापासून क्रांतिवृत्तावर टाकलेला लंब. हा लंब वर्तुळाच्या कंसाचा भाग असतो. जसें तशं शराचे जागी तशं ही वक्ररेषा न दाखविता तश ही सरळ रेषा श अक्षराने दाखविली आहे. तश ही रेषा क्रांतिवृत्तावर टाकलेला लंब आहे, तो घशं हृचा चल त्रिज्येवर श स्थानीं पडला आहे. परंतु घशं ही घत रेषेची छाया आहे.



आता तश ला दिशेतील गतिवृद्धि किती हे आपणास ठरवावयाचे आहे. तश ही रेषा आहे हृचा रेषेचा म्हणजे ही रेषा जितकी रेषा परिमाणे असेल त्या संख्येचा द्वितीय सूक्ष्मांशगुण हा त्या दिशेतील गतिवृद्धि दाखवितो. लेख २८५, २८६ एथे गतिवृद्धि म्हणजे वेगवृद्धि समजावी. हृचा तत्वानुसार शराच्या दिशेतील गतिवृद्धि खालीं लिहिल्याप्रमाणें असते.

३३४. श ही शराची स्पर्शरेषा आहे. तेव्हां

$$श = स्पर्शरेषा \ (तघश) = \frac{तश}{घश}$$

पण घश = चल त्रिज्या = र

म्हणून तश रेषा = र × स्पर्शरेषा (तघश) = रश.

रश हृचा संख्येचा कालासंबंधी द्वितीय सूक्ष्मांशगुण जो येईल ती शराच्या दिशेतील गतिवृद्धि होईल.

$$शराच्या \ दिशेतील \ गतिवृद्धि = \frac{स२ \ (र \ श)}{सू२ \ क^{२}} \qquad .. \quad (३)$$

३३५. एखाद्या ग्रहावर किंवा उपग्रहावर बाह्य प्रेरणा कार्य करीत असल्या तर गतिवृद्धि कशाप्रकारें होते हें वरच्या लेखांमध्ये स्पष्ट केलें आहे. आकर्षणाचें कार्य ती प्रेरणा होय. आणि प्रेरणेचें कार्य गतिवृद्धि किंवा वेगवृद्धि हे आहे. चल त्रिज्येशी समांतर ज्या प्रेरणा असतील त्या सर्वांचे एकीकरण प्र परिमाणाचे आहे असे घेऊं. तसेच स्पर्श रेषेच्या दिशेतील सर्व प्रेरणांची एकूणांत त परिमाणांची आहे, आणि शराच्या दिशेंतील म्हणजे क्रांतिवृत्तावर लंब अशा दिशांतील प्रेरणांची एकंदरी जी होईल ती ष परिमाणांची आहे असें घेऊं. ह्या प्र त ष प्रेरणा म्हणजे वेगवृद्धि किती हे सामान्य स्वरूपानें वर सिद्ध केल्या आहेत त्याच्या किंमती खालीं लिहिल्या-प्रमाणें. ह्यांतील प्र प्रेरणा ग्रहाची चल त्रिज्या कमी करणारी अशी मोठी आहे. म्हणून ही प्रेरणा — (ऋण) आहे. त प्रेरणा भोग वाढविणारी मोठी म्हणून ती + (धन) आहे. ग्रहाचा उत्तर शर (धन) म्हणण्याचा संकेत ठरलेला आहे. परंतु आकर्षणाने शर कमी होतो म्हणून ष प्रेरणा — (ऋण) आहे. ह्या स्पष्टी-करणानुसार (—प्र) (+त) (—ष) प्रेरणांचीं सूक्ष्मांश समीकरणें खाली लिहिलीं आहेत :—

$$\frac{\text{सू}^2\text{र}}{\text{सू क}^2} - \text{र}\left(\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right)^2 - \frac{1}{\text{र}^2}\cdot\frac{\text{सू र}}{\text{सू ब}}\cdot\frac{\text{सू}}{\text{सू क}}\left(\text{र}^2\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right) = -\text{प्र}\ldots(1)$$

$$\text{थ}\frac{\text{सू}}{\text{सू क}}\left(\text{र}^2\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right) = +\text{त}\ldots(2)$$

$$\frac{\text{सू}^2}{\text{सू क}^2}(\text{र श}) = -\text{ष}\ldots(3)$$

ह्या सूक्ष्मांश समीकरणातील पदें पुष्कळच गुंतागुंतीची आहेत. हीं समीकरणें सोडवून प्र त ष प्रेरणांच्या किंमती कक्षेच्या पदांनीं दाखवावयाच्या आहेत याचें स्पष्टी-करण पुढच्या लेखांत करूं.

३३६. प्रथम दुसऱ्या म्हणजे त प्रेरणेच्या समीकरणाचें स्पष्टीकरण करूं—

$$\text{थ}\frac{\text{सू}}{\text{सू क}}\left(\text{र}^2\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right) = \text{त}$$

समीकरण थ ने भागिलें—

$$\frac{\text{सू}}{\text{सू क}}\left(\text{र}^2\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right) = \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

परंतु

$$\text{र}^2\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}} = \text{ज} \qquad [\text{लेख } २९३]$$

म्हणून

$$\frac{\text{सू ज}}{\text{सू क}} = \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

एथे ज ही स्थीर संख्या आहे हिचा शून्यलब्धिगुण ० असला पाहिजे. पण एथे ज ही चल संख्या झाली आहे. कारण कक्षेच्या केंद्रस्थ एकाच आकर्षणाचें कार्य असता ज ही संख्या स्थीर असते. आता आपण केंद्रस्थ आकर्षणाहून अन्य आकर्षणाचें कार्य ग्रहावर होत आहे असे म्हणून गणित करीत आहोत. म्हणून ज ची किंमत एथें भिन्न आहे. तिला आपण 'जा' म्हणू. तेव्हां

$$\frac{\text{सू जा}}{\text{सू क}} = \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

ह्या समीकरणास

$$\text{२ जा} = \text{२ र}^{2} \frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}$$

ह्याने गुणिले

$$\text{२ जा} \frac{\text{सू जा}}{\text{सू क}} = \text{२} \frac{\text{त}}{\text{थ}} \cdot \text{र}^{2} \frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}$$

दोन्ही पेटचाना $\frac{\text{सू क}}{\text{सू ब}}$ नें गुणिलें तेव्हां

$$\text{२ जा} \frac{\text{सू जा}}{\text{सू क}} \times \frac{\text{सू क}}{\text{सू ब}} = \text{२} \frac{\text{त}}{\text{थ}} \cdot \text{र}^{2} \frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}} \times \frac{\text{सू क}}{\text{सू ब}}$$

$$\text{२ जा} \frac{\text{सू जा}}{\text{सू ब}} = \text{२} \frac{\text{त}}{\text{थ}} \text{ र}^{2}$$

ह्या तयार झालेल्या समीकरणाचें संकलन करिता येते एथे $\text{२ जा} \frac{\text{सू जा}}{\text{सू ब}}$ हा जा^{2} ह्या संख्येचा किंवा जा $\times$ जा ह्या गुणाकाराचा शून्यलब्धिगुण आहे याचें संकलन जा आहे, लेख २०१. कारण संकलन म्हणजे शून्यलब्धिगुणापासून पूर्व संख्या आणणें म्हणजे अवलंबी पद शोधणें असा संकलनाचा अर्थ आहे, लेख २४७ पहा. उजवी-कडच्या पेटचाचे संकलन सध्या करिता येत नाहीं. त प्रेरणाची किंमत तयार केल्या-नंतर तें संकलन करिता येईल. याकरितां $\left(\text{२ र}^{2} \frac{\text{त}}{\text{थ}}\right)$ ह्या पदाचे संकलन करावयाचे आहे आणि ते ब ह्या विकारी पदासंबंधीं करावयाचे अशा अर्थाचे पद आपण त्या स्थानी लिहूं. ते लेखन असें––

$$\text{ॐ} \left(\text{२ र}^{2} \frac{\text{त}}{\text{थ}}\right) \text{सू ब}$$

संकलनांत स्थीर संख्या उत्पन्न होते. जा ची विकार रहित जी किंमत तीच संकलनांत उत्पन्न झालेली स्थीर होय. जा ची विकार रहित किंमत ज आहे, तेव्हां ज ही संकलनांत उत्पन्न झालेली स्थीर संख्या होय म्हणून––

$$\text{जा}^{2} = \text{ज}^{2} + \text{ॐ}\left(\text{२ र}^{2} \frac{\text{त}}{\text{थ}}\right) \text{सू ब}$$

पण

$$\text{जा} = \text{र}^{२} \, \frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}$$

म्हणून

$$\left(\text{र}^{२} \, \frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}}\right)^{२} = \text{ज}^{२} \left\{ १ + २ \int \left(\frac{\text{त र}^{२}}{\text{ज}^{२} \, \text{थ}} \right) \text{सू ब} \right\}$$

संकलनाला स्थीर संख्येनें गुणावयाचें किंवा भागावयाचें असतां जिचे संकलन करावयाचे असेल तिला गुणिले किंवा भागिले असता कार्यात दोष येत नाहीं. वरच्या समीकरणाचें वर्गमूळ काढून $\text{र}^{२}$ ने भागिलें. आणि भागाकारांत $\text{र}^{२} = \frac{१}{\text{व}^{२}}$ ही किंमत लिहिली. तेव्हा,

$$\frac{\text{सू ब}}{\text{सू क}} = \text{ज व}^{२} \left\{ १ + २ \int \left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{२} \, \text{व}^{२} \, \text{थ}} \right) \text{सू ब} \right\}^{\frac{१}{२}}$$

१ = १ यास समीकरणानें भागिलें. किंवा उलट पालट केली तेव्हां

$$\frac{\text{सू क}}{\text{सू ब}} = \frac{१}{\text{ज}^{२} \, \text{व}^{२}} \left\{ १ + २ \int \left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{२} \, \text{व}^{२} \, \text{थ}} \right) \text{सू ब} \right\}^{-\frac{१}{२}} \quad \ldots(२)$$

हे ग्रहाच्या भोगाचें आणि कालाचें सूक्ष्मांश समीकरण होय. याच्या संकलनानें कालाची संख्या ब च्या किंमतीनें येते.

३३७. कक्षेचें पहिलें सूक्ष्मांश समीकरण चल त्रिज्येचें आहे. त्याची गतिवृद्धि प्र प्रेरणेनें होते. म्हणून प्र प्रेरणेचें समीकरण तेंच चल त्रिज्येचें होय तें खालीं लिहिल्या-प्रमाणें आहे :—

$$\frac{\text{सू}^{२}\text{र}}{\text{सूक}^{२}} - \text{र} \left(\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \right)^{२} - \frac{१}{\text{र}^{२}} \, \frac{\text{सूर}}{\text{सूब}} \, \frac{\text{सू}}{\text{सूक}} \left(\text{र}^{२} \, \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} \right) = - \text{प्र}$$

ह्या समीकरणातील एक एक पदाचें स्वरूप आपल्या सोयी प्रमाणें बनऊ. तेव्हां

$$\frac{\text{सूर}}{\text{सूब}} = \frac{\text{सू}}{\text{सूब}} (१ \div \text{व}) = - \, \frac{१}{\text{व}^{२}} \, \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}$$

तसेच

$$\text{र}^{२} \, \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = \text{जा}, \text{ आणि } \text{र}^{२} = \frac{१}{\text{व}^{२}}$$

तेव्हां

$$\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = \text{जा व}^{२}$$

आणि

$$\frac{\text{सूर}}{\text{सूक}} = \frac{\text{सूर}}{\text{सूब}} \times \frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$$

$$= -\frac{१}{\text{व}^{२}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}} \times \text{जाव}^{२} = -\text{जा}\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}}$$

$$\frac{\text{सू}^{२}\text{र}}{\text{सू क}^{२}} = \frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(-\text{जा}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right)$$

$$= -\frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} - \text{जा}\frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) \dots (\text{अ})$$

$$-\text{र}\left(\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}\right)^{२} = -\frac{१}{\text{व}}\left(\text{जाव}^{२}\right)^{२}$$

$$= -\text{व}^{३}\,\text{जा}^{२} \dots\dots\dots \quad (\text{ब})$$

$$-\frac{१}{\text{र}^{२}}\frac{\text{सूर}}{\text{सूब}}\frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(\text{र}^{२}\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}\right) = -\text{व}^{२} \times \left(-\frac{१}{\text{व}^{२}}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) \times \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}}$$

$$= \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \times \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \dots\dots\dots \quad (\text{क})$$

समीकरण (अ) (ब) आणि (क) यांचीं एकूणात ४ पदें होतात तीं एकत्र केली म्हणजे

$$-\frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} - \text{जा}\frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) - \text{व}^{३}\text{जा}^{२} + \frac{\text{सूजा}}{\text{सूक}}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} = -\text{प्र}$$

$$+\text{जा}\frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) + \text{व}^{३}\text{जा}^{२} = +\text{प्र}$$

ह्या समीकरणाला $\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \frac{१}{\text{जाव}^{२}}$ यांनी गुणिलें तेव्हां

$$\text{जा}\frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) \times \frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} + \text{जाव} = \frac{\text{प्र}}{\text{जाव}^{२}}$$

$$\text{जा}\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left(\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) + \text{जाव} = \frac{\text{प्र}}{\text{जाव}^{२}}$$

$$\text{जा}^{२}\left\{\frac{\text{सू}^{२}\text{व}}{\text{सूब}^{२}} + \text{व}\right\} = \frac{\text{प्र}}{\text{व}^{२}}$$

$$\frac{\text{प्र}}{\text{व}^{२}} = \text{जा}^{२}\left\{\frac{\text{सू}^{२}\text{व}}{\text{सूब}^{२}} + \text{व}\right\}$$

$$= \text{ज}^{२}\left\{१ + २\text{ठँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}\text{थ}}\right)\text{सूब}\right\}\left\{\frac{\text{सू}२\text{व}}{\text{सूब}^{२}} + \text{व}\right\}$$

$$\frac{\text{प्र}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}} = \left\{\frac{\text{सू}२\text{व}}{\text{सूब}^{२}} + \text{व}\right\} + २\text{ठँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}\text{थ}}\right)\text{सूब}\left\{\frac{\text{सू}२\text{व}}{\text{सूब}^{२}} + \text{व}\right\}$$

$$\frac{\text{सू}२\text{व}}{\text{सूव}^{२}} + \text{व} = \frac{\text{प्र}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}} - २\text{ठँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}\text{थ}}\right)\text{सूब}\left\{\frac{\text{सू}२\text{व}}{\text{सूब}^{२}} + \text{व}\right\} \quad ..(१)$$

३३८. कक्षेचें तिसरें सूक्ष्मांश समीकरण शराचें आहे. ते ष प्रेरणेचें आहे. ते संकलनाला योग्य असे करूं. तें असें

$$\frac{\text{सू}^{२}(\text{र श})}{\text{सूक}^{२}} = -\text{ष}$$

$$\text{र श} = \frac{१}{\text{व}} \times \text{श} = \frac{\text{श}}{\text{व}}$$

याचा व संबंधी लब्धिगुण काढूं

$$\frac{\text{सू}(\text{रश})}{\text{सूब}} = \frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left(\frac{\text{श}}{\text{व}}\right) = \left\{\text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}\frac{१}{\text{व}^{२}}$$

ह्या समीकरणाला $\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = \text{जा व}^{२}$ यांनी गुणिलें,

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left(\frac{\text{श}}{\text{व}}\right)\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = \frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(\frac{\text{श}}{\text{व}}\right)$$

म्हणून
$$\frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left(\frac{\text{श}}{\text{व}}\right) = \left\{\text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}\text{जा}$$

ह्याचा क संबंधी लब्धिगुण केला तेव्हा.

$$\frac{\text{सू}^{२}}{\text{सूक}^{२}}\left(\frac{\text{श}}{\text{व}}\right) = \frac{\text{सू}}{\text{सूक}}\left[\left\{\text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}\text{जा}\right]\text{जाव}^{२}\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}}$$

$$= \frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left[\left\{\text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}\text{जा}\right]\text{जाव}^{२} = -\text{ष}$$

$$-\text{ष} = \text{जाव}^{2}\left[\frac{\text{सूजा}}{\text{सूब}}\left\{\text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}\right.$$

$$\left. + \text{जा}\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left\{\text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}\right]$$

$$= \text{जा}\frac{\text{सूजा}}{\text{सूब}}\text{व}^{3}\left\{\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{श}}{\text{व}}\frac{\text{सूव}}{\text{सूव}}\right\}$$

$$+ \text{जा}^{२}\text{व}^{२}\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left\{\text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}$$

पण $\text{जा}\frac{\text{सूजा}}{\text{सूव}} = \frac{\text{त}}{\text{थव}^{२}}$ [लेख ३३६]

$$\text{जा}^{२}\text{व}^{२}\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left\{ \text{व}\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \text{श}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right\}$$

$$= \text{जा}^{२}\text{व}^{२}\left\{ \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \cdot \frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} + \text{व}\frac{\text{सू२श}}{\text{सूब}^{२}} \right\}$$

$$- \text{जा}^{२}\text{व}^{२}\left\{ \frac{\text{सूश सूव}}{\text{सूब सूब}} + \text{श}\frac{\text{सू२व}}{\text{सूव}^{२}} \right\}$$

$$-\text{ष} = \frac{\text{त}}{\text{थव}^{२}}\text{व}^{३}\left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{श}}{\text{व}}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right\} + \text{जा}^{२}\text{व}^{३}\frac{\text{सू२श}}{\text{सूब}^{२}}$$

$$- \text{श}\frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^{२}}\text{जा}^{२}\text{व}^{२} \quad \ldots\ldots \quad (\text{अ})$$

$$\frac{\text{प्र}}{\text{व}^{२}} = \text{जा}^{२}\left\{ \frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^{२}} + \text{व} \right\}$$ [लेख ३३७]

ह्याला $\text{शव}^{२}$ यानें गुणिलें तेव्हां.

$$\text{प्रश} = \text{जा}^{२}\text{व}^{२}\text{श}\left\{ \frac{\text{सू२व}}{\text{सूब}^{२}} \right\} + \text{जा}^{२}\text{व}^{३}\text{श} \quad \ldots \quad \ldots \quad (\text{ब}).$$

(ब) समीकरणांत (अ) समीकरण मिळविले, आणि मिळवणीस $\text{जा}^{२}\text{व}^{३}$ नें भागिले तेव्हां

$$\frac{\text{प्रश} - \text{ष}}{\text{जा}^{२}\text{व}^{३}} = \frac{\text{सू२श}}{\text{सूब}^{२}} + \text{श} + \frac{\text{त}}{\text{थव}^{२}}\left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{श}}{\text{व}}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right\} \times \frac{१}{\text{जा}^{२}}$$

परंतु

$$\text{जा}^{२} = \text{ज}^{२} + \text{ॐ}\left(\text{२र}^{२}\frac{\text{त}}{\text{थ}} \right)\text{सूव}$$

$$\frac{\text{जा}^{२}}{\text{ज}^{२}} = \left\{ १ + \frac{१}{\text{ज}^{२}}\text{ॐ}\left(२\frac{\text{त}}{\text{व}^{२}\text{थ}} \right)\text{सूव} \right\}$$

$$= \left\{ १ + २\text{ॐ}\left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}\text{थ}} \right)\text{सूब} \right\}$$

यानें वरचें समीकरण गुणिले, तेव्हां

$$\frac{\text{प्रश} - \text{ष}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}} = \left[\left\{ \frac{\text{सू२श}}{\text{सूव}^{२}} + \text{श} \right\} + \frac{\text{त}}{\text{व}^{२}\text{थ}}\left\{ \frac{\text{सूश}}{\text{सूव}} - \frac{\text{श}}{\text{व}}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \right\}\frac{१}{\text{ज}^{२}} \right]$$

$$\times \left\{ १ + २\text{ॐ}\left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}\text{थ}} \right)\text{सूब} \right\}$$

ह्यावरून

$$\left\{\frac{\text{सू२श}}{\text{सूब}^{2}} + \text{श}\right\} = \frac{\text{प्रश—ष}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{3}} - \frac{\text{त}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{2}\text{थ}}\left\{\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{श}}{\text{व}}\,\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right\}$$

$$-\left[\frac{\text{त}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{2}\text{य}}\left\{\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{शसूव}}{\text{वसूब}}\right\} + \left\{\frac{\text{सू२श}}{\text{सूब}^{2}} + \text{श}\right\}\right]$$

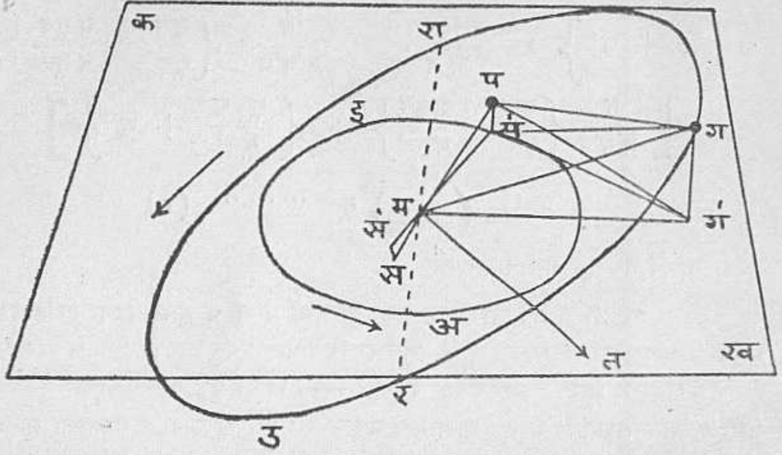
$$\times \text{२ ठँ} \left(\frac{\text{त}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{2}\text{थ}}\right) \text{सूब} \quad \cdots\cdots\cdots \; (\text{३})$$

हे शराचें सूक्ष्मांश समीकरण होय.

३३९. वर जीं समीकरणें सिद्ध केली त्यामध्यें प्र त ष ह्या प्रेरणा लिहिल्या आहेत. ह्या प्रेरणा कोणत्या याचें वर्णन वर दिले आहे परंतु त्या किती याचें स्पष्टीकरण करावयाचे आहे. आणि त्या किंमती व्यक्त किंवा पुढे व्यक्त करिता येतील अशा सामान्य संख्यांनी कशा दाखविता येतील याचाही खुलासा करावयाचा आहे. ह्या प्रेरणाच्या किंमती आकर्षणाच्या सिद्धांताधारें काढिता येतात. तो प्रकार खालीं दाखवीत आहे. ह्या किंमती रेषात्मक आहेत, ह्या संख्या वरच्या समीकरणामध्यें लिहून त्यांची संकलनें करावयाची आहेत. म्हणजे चलत्रिज्या, शर, भोग हें सापडतात.

३४०. गुरुत्वाकर्षणाविषयीं ग्रंथारंभीच वर्णन केलें आहे. हें आकर्षण गतिवृद्धि किंवा वेगवृद्धि उत्पन्न करितें. हें आकर्षक आकर्षित ह्या दोन पदार्थाच्या गुरुत्वमध्यांमधील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत असते ; आणि आकर्षक पदार्थाच्या प्रकृत्यंशाच्या समप्रमाणांत असतें. सोप्या भाषेनें म्हणावयाचे म्हणजे वजनाच्या समप्रमाणांत असते. परंतु वजन हें परिमेय आपण पृथ्वीच्या आकर्षणास म्हणतो आणि तेही पृथ्वीच्या भिन्न भागी भिन्न असते. म्हणजे समुद्र सपाटीवर आणि हिमालयाच्या शिखरावर एकाच पदार्थाचें वजन भिन्न असतें. म्हणून वजन शब्दानें प्रकृत्यंश दाखविता येत नाहींत.

३४१. प हा पदार्थ स च्या आकर्षणानें आपल्या कक्षेत फिरत आहे त्याची कक्षा अपंइ ही आहे. प ही पृथ्वी असेल तर प आणि पं हे दोन्ही बिंदु एकत्र असतील, म्हणून अपंइ हें क्रांतिवृत्त आहे आणि कख ही क्रांतिवृत्ताची पातळी आहे. ग हा तिसरा पदार्थ आहे. ह्याचें आकर्षण प पदार्थावर घडतें, यामुळें प च्या गमनांत होणारा फेरफार विचारांत घ्यावयाचा आहे. हा विचार सामान्यत्वें करावयाचा आहे. तथापि, स हा सूर्य, प हा ग्रह, ज्याच्या गतीचा आपण विचार करीत आहोत तो, आणि ग हा दुसरा ग्रह, जो प ला आकर्षित आहे तो. असें समजून पुढील प्रतिपादन केलें आहे. हाच विचार चंद्राच्या गतिसंबंधी करिताना स स्थानीं पृथ्वी, प स्थानीं चंद्र आणि ग स्थानीं सूर्य असे मानावयाचे आहे.



३४२. वरच्या आकृतीत स हा सूर्य, प हा विवक्षित ग्रह आणि ग हा आकर्षक ग्रह आहे. असें समजा, सं पं गं ह्या त्याच्या क्रांतिवृत्तावरील छाया आहेत. म्हणजे स प ग बिंदूतून क्रांतिवृत्तावर टाकलेले लंब ससं, पपं व गगं हे आहेत. अर्थात ह्या त्यांच्या शराच्या स्पर्शरेषा आहेत. म बिंदु पस रेषेंत असून तो स आणि प ह्या दोन पदार्थाच्या सांगडीचा गुरुत्वमध्य आहे. सूर्याचे कृत्यंश स आणि प ग्रहाचे प्रकृत्यंश प आहेत आणि ग ग्रहाचे प्रकृत्यंश न स आहेत. त्यांत स हे सूर्याचे प्रकृत्यंश असून न हा त्याला सूक्ष्मांशगुणक आहे. पंम ही प ग्रहाची आणि गम ही ग ग्रहाची चल-त्रिज्या आहे.

स सूर्य याचे प्रकृत्यंश स, शर ससं
प ग्रह (आकर्षित) याचे प्रकृत्यंश प, शर पपं
ग ग्रह (आकर्षक) याचे प्रकृत्यंश नस, शर गगं
मपं प ग्रहाची चल-त्रिज्या, मगं ग ग्रहाची चल-त्रिज्या.

३४३. प ह्या ग्रहावर ग ह्या ग्रहाच्या आकर्षणाचा विचार करावयाचा आहे. सूर्याच्या आकर्षणानें जी त्याला गतिस्थिति प्राप्त झाली तिचें विवरण मागे केलेच आहे तथापि, येथेही त्याचा पुनर्विचार करूं. म्हणजे एथे दोन्ही आकर्षणाचा एकत्रित विचार करावयाचा आहे. गुरुत्वाकर्षणाच्या सिद्धांताप्रमाणें प ग्रहावर स चें आकर्षण $\frac{स}{(पस)^{२}}$ इतके आहे, परंतु प चें ही आकर्षण स वर आहे ते $\frac{प}{(पस)^{२}}$ आहे. प म दिशेतली प्रेरणा ऋण मानिली आहे, तेव्हा सम दिशेतील प्रेरणा **धन** होते. पण स हा पदार्थ स्थिर मानिला तर, स हा प कडे जातो असे म्हणण्याऐवजी प हाच

स कड जातो असे म्हणावे लागते. म्हणून प वर एकंदर आकर्षण $+\frac{स}{(पस)^2} + \frac{प}{(पस)^2} = + \frac{स+प}{(पस)^2}$ इतके होते.

प ग्रहावर ग चें आकर्षण $\frac{ग}{(प ग)^2}$ इतके आहे हे आपण $\frac{न स}{(प ग)^2}$ नें दाखवू. ह्या वर्णिलेल्या दोन प्रेरणा प वर लागू आहेत. त्यात $+\frac{स+प}{(प स)^2}$ ही प्रेरणा प म दिशेतील आहे. आणि $\frac{न स}{(प ग)^2}$ ही प्रेरणा प ग दिशेतील आहे. ह्या दोन्ही प्रेरणांचें पृथक्करण इष्ट दिशांमध्ये करून त्यांचीं कार्ये किती होतात, हें आता आपण शोधूं. त्यापैकीं प्रथम $+\frac{स+प}{(प स)^2}$ ह्या प्रेरणेचें पृथक्करण करूं.

३४४. $\frac{स+प}{(प स)^2}$ ही प्रेरणा पम दिशेंतील आहे. हिचें पृथक्करण चल-त्रिज्या शर आणि भोग यांच्या दिशांत करावयाचे आहे. भोगाची दिशा म्हणजे कक्षेच्या स्पर्शरेषेची दिशा होय. परंतु, प्रथम चल-त्रिज्येवर (क्रांतिवृत्ताच्या पातळीत) लंबरूप अशा दिशेंत प्रेरणेचें कार्य किती हें ठरवून नंतर आलेल्या प्रेरणेचें कार्य भोगाच्या दिशेंत किती घडतें तें शोधूं. चल-त्रिज्येवर क्रांतिवृत्तपातळीत लंबरूप अशी दिशा भोगाच्या दिशेची नसते, किंचित भिन्न असते, म्हणून चलत्रिज्येवर लंब प्रेरणा तं ह्या अक्षरानें दाखवू. कोणत्याहि प्रेरणेचें पृथःकरण, त्याच प्रेरणेच्या दिशेशीं काटकोन करणाऱ्या दिशेत ० असते. म्हणून $\frac{स+प}{(प स)^2}$ ह्या प्रेरणेचा चलत्रिज्येवर लंबदिशेतील पृथग्भाग ० आहे, म्हणून तिचें पृथःकरण इतर दोन दिशांत करूं. त्या दिशा पंम आणि पंप ह्या होत. प्रेरणेच्या परिमाणाचें लेखन सरळ रेषेनें करितात, यास्तव ही प्रेरणा पम परिमाणाची मानिली तर तिचें पृथग्भाग प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताप्रमाणें पंम आणि पंप परिमाणाचे होतील. तेव्हां त्रैराशिकानें :—

$$पम : पंम :: \frac{स+प}{(प स)^2} : \frac{स+प}{(पस)^2} \times \frac{पंम}{पम}$$

परंतु पपंम कोन काटकोन आहे, (पपं रेषा पंम वर लंब आहे व पपंम काटकोन त्रिकोण असून पम हा त्याचा कर्ण आहे.)

म्हणून $\frac{पंम}{पम}$ = कोभुपमपं ; यावरून

$$\frac{स+प}{(प स)^2} \times \frac{पंम}{पम} = \frac{स+प}{(पं स)^2} \text{ को भु पमपं}$$

यामध्ये पमपं हा कोन धन आहे आणि $\frac{स + प}{(प स)^२}$ ही प्रेरणा धन आहे.

म्हणून

$$+ प्र = + \frac{स + प}{(प स)^२} कोभुपमपं .... (१)$$

त्याप्रमाणेंच पपं दिशेतील पृथग्भाग काढू

$$पम : पंप :: \frac{स + प}{(पस)^२} : \frac{स + प}{(पस)^२} \times \frac{पपं}{पम}$$

परंतु $\frac{पपं}{पम} =$ भु पमपं म्हणून

$$\frac{स + प}{(पस)^२} \times \frac{पपं}{पम} = \frac{स + प}{(पस)^२} भुपमपं$$

जी प्रेरणा उत्तर शर कमी करणारी ती प्रेरणा धन मानावयाची आहे. वरची ही प्रेरणा उत्तर शर कमी करणारी आहे ;

म्हणून $\frac{स + प}{(प स)^२}$ ही प्रेरणा धन आहे

$$+ ष = + \frac{स + प}{(पस)^२} भुपमपं .... (२)$$

३४५. वरच्या लेखांतील प्रेरणेचें पृथक्करण प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताधारें केले आहे. परंतु, कोणत्याहि प्रेरणेचें पृथक्करण एकमेकींवर लंब अशा कोणत्याहि दोन दिशांत करावयाचे असेल तर त्या प्रेरणेला, तिच्या दिशेशी पृथग्भूत दिशांनीं जे कोन होतात, त्या कोनांच्या कोभुजज्यांनीं गुणावें. असे मागें सिद्ध केले आहे, लेख २७७ पहा. त्याप्रमाणेच वरच्या प्रेरणेचें पृथःकरण झाले आहे. भुपमपं ही पंपम कोनाची कोभुजज्याच आहे.

३४६. प ग्रहावर दुसरी प्रेरणा $\frac{न स}{(प ग)^२}$ ही आहे, हिचें पृथक्करण वरच्याप्रमाणें करूं. ही प्रेरणा पग दिशेतील आहे. हिचें पृथक्करण प्रथम पपं आणि पंग ह्या दिशांत करूं, आणि नंतर पग दिशेतल्या प्रेरणेचें, पुनः पृथःकरण करू. पपंग त्रिकोणावरून प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताप्रमाणें त्रैराशिकानें ठरतें. तें असें :—

$$पग : पपं :: \frac{नस}{(पग)^२} : \frac{न स}{(पग)^२} \times \frac{पपं}{पग} .$$

हें आकर्षण पपं दिशेतील आहे, म्हणजे शर कमी करणारें आहे, व ते ष प्रेरणेतील आहे, तेव्हां

$$+\text{ष} = +\frac{\text{न स}}{(\text{पग})^{२}}\ \text{पपं} \cdots\cdots\cdots (३)$$

$\frac{\text{न स}}{(\text{पग})^{२}}$ हिचा दुसरा पृथग्भाग खालीं लिहिल्याप्रमाणें आहे.

$$\text{पग} : \text{पंग} :: \frac{\text{न स}}{(\text{पग})^{२}} : \frac{\text{न स}}{(\text{पग})^{२}} \times \frac{\text{पंग}}{\text{पग}}$$

ह्या दुसऱ्या भागाचें पृथःकरण पंगं आणि पंप दिशांत करूं.

$$\text{पंग} : \text{पंगं} :: \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^{२}} \times \frac{\text{पंग}}{\text{पग.}} : \frac{\text{न स}}{(\text{पग})^{२}} \times \frac{\text{पंग}}{\text{पग}} \times \frac{\text{पंगं}}{\text{पग}}$$

म्हणजे $\frac{\text{न स}}{(\text{प ग})^{३}} \times \text{पंगं}$. ह्या भागाचें पृथःकरण पुढे करू. परंतु गपंगं त्रिकोणाच्या गंग बाजु परिमित येणारा भाग आधी घेऊं. हा भाग ष प्रेरणेतला आहे. गंग दिशेतली प्रेरणा शर वाढविणारी आहे म्हणून ही ऋण होईल.

$$\text{पंग} : \text{गंग} :: \frac{\text{न स}}{(\text{पग})^{२}} \times \frac{\text{पंग}}{(\text{पग})} : \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^{२}} \times \frac{\text{पंग}}{\text{पग}} \times \frac{\text{गंग}}{\text{पंग}}$$

म्हणून

$$+\text{ष} = -\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^{३}} \times \text{गंग} \cdots\cdots\cdots (४)$$

आता $\frac{\text{न स}}{(\text{प ग})^{३}} \times \text{पंगं}$ ह्या भागाचें पृथःकरण करूं. ही प्रेरणा पंगं दिशेतली आहे म्हणजे ऋण आहे. हिचें पृथःकरण पंम आणि मगं दिशेत करू. पंमगं त्रिकोणावरून प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताप्रमाणें ठरतें कीं,

$$\text{पंगं} : \text{पंम} :: \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^{३}} \times \text{पंगं} : \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^{३}} \times \text{पगं} \times \frac{\text{पंम}}{\text{पंगं}}$$

म्हणजे $\frac{\text{न स}}{(\text{प ग})^{३}} \times \text{पंम}$. ही प्रेरणा पंम दिशेतील म्हणजे प्र प्रेरणेतील असून चलत्रिज्या कमी करणारी आहे. म्हणून ही धन आहे. तेव्हां

$$+\text{प्र} = +\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^{३}} \times \text{पंम} \cdots\cdots\cdots (५)$$

तसेंच

$$पंगं : मगं :: \frac{नस}{(पग)^२} \times पंगं : \frac{नस}{(पग)^२} \times पंगं \times \frac{मग}{पंगं}$$

म्हणजे $\frac{न स}{(पंगं)^२} \times$ मगं. ही प्रेरणा मगं दिशेतली आहे, हिचें पृथःकरण आपल्या इंष्ट प्रेरणामध्यें आणावयाचें आहे. म्हणजे चलत्रिज्या आणि तिजवर (क्रांतिवृत्त पातळींतील) लंब ह्या एकमेकींवर लंब असणाऱ्या दिशांत पृथःकरण करावयाचे आहे. म्हणून मूळ प्रेरणेच्या दिशेशीं पृथग्भूत दिशांनीं जे कोन होतात त्या कोनांच्या कोभुजज्यांनीं जिचें पृथःकरण करावयाचे त्या प्रेरणेस गुणिले पाहिजे. पंम आणि मगं याच्यामध्ये पंमगं कोन आहे, म्हणून कोभु पंमगं ने गुणिल्यानें पंम दिशेतला पृथग्भाग येईल. दुसऱ्या पृथग्भागाची दिशा (९०°— पंमगं कोन) ही आहे. ह्या कोनाची कोभुजज्या म्हणजे पंमगं कोनाची भुजज्या होय. पहिला पृथग्भाग मपं दिशेतील आहे, म्हणजे चलत्रिज्या वाढविणारा आहे. म्हणून तो ऋण आहे आणि तो प्र प्रेरणेतला आहे. दुसरा भाग भोग कमी करणारा आहे म्हणून तो ऋण आहे.

$$+ प्र = - \frac{नस}{(पग)^२} \times मगं\ कोभुपंमगं \cdots\cdots (६)$$

$$+ तं = - \frac{नस}{(पग)^२}\ मगं\ भुपंमगं \cdots\cdots (७)$$

३४७. प ग्रहाचें आकर्षण सूर्यावर घडते त्या योगाने प च्या स्थानांत जो फेर पडतो तो विचारांत घेतलाच आहे. आता ग ग्रहाचें आकर्षण सूर्यावर घडून त्या-योगे प च्या स्थानांत जो फेर होईल तो विचारांत घेऊं. ग्रहाच्या आकर्षणानें सूर्यमध्यावर जें आकर्षण घडेल त्यामुळें सूर्याला शर उत्पन्न होतो, ती प्रेरणा $\frac{नस}{सग^२}$ ही आहे. (सूर्य ग्रहकक्षेच्या केंद्रस्थानीं असेल त्यावेळींच ही प्रेरणा सूक्ष्म असते, पण उपग्रहाच्या कक्षेचा विचार करिताना ही प्रेरणा विचारात घ्यावी लागते. चंद्रकक्षेच्या केंद्रस्थानीं पृथ्वी असते म्हणून ही प्रेरणा विचारांत घेतली पाहिजे.

३४८. स वर ग चे आकर्षण $\frac{न स}{(ग स)^२}$ हे आहे. ही प्रेरणा स ला ग कडे ओढते, पण स स्थीर मानल्यामुळें ग हा स कडे जातो, म्हणजे सग चलत्रिज्या

कमी होते, म्हणून ही प्रेरणा धन आहे. हिचें पृथःकरण ससंग त्रिकोणावरून

$$सग : सस्ं :: \frac{नस}{(गस)^{२}} : \frac{नस}{(गस)^{२}} \times \frac{सस्ं}{सग} = \frac{नस}{(गस)^{३}} सस्ं$$

ही प्रेरणा स चा उणा शर कमी करणारी धन अर्थात प चा अधिक शर कमी करणारी म्हणजे ऋण आहे.

$$ष = - \frac{नस}{(गस)^{३}} सम्ं \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (८)$$

तसेंच

$$सग : संग :: \frac{नस}{(गस)^{२}} : \frac{नस}{(गस)^{२}} \times \frac{संग}{(गस)} = \frac{नस}{(गस)^{३}} संग$$

हा $\frac{नस}{(गस)^{३}}$ संग पृथग्भाग संग दिशेतील आहे याचें पृथःकरण गंग आणि संगं दिशात करावयाचें. तेव्हां

$$संग : गंग :: \frac{नस}{(गस)^{३}} संग : \frac{नस}{(गस)^{३}} संग \times \frac{गंग}{संग} = \frac{नस}{(गस)^{३}} गंग$$

हा ष प्रेरणेतील भाग असून तो गंग दिशेतील म्हणजे धन आहे.

$$ष = + \frac{नस}{गस^{३}} गंग \quad \ldots\ldots\ldots \quad (९)$$

पुन्हा

$$संग : संगं :: \frac{नस}{(गस)^{३}} संग : \frac{नस}{(गस)^{३}} संग \times \frac{संगं}{संग} = \frac{नस}{(गस)^{३}} संगं$$

हा $\frac{नस}{(गस)^{३}}$ संगं पृथग्भाग संगं दिशेतील याचें पृथःकरण संम आणि मगं दिशेत करावयाचे आहे. तेव्हां संम गं त्रिकोणावरून,

$$संगं : संम :: \frac{नस}{(गस)^{३}} संगं : \frac{नस}{(गस)^{३}} संगं \times \frac{संम}{संगं} = \frac{नस}{(गस)^{३}} संम$$

हा पृथगभाग चलत्रिज्या कमी करणारा आहे म्हणून तो धन आहे.

$$प्र = + \frac{नस}{(गस)^{३}} संम \quad \ldots\ldots\ldots \quad (१०)$$

आणि

$$संगं : मगं :: \frac{नस}{(गस)^{३}} संगं : \frac{नस}{(गस)^{३}} संगं \times \frac{मगं}{संगं} = \frac{नस}{(गस)^{३}} मग.$$

म्हणजे $\frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3}$ मगं ही प्रेरणा शेवटी राहिली. हिचे पृथक्करण ३४६ लेखाच्या शेवटीं $\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3} \times$ मगं ह्या प्रेरणेचें केलें त्याप्रमाणें करावयाचें. $\frac{\text{नस}}{\text{गस}^3}$ मगं ही प्रेरणा मगं दिशेतली म्हणून तिचा चल त्रिज्येच्या दिशेतील भाग चलत्रिज्या वाढविणारा आहे. आणि भोगाच्यासंबंधीं भाग भोग वाढविणारा आहे. म्हणजे दोन्ही धन आहेत. तेव्हां

$$+ \text{ प्र } = + \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \times \text{मगं को भु पंमगं} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (११)$$

$$+ \text{ तं } = + \frac{\text{नस}}{(\text{गस})^3} \times \text{मग भु पंमगं} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (१२)$$

३४९. लेख ३४४ पासून ३४८ पर्यंत प्रेरणांचीं पृथःकरणें करून जे १० भाग काढिलें आहेत, ते प्र तं ष प्रेरणांपैकीं कोणत्या प्रेरणेचे कोणते भाग आहेत तें पाहून, त्या त्या प्रेरणासमोर लिहूं. १, ५, ६, ८, ९ हे प्र प्रेरणेचे भाग आहेत. ७ आणि १० हे तं प्रेरणेचे भाग आहेत, आणि २, ३ व ४ हे ष प्रेरणेचे आहेत. तेव्हां

$$+ \text{ प्र } = + \frac{\text{स}+\text{प}}{(\text{पस})^2} \text{ को भु पमपं } + \text{ नस } \left\{ \frac{\text{पंम}}{(\text{पग})^3} + \frac{\text{संम}}{(\text{गस})^3} \right\}$$

$$- \text{नस} \left\{ \frac{\text{मगं}}{(\text{पग})^3} - \frac{\text{मगं}}{(\text{गस})^3} \right\} \text{को भुपंमगं}$$

$$+ \text{ तं } = - \text{ नस} \left\{ \frac{\text{मगं}}{(\text{पग})^3} - \frac{\text{मगं}}{(\text{गस})^3} \right\} \text{ भुपंमगं}$$

$$+ \text{ ष } = + \frac{\text{स}+\text{प}}{(\text{पस})^2} \times \text{भु पमपं } + \frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3} (\text{पपं} - \text{सगं})$$

३५०. आकर्षणाच्या कार्यानें प्रेरणा उत्पन्न होते, त्या प्रेरणेने वेगवृद्धि उत्पन्न होते. आणि वेगवृद्धिपासून चलत्रिज्या भोग आणि शर ही सिद्ध होतात. चल-त्रिज्या भोग आणि शर यांच्या प्रेरणा कशा आणि किती परिमाणाच्या असतात याचें विवरण वर केले आहे. आकर्षक ग्रहाची कक्षा आकर्षित ग्रहाच्या कक्षेच्या बाहेर आहे असें आकृतीत दाखविले आहे. आणि त्या स्थितिप्रमाणें येणाऱ्या प्रेरणा वर लिहिल्या आहेत. परंतु, त्याच्या विपरित स्थिति असली तर, म्हणजे आकर्षक ग्रहाची कक्षा आकर्षित ग्रहाच्या कक्षेच्या आंत असली तर तं प्रेरणेची किंमत ऋण होते.

३५१. विवक्षित पदार्थावर त्याच्या कक्षेच्या केंद्र बिंदूतील आकर्षण आणि स्थानचें आकर्षण विचारांत घेऊन त्या सर्व प्रेरणांचीं कार्यें ठरलेल्या किती प्रमाणानें घडतात तें वर सिद्ध केले आहे. त्यामध्ये रेषात्मक पुष्कळ संख्या सामान्य संख्या-रूप असून अव्यक्त स्थितीत आहेत. किंबहूना सर्व संख्या अव्यक्तच आहेत अशा कल्पनेने त्यांचीं समीकरणें बनविलीं आहेत. त्या समीकरणांतील एक अव्यक्ताची किंमत (इतर सर्व संख्या व्यक्त आहेत असे घेऊन) ठरविता येते. आणि अव्यक्तांच्या संख्येपेक्षां एकानें अधिक समीकरणें असली म्हणजे सर्व अव्यक्तांच्या किंमती ठरवितां येतात. याकरिता अव्यक्त संख्यांची संख्याच कमी करणें प्राप्त असते. तसेंच कांहीं अव्यक्त संख्या अशा योजाव्या लागतात कीं, त्या वेधानें सिद्ध व्हाव्यात. याकरितां वेधाने सिद्ध होणाऱ्या संख्या समीकरणांत ठेऊन इतर जितक्या संख्या कमी करता येतील तितक्या कमी करावयाच्या आहेत.

३५२. ह्या प्रेरणामधील म्हणजे त्याच्या समीकरणांमधील संख्यांचें मापन करणें अतितर कठीण कार्य आहे. जसें सूर्याचें व पृथ्वीचें वजन यांचे गुणोत्तर, मध्यमग्रहाची गति, केंद्रच्युति, मंदोच्चस्थान वगैरे वगैरे. पूर्व कालिन ज्योतिःशास्त्रांत सर ऐझाक-न्यूटनच्या पूर्वी हा आकर्षणाचा सिद्धांत मनुष्याच्या बुद्धींत आला नाहीं. आकर्षण आहे अशी कल्पना होती. भारतीय ग्रंथांत 'प्रवह' नामक वायु आकर्षण करितो असें ठरलेलें होतें. पण तें आकर्षण कोठून प्राप्त होते, किती प्रमाणाचें असतें ह्याची पूर्ण जाणीव झाली नव्हती. याचें कारण भारतांतील स्वास्थ्य कमी झाल्यानें असल्या गहन विषयाकडे लक्ष कमी झाले.

३५३. मागे सिद्ध केलेलीं सूक्ष्मांश समीकरणें आणि वर सिद्ध केलेल्या प्र तं ष प्रेरणा यांची समीकरणें, सामान्यत्वें सिद्ध केली आहेत. त्यामध्यें जी पदें आलीं आहेत त्यांच्या स्पष्टीकरणांचे दोन भाग करूं. (१) ग्रहासंबंधीं, म्हणजे कक्षेच्या केंद्रस्थानीं सूर्य आहे अशी समीकरणें, (२) उपग्रहासंबंधी, म्हणजे चंद्रासंबंधी, किंवा गुरु, शनि वगैरेच्या उपग्रहासंबंधी समीकरणें. त्यांचे स्पष्टीकरण क्रमवार खालीं देत आहे.

३५४. (१) स+प यांमध्ये स म्हणजे सूर्याचे प्रकृत्यंश आणि प म्हणजे ज्या ग्रहाच्या कक्षेचा विचार करावयाचा अर्थात ज्याचे शर भोग आणि भान्वंतर सिद्ध करावयाचे त्याचे प्रकृत्यंश होत. आकर्षण किंवा प्रेरणा प्रकृत्यंशाशी सम प्रमाणांत असते. म्हणून आकर्षणाचें मापन प्रकृत्यंशांनीं करितां येतें. म्हणून स+प हें ग्रहाच्या कक्षेच्या केंद्रस्थानचें आकर्षण होय. हे आकर्षण म ह्या अक्षर संख्येनें दाखविलें आहे (लेख ३०३). आणि लेख ३०५ प्रमाणे

$$म = अज^{२}$$

म्हणून

$$स + प = अज^{२} \qquad \ldots\ldots (१)$$

ह्यांत ज म्हणजे कालाच्या सूक्ष्म अशा एकं परिमाणांत ग्रहानें आक्रमिलेल्या क्षेत्राची दुप्पट आहे. (ले. २९३.) आणि भ म्हणजे केंद्रापासून मोठ्या अक्षावर कक्षेपर्यंत काढलेला लंब होय. याला केंद्रगभुजार्ध म्हणतात. लेख ३१३ आकृति मध्ये कभ हा केंद्रगभुजार्ध होय.

$$\text{भ} = \text{कभ} = \text{बृ}\,(१ - \text{इ}^२) \quad [\text{लेख } १७२\ (\text{ब})\ १७८\ (१).]$$

आणि $\dfrac{१}{\text{भ}} = \text{अ}$

३५५. (२) कोभुपमपं :—पमपं हा कोन ज्या ग्रहाच्या कक्षेचा विचार त्या ग्रहाचा शर होय. म्हणून

कोभुपमपं = ग्रहाच्या शराची कोभुजज्या. ग्रहाच्या शराची स्पर्शरेषा सूक्ष्मांश समीकरणांत श ह्या अक्षरानें दाखविली आहे. तेव्हां कोभुपमपं हें पद आम्हास श नें दाखवितां येते. कारण

$$\text{स्प क्ष} = \frac{\text{भुक्ष}}{\text{कोभुक्ष}}$$

$$\text{स्प}^२\text{क्ष} = \frac{\text{भु}^२\text{क्ष}}{\text{कोभु}^२\text{क्ष}}$$

$$१ + \text{स्प}^२\text{क्ष} = \frac{\text{कोभु}^२\text{क्ष} + \text{भु}^२\text{क्ष}}{\text{कोभु}^२\text{क्ष}} = \frac{१}{\text{कोभु}^२\text{क्ष}}$$

$$\text{कोभु}^२\text{क्ष} = \frac{१}{१ + \text{स्प}^२\text{क्ष}}$$

$$\text{कोभक्ष} = \sqrt{\frac{१}{(१ + \text{स्प}^२\text{क्ष})}} = (१ + \text{स्प}^२\text{क्ष})^{-\frac{१}{२}}$$

म्हणून

$$\text{कोभु पमपं} = (१ + \text{श}^२)^{-\frac{१}{२}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (२)$$

३५६. (३) पस^२:—

$$\text{पस} = \text{पम} + \text{मस}$$

$$\text{पम} = \text{पंम} \div \text{कोभुपमपं}$$

$$\text{मस} = \text{संम} \div \text{कोभुपमपं}$$

$$\text{पस} = \text{पंसं} \div \text{कोभुपमपं}$$

$$(\text{पस}^२) = (\text{पंसं})^२ \div \text{कोभु}^२\ \text{पमपं} = \text{र}^२\,(१ + \text{श}^२)$$

$$\frac{१}{(\text{पस})^२} = \frac{१}{\text{र}^२(१ + \text{श}^२)} = \text{व}^२(१ + \text{श}^२)^{-१} \ldots\ldots\ldots \quad (३)$$

(१), (२), (३) यांचा गुणाकार केला तेव्हां

$$\frac{स+प}{(पस)^{२}} \text{ को भुपमपं} = अज^{२}व^{२}\ (१+श^{२})^{-\frac{३}{२}}$$

(प्र १) ……………… (४)

३५७. $\frac{१}{(पग)^{३}}$ ह्या पदाची किंमत व्यक्त संख्यांनीं ठरविणें आहे त्या खालीं लिहिल्या प्रमाणें.

सं म पं गं हे बिंदु क्रांतिवृत्ताच्या पातळीत आहेत. पग ही रेषा क्रांतिवृत्ताच्या पातळीच्या बाहेर आहे. पण

$$(पग)^{२} = (पद)^{२} + (गद)^{२}$$

पद ही रेषा पं गं शी समांतर असून तिच्याशी समान आहे कारण प पं गं द हा समांतर भुज चौकोन काटकोन चौकोन आहे. आणि गद ही रेषा (पंप — गंग ……) बरोबर आहे. आतां पंमगं ह्या क्रांतिवृत्ताच्या पातळीतील त्रिकोणावरून

$$(पंगं)^{२} = (गंम)^{२} + (पंम)^{२} - २पंम.गंम \text{ कोभुपंमगं}$$

तेव्हां

$$(पग)^{२} = (गंम)^{२} + (पंम)^{२} + (पंप - गंग)^{२} - २गंम \cdot पंम \text{ कोभुपंमगं}$$

ह्यांतील गंम ही रेषा ग ग्रहाची चलत्रिज्या आहे. म बिंदु प ग्रह आणि सूर्य यांच्या सांगडीचा गुरुत्वमध्य आहे. म्हणून ग ग्रह म ह्याच बिंदू सभोवती भ्रमण करितो. म्हणून

$गंम = रं = \frac{१}{वं}$ ही किंमत वरच्या समीकरणांत ठेवू. तेव्हां

$$(पग)^{२} = (गंम)^{२}\left[१ + \left(\frac{पंम}{गंम}\right)^{२} + \frac{(पंप - गंग)^{२}}{(गंम)^{२}} - २\frac{पंम}{गंम}\text{को भुपंमगं}\right]$$

$$(पग) = (गंम)\left[१ + \left(\frac{पंम}{म}\right)^{२} + \frac{(पंप - गंग)^{२}}{(गंम)^{२}} - २\frac{पंम}{गंम}\text{ कोभुपंमगं}\right]^{\frac{१}{२}}$$

$$\frac{१}{(पग)^{३}} = वं^{३}\left[१ + वं^{२}\left\{(पंम)^{२} + (पंप - गंग)^{२}\right\} - वंपंम\text{कोभुपंमगं}\right]^{-\frac{३}{२}}$$

ह्या समीकरणांत लेखन सौकर्याकरिता अक्षर संख्या फ आणि ध ह्या स्वीकारल्या त्या अशा

$$फ = वं^{२}\left\{(पंम)^{२} + (पंप - गंग)^{२}\right\}$$

आणि $ध = वं \text{ को भुपंमगं}$

तेव्हां

$$\frac{१}{(पग)^३} = वं^३ \left\{ १ + फ - २ \, पंमध \right\}^{-\frac{३}{२}} \ldots\ldots\ldots (५)$$

३५८. $\frac{१}{(गस)^३}$ ह्या पदाची किंमत व्यक्त संख्यांनीं ठरवावयाची आहे.

स बिंदूतून सं गं शी स दा समांतर केली. तेव्हां

$$(गस)^२ = (सदा)^२ + (गदा)^२ \quad यांत \, संस = शं'$$
$$= (गंसं)^२ + (गंग + ससं)$$

ह्यांतील $(गंसं)^२$ ची किंमत संमगं त्रिकोणावरून ठरते ती अशी

$$(गंसं)^२ = (गंम)^२ + (संम)^२ + २ \, गंम \cdot संम \, कोभुपंमगं \quad [ले. ७० (१)]$$

तेव्हां

$$(गस)^२ = (गंम)^२ \left[१ + \left(\frac{संम}{गंम}\right)^२ + \frac{गंम + ससं}{(गंम)^२} + २ \frac{संम}{गंम} कोभुपंमगं \right]$$

$$\frac{१}{(गस)^३} = वं^३ [१ + वं^२ \left\{ (संम)^२ + (गंग + ससं)^२ + २वंसंम \, कोभुपंमगं \right]^{-\frac{३}{२}}$$

लेखन सौकर्याकरिता

$$फं = वं^२ \left\{ (संम)^२ + (गंग + ससं)^२ \right\}$$

आणि $\quad धं = वं \, कोभुपंमगं$

तेव्हां

$$\frac{१}{(गस)^३} = वं^३ \left\{ १ + फं + २ \, संमधं \right\}^{-\frac{३}{२}} \ldots\ldots (६)$$

३५९. समीकरण (५) व (६) वर तयार केली आहेत, त्यात फ आणि ध ह्या संयुक्त आहेत आणि दोहींचे घातविस्तार करावयाचे आहेत. प्रथम घातविस्तार करून नंतर त्यांत फ ध च्या किंमती लिहूं. घातविस्तार लेख २१ मधील $(१ + अ)^{-न}$ प्रमाणे केला आहे.

$$\frac{१}{(पग)^३} = वं^३ \left\{ १ + फ - २पंमध \right\}^{-\frac{३}{२}} = वं^३ \left\{ १ + ढ \right\}^{-\frac{३}{२}}$$

$$= वं^३ \left\{ १ - \frac{३}{२}ढ + \frac{१५}{८}ढ^२ - \frac{३५}{१६}ढ^३ + \cdots \right\} \cdots (५)$$

तसेंच

$$\frac{१}{(गस)^३} = वं^३\left\{१+फ+२संमध\right\}^{-\frac{३}{२}} = वं^३\left\{१+ढं\right\}^{-\frac{३}{२}}$$

$$= वं^३\left\{१-\frac{३}{२}ढं+\frac{१५}{८}ढं^२-\frac{३५}{१६}ढं^३+\ldots\ldots\right\}\ldots(६)$$

(५) ह्यांत ढ ही संयुक्त संख्या आहे तिची किंमत—

$$ढ = फ - २\ पंमध = -२पंमध + फ$$

$$= -२(पंमध - \tfrac{१}{२}फ) = -२पंमध\left(१-\frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)$$

$$ढ^२ = +४(पंम)^२ध^२\left(१-\frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)^२$$

$$ढ^३ = -८(पंम)^३ध^३\left(१-\frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)^३$$

$$-\frac{३}{२}ढ = +३पंमध\left(१-\frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)$$

$$+\frac{१५}{८}ढ^२ = +\frac{१५}{२}(पंम)^२ध^२\left(१-\frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)^२$$

$$-\frac{३५}{१६}ढ^३ = +\frac{३५}{२}(पंम)^३ध^३\left(१-\frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)^३$$

त्याचप्रमाणें ढं ची किंमत ठरवूं

$$ढं = फं + २(संम)ध = +२(संम)ध+फं$$

$$= +२(संमध + \tfrac{१}{२}फं) = २संमध\left(१+\frac{१}{२}\frac{फं}{संमध}\right)$$

$$-\frac{३}{२}ढं = -३\ संमध\left(१+\frac{१}{२}\frac{फं}{संमध}\right)$$

$$+\frac{१५}{८}ढं^२ = +\frac{१५}{२}(संम)^२ध^२\left(१+\frac{१}{२}\frac{फं}{संमध}\right)^२$$

$$-\frac{३५}{१६}ढं^३ = -\frac{३५}{२}(संम)^३ध^३\left(१+\frac{१}{२}\frac{फ}{संमध}\right)^३$$

ह्यावरून समीकरण (५) व (६) यांची स्वरूपें खालीं दिल्याप्रमाणे होतात.

$$\frac{१}{(पग)^३} = वं^३ \left\{ \begin{array}{l} १ + ३ \text{ पंमझ} \left(१ - \frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right) \\ + \frac{१५}{२}(पंम)^२ ध^२ \left(१ - \frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)^२ \\ + \frac{३५}{२}(पंम)^३ ध^३ \left(१ - \frac{१}{२}\frac{फ}{पंमध}\right)^३ \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \ldots(५)$$

$$\frac{१}{(गस)^३} = वं^३ \left\{ \begin{array}{l} १ - ३ \text{ संमध} \left(१ + \frac{१}{२}\frac{फं}{संमध}\right) \\ + \frac{१५}{२}(संम)^२ ध^२ \left(१ + \frac{१}{२}\frac{फं}{संमध}\right)^२ \\ - \frac{३५}{२}(संम)^३ ध^३ \left(१ + \frac{१}{२}\frac{फं}{संमध}\right)^३ \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \ldots(६)$$

३६०. समीकरण (५) ला पंम नें गुणिले आणि ६ ला संम नें गुणिले. दोन्ही गुणाकाराची बेरीज करून त्या बेरजेला + नस यानें गुणिले तेंव्हा–($फ^२$, $फं^२$ ही पदें सूक्ष्म म्हणून गाळली आहेत)

$$+ \text{ नस} \left\{ \frac{पंम}{(पग)^३} + \frac{संम}{(गस)^३} \right\} = (प्र२)$$

$$+ नसवं^३ \left[(पंम - संम)\right]$$

$$+ नसवं^३ \left[३\left\{(पंम)^२ - (संम)^२\right\}ध - \frac{३}{२}\left\{(पंम)फ + (संम) फं\right\} \right]$$

$$+ नसवं^३ \left[\frac{१५}{२}\left\{(पंम)^३ + (संम)^३\right\}ध^२ - \frac{१५}{२} ध \left\{(पंम)^२फ - (संम)^२फं\right\}\right]$$

$$+ नसवं^३ \left[\frac{३५}{२}\left\{(पंम)^४ - (संम)^४\right\}ध^३ - \frac{१०५}{४}ध^२\left\{(पंम)^३फ + (सम)^३फं\right\}\right]$$

३६१. प्रेरणामधील इतर पदें सरुप अशी आहेत. त्यापैकीं प्र प्रेरणेतील तिसरें पद खालीं दिल्याप्रमाणे आहे :

$$- \text{ नस} \left\{\frac{१}{(पग)^३} - \frac{१}{(गस)^३}\right\} गमं \text{ कोभु } पंमगं$$

$$\text{ह्यापैकी } \text{मगं} = \frac{१}{\text{वं}} \text{ आणि } \text{ध} = \text{वं कोभु पंमगं}$$

$$\text{मंग कोभु पंमगं} = \frac{१}{\text{वं}} \text{ कोभुपंमगं} = \frac{\text{ध}}{\text{वं}^{२}}$$

म्हणून

$$- \text{नस} \frac{\text{ध}}{\text{वं}^{२}} \left\{ \frac{१}{(\text{पग})^{३}} - \frac{१}{(\text{गस})^{३}} \right\}$$

असें त्या पदाचे स्वरूप झालें.

$$\left(\frac{१}{(\text{पग})^{३}} - \frac{१}{(\text{गस})^{३}}\right) = \text{वं}^{३} \left\{ \begin{array}{l} + ३ \, (\text{पंम} + \text{सम})\text{ध} - \frac{३}{२} \, (\text{फ} - \text{फं}) \\ + \frac{१५}{२} \left\{ (\text{पंम})^{२} - (\text{संम})^{२} \right\} \text{ध}^{२} \\ - \frac{१५}{२} \left\{ (\text{पंम}) \, \text{फ} - (\text{संम}) \, \text{फं} \right\} \text{ध} \\ + \frac{३५}{२} \left\{ (\text{पंम})^{३} + (\text{संम})^{३} \right\} \text{ध}^{३} \\ - \frac{१०५}{४} \left\{ (\text{पंम})^{२}\text{फ} - (\text{संम})^{२}\text{फं} \right\} \text{ध}^{२} \\ \qquad \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (७) \end{array} \right.$$

ह्या समीकरणाला— नस $\frac{\text{ध}}{\text{वं}^{२}}$ ह्या संख्येनें गुणिले म्हणजे प्र प्रेरणेतील तिसरें पद होते म्हणून—

$$- \text{नस} \left\{ \frac{\text{मगं}}{(\text{पग})^{३}} - \frac{\text{मगं}}{(\text{गस})^{३}} \right\} \text{कोभुपंमग} = \ldots\ldots (\text{प्र}^{२})$$

$$-\text{नसवं} \left[३ \, (\text{पंम} + \text{संम})\text{ध}^{२} - \frac{३}{२} \, (\text{फ} - \text{फं})\text{ध} \right]$$

$$-\text{नसवं} \left[\frac{१५}{२} \left\{ (\text{पंम})^{२} - (\text{संम})^{२} \right\} \text{ध}^{३} - \frac{१५}{२} \left\{ (\text{पंम}) \, \text{फ} - (\text{संम}) \, \text{फं} \right\} \text{ध}^{२} \right.$$

$$\left. -\text{नसवं} \left[\frac{३५}{२} \left\{ (\text{पंम})^{३} + (\text{संम})^{३} \right\} \text{ध}^{४} - \frac{१०५}{४} \left\{ (\text{पंम})^{२}\text{फ} - (\text{संम})^{२}\text{फं} \right\} \text{ध}^{३} \right. \right.$$

३६२. वरचे समीकरण (७) याला—नस मगं भुपंमगं नें गुणिल्यानें तं प्रेरणेचें पद तयार होते.

$$- \text{सन} \left\{ \frac{\text{मंग}}{(\text{पग})^{३}} - \frac{\text{मगं}}{(\text{गस})^{३}} \right\} \text{भुपंमगं}$$

$$= - \text{नस} \left\{ \frac{१}{(\text{पग})^{३}} - \frac{१}{(\text{गस})^{३}} \right\} \frac{१}{\text{वं}} \text{भुपंमगं}$$

परंतु $ध = वं\ कोभुपमगं$ तेव्हां

$$ध\frac{१}{वं}\ भुपमग = वं\ कोभु\ 'मगं \times \frac{१}{वं}\ भुपमगं = \frac{१}{२}भु२पंमगं$$

$$ध^{२}\frac{१}{वं}\ भुपंम' = वं^{२}कोभु^{२}पंम' \times \frac{१}{वं}\ भुपंमगं$$
$$= \frac{१}{२}वंभु२पंमगं \times कोभुपमग$$
$$= \frac{१}{४}वंभु३पंमगं + \frac{१}{४}वंभुपंमगं$$

$$ध^{३}\frac{१}{वं}\ भुपंमगं = वं^{३}कोभु^{३}पमग \times \frac{१}{वं}\ भु\ पंमगं$$
$$= \frac{१}{२}वं^{२}\ कोभु^{२}\ पमग \times भु२\ पंमगं$$
$$= \frac{१}{२}वं^{२}\left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}कोभु२\ पंमगं\right\} \times भु२\ पंमगं$$
$$= \frac{१}{४}वं^{२}\ भु२\ पंमगं + \frac{१}{८}वं^{२}\ भु४\ पंमगं$$

$$-\ नस\left\{\frac{मगं}{(पग)^{३}} - \frac{मगं}{(गस)^{३}}\right\}\ भुपंमगं = \qquad (तं)$$
$$+\ \frac{३}{२}\ नसवं^{२}\ (फ - फं)\ भुपंमगं$$
$$-\ \frac{३}{२}\ नसवं^{३}\ (पंम + संम)\ भु२पंमगं$$
$$+\ \frac{१५}{४}\ नसवं^{३}\left\{(पंम)\ फ - (संम)\ फं\right\}भु२पंमग$$
$$-\ \frac{१५}{८}नसवं^{४}\left\{(पंम)^{२} - (संम)^{२}\right\}\ (भु३पंमगं + भुपंमगं)$$
$$+\ \frac{१०५}{१६}नसवं^{४}\left\{(पंम)^{२}फ - (संम)^{२}फं\right\}(भु३पंमगं + भुपंमगं)$$
$$-\ \frac{३५}{८}नसवं^{५}\left\{(पंम)^{३} + (संम)^{३}\right\}भु२\ पंमगं$$
$$-\ \frac{३५}{१६}नसवं^{५}\left\{(पंम)^{३} + (संम)^{३}\right\}\ भु४\ पंमगं$$

३६३. प्रेरणांच्या किंमती वर ज्या तयार केल्या आहेत त्यांत कांहीं संयोगी संख्या राहिल्या आहेत; त्या स्पष्ट करून त्या ज्या ज्या पदांत योजावयाच्या आहेत, त्यांचे स्पष्टीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें---

पस रेषेच्या दोन्ही टोकांशी प आणि स परिमाणाच्या प्रेरणा कार्य करितात. पस रेषेचे प आणि स प्रेरणांच्या व्यस्त प्रमाणांत भाग केले असता असे अनुभवास येते

कीं लहान प्रेरणा आणि मोठा भाग यांचा गुणाकार, मोठी प्रेरणा आणि लहान भाग याच्या गुणाकाराबरोबर असतो. त्याप्रमाणे पस चे पंम आणि मसं असें दोन भाग केले तेव्हां—

$$प \times पंम = सं \times संम$$

ह्यावरून $$प : स :: संम : पंम$$

$$१ + \frac{प}{स} = १ + \frac{संम}{पंम}$$

$$स + प : स :: पंम + संम : पंम$$

म्हणून $$पंम = स \times \frac{(पंम + संम)}{स + प} = \frac{स}{व\,(स+प)}$$

तसेच $$स : प :: पंम : संम$$

$$स + प : प :: पंम + संम : संम$$

म्हणून

$$संम = प \times \frac{(पंम + संम)}{स + प} = \frac{प}{व\,(स + प)}$$

तेव्हां

$$(पंम - संम) = \frac{स - प}{व\,(स + प)}\,;\ \left\{ (संम)^२ - (पंम)^२ \right\} = \frac{स - प}{व^२\,(स + प)}\,;$$

$$\left\{ (पंम)^२ + (संम)^२ \right\} = \frac{स^२ + प^२}{व^२(स+प)^२}\,;\ \left\{ (पंम)^३ - (संम)^३ \right\} = \frac{स^३ - प^३}{व^३(स+प)^३}$$

$$\left\{ (पंम)^३ + (संम)^३ \right\} = \frac{स^३ + प^३}{व^३(स+प)^३}\,;$$

$$\left\{ (पंम)^४ - (संम)^४ \right\} = \frac{स^४ - प^४}{व^४(स+प)^४}$$

तसेंच $फ = वं^२\,(पंम)^२$ आणि $फं = वं^२\,(संम)^२$ ह्यापैकीं पंप गंग संस ह्या अतिसूक्ष्म म्हणून गाळल्या आहेत.

३६४. प्रेरणाच्या किमती ज्यावर तयार केल्या आहेत त्यांत अद्यापि कांहीं संयोगी संख्या राहिल्या आहेत. आकर्षणाच्या कार्यानें ज्या प्रेरणा उत्पन्न होतात त्यांचीं कार्यें इष्ट दिशामध्ये किती आहेत हें शोधण्यासाठीं अनेक सामान्य संख्या व त्यांचे संघ गणित सौकर्याकरिता योजिले आहेत. आतां त्या योजिलेल्या संख्यांचा आणि इतर कांहीं संख्यांचा निरास करून प्रेरणांचीं समीकरणें लिहावयाचीं आहेत

त्यापैकीं प्रथम प्र प्रेरणेचें समीकरण तयार करितो. प्र प्रेरणेच्या किंमतींत तीन पदें आहेत. त्यापैकीं प्रत्येक पदाचे स्वरूप लेख ३४९ मध्ये दाखविले आहे. त्या प्रत्येक पदाची किंमत खालीं लिहिल्याप्रमाणे--

$$[\text{प्र}१]\ \frac{\text{स}+\text{प}}{(\text{पस})^{२}}\ \text{कोभु}\ \text{पंमपं} = \text{अ}\ \text{ज}^{२}\text{व}^{२}\ (१+\text{श}^{२})^{-\frac{३}{२}}$$

$$[\text{प्र}२]\quad \text{नस}\left\{ \frac{\text{पंम}}{(\text{पम})^{३}} + \frac{\text{संम}}{(\text{गस})^{३}} \right\}$$

ह्या पदामध्ये ७ संयुक्तपदें उत्पन्न झाली आहेत. लेख ३६० पहा. त्यापैकीं प्रत्येक पदाचें स्पष्टीकरण क्रमानें देतों.--

$$(१)\qquad \text{नस}\,\text{वं}^{३}\,(\text{पंम} + \text{संम}) = \text{नस}\ \frac{\text{वं}^{३}}{\text{व}}\quad (१)$$

$$(२)\quad ३\text{नस}\text{वं}^{३}\left\{ (\text{पंम})^{२} - (\text{संम})^{२} \right\}\ \text{ध}$$

$$= ३\text{नस}\ \frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}}\ \frac{\text{स}-\text{प}}{\text{स}+\text{प}}\ \text{कोभु}\,(\text{ब}-\text{बं})\quad (२)$$

$$(३)\quad -\ \frac{३}{२}\,\text{नस}\text{वं}^{३}\left\{ (\text{पंम})\ \text{फ} + (\text{संम})\ \text{फं} \right\}$$

$$= -\ \frac{३}{२}\,\text{नस}\text{वं}^{३}\left\{ (\text{पंम})^{३}\text{वं}^{२} + (\text{संम})^{३}\text{वं}^{२} \right\}$$

$$= -\ \frac{३}{२}\ \text{नस}\ \frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}}\ \frac{\text{स}^{३}+\text{प}^{३}}{(\text{स}+\text{प})^{३}}\ \cdots (३)$$

$$(४)\quad +\ \frac{१५}{२}\,\text{नस}\text{वं}^{३}\left\{ (\text{पंम})^{३} + (\text{संप})^{३} \right\}\ \text{ध}^{२}$$

$$= \frac{१५}{२}\ \text{नस}\text{वं}^{३}\frac{\text{स}^{३}+\text{प}^{३}}{\text{व}^{३}(\text{स}+\text{प})^{३}} \times \text{वं}^{२}\ \text{कोभु}^{२}\ (\text{ब} - \text{बं})$$

$$= \frac{१५}{४}\ \text{नस}\ \frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}}\ \frac{\text{स}^{३}+\text{प}^{३}}{(\text{स}+\text{प})^{३}}$$

$$+\ \frac{१५}{४}\ \text{नस}\ \frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}}\ \frac{\text{स}^{३}+\text{प}^{३}}{(\text{स}+\text{प})^{३}}\ + \text{कोभु}२(\text{ब} - \text{बं})\ \cdots (४)$$

$$(५)\ -\frac{१५}{२}नस\overset{.}{व}^{३}\left\{(\overset{.}{प}म)^{२}फ - (\overset{.}{स}म)^{२}\overset{.}{फ}\right\} ध$$

$$= -\frac{१५}{२}नस\overset{.}{व}^{५}\left\{(\overset{.}{प}म)^{४} - (\overset{.}{स}म)^{४}\right\} \overset{.}{व}\ कोभु\ (ब - \overset{.}{ब})$$

$$= -\frac{१५}{२}नस\frac{\overset{.}{व}^{६}}{व^{६}}\ \frac{स^{४}-प^{४}}{(स+प)^{४}}\ कोभु\ (ब - \overset{.}{ब}) \ldots\ldots\ldots (५)$$

$$(६)\ \frac{३५}{२}नस^{१३}\left\{(\overset{.}{प}म)^{४} - (\overset{.}{स}म)^{४}\right\} ध^{३}$$

$$= \frac{३५}{२}\ नस\ \frac{\overset{.}{व}^{६}}{व^{६}}\ \frac{स^{४}-प^{४}}{(स+प)^{४}}\left\{\tfrac{३}{४}कोभु(ब-\overset{.}{ब})+\tfrac{१}{४}कोभु३(ब-\overset{.}{व})\right\} \ldots\ldots (६)$$

$$(७)\ -\frac{१०५}{४}नस\overset{.}{व}^{३}\left\{(\overset{.}{प}म)^{३}फ + (\overset{.}{स}म)^{३}\overset{.}{फ}\right\} ध^{२}$$

$$= -\frac{१०५}{४}नस\overset{.}{व}^{५}\left\{(\overset{.}{प}म)^{५} + (\overset{.}{स}म)^{५}\right\} \overset{.}{व}^{२}$$

$$\left\{\tfrac{१}{२} + कोभु२\ (ब - \overset{.}{ब})\right\}$$

$$= -\frac{१०५}{८}\ नस\frac{\overset{.}{व}^{७}}{व^{६}}\ \frac{स^{५}+प^{५}}{(स+प)^{५}}\left\{१+कोभु२(ब-\overset{.}{ब})\right\} \ldots\ldots (७)$$

३६५. [प्र३] — $नस\left\{\frac{म\overset{.}{ग}}{(प\overset{.}{ग})^{३}} - \frac{म\overset{.}{ग}}{(\overset{.}{ग}स)^{३}}\right\} कोभु\overset{.}{प}म\overset{.}{ग}$

ह्या पदामध्ये ६ संयुक्त पदे आहेत. त्यापैकीं प्रत्येकाचें स्पष्टीकरण खालीं देतो

$$(१)\ - ३नस\overset{.}{व}\ (\overset{.}{प}म+\overset{.}{स}म)\ ध^{२} = -\frac{३}{२}\ नस\ \frac{\overset{.}{व}^{३}}{व}$$

$$\left\{१ + कोभु२\ (ब - \overset{.}{ब})\right\} \ldots\ldots\ldots (१)$$

$$(२)\ \frac{३}{२}\ नस\overset{.}{व}\ (फ-\overset{.}{फ})\ ध\ =\ \frac{३}{२}\ नस\ \frac{\overset{.}{व}^{४}}{व^{२}}$$

$$\left\{(\overset{.}{प}म)^{२} - (\overset{.}{स}म)^{२}\right\} कोभु\ (ब-\overset{.}{ब})$$

$$= \frac{३}{२}\ नस\ \frac{\overset{.}{व}^{४}}{व^{२}}\ \frac{स - प}{(स+प)}\ कोभु\ (ब-\overset{.}{ब})\ \ldots (२)$$

(३) $- \frac{१५}{२}$ नसवं $\left\{ (\text{पंम})^{२} - (\text{संम})^{२} \right\}$ $\text{ध}^{३}$

$= - \frac{१५}{२}$ नस $\frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$

$\left\{ \frac{३}{४}\text{कोभु} \ (\text{व} - \text{वं}) + \frac{१}{४}\text{कोभु३} \ (\text{व} - \text{वं}) \right\}$

$= - \frac{४५}{८}$ नस $\frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$ कोभु (व — वं)

$- \frac{१५}{८}$ नस $\frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$ कोभु३ (व — वं) ...... (३)

(४) $\frac{१५}{२}$ नसवं $\left\{ (\text{पंम})\text{फ} - (\text{संम})\text{फं} \right\}$ $\text{ध}^{२}$

$= \frac{१५}{२}$ नस $\frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}} \frac{\text{स}^{३} - \text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}}$ $\text{कोभु}^{२}$ (ब — बं)

$= \frac{१५}{४}$ नस $\frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}} \frac{\text{स}^{३} - \text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}} \left\{ १ + \text{कोभु२}(\text{ब} - \text{बं}) \right\}$ ...... (४)

(५) $- \frac{३५}{२}$ नसवं^{५} $\frac{\text{स}^{३} + \text{प}^{३}}{\text{व}^{३}(\text{स} + \text{प})^{३}}$ $\text{कोभु}^{४}$ (ब — बं)

$= - \frac{३५}{१६}$ नस $\frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}} \frac{\text{स}^{३} + \text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}}$

$\left\{ ३ - ४\,\text{कोभु२} \ (\text{ब} - \text{बं}) + \text{कोभु४} \ (\text{ब} - \text{बं}) \right\}$ ...... (५)

(६) $\frac{१०५}{४}$ नस $\text{वं}^{३}$ $\left\{ (\text{पंम})^{४} - (\text{संम})^{४} \right\}$ $\text{वं}^{३}\text{कोभु}^{३}$ (ब — बं)

$= \frac{१०५}{४}$ नस $\frac{\text{वं}^{६}}{\text{व}^{४}} \frac{(\text{स}^{४} - \text{प}^{४})}{(\text{स} + \text{प})^{४}}$

$\left\{ \frac{३}{४}\text{कोभु} \ (\text{ब} - \text{बं}) + \frac{१}{४}\text{कोभु३} \ (\text{ब} - \text{बं}) \right\}$ ...... (६)

३६६. लेख ३४९ मध्ये तं प्रेरणेचें पद तयार केले आहे तें एकच आहे. त्याचें स्पष्टीकरण लेख ३६२ मध्यें आहे. त्यांत सात पदें आहेत, त्याचें स्पष्टीकरण क्रमवार खालीं केले आहे.—

$$(१) \ + \frac{३}{२} \text{नस} \, \text{वं}^{२} \, (\text{फ} - \text{फं}) \, \text{मु} \, \text{पंमगं}$$

$$= \frac{३}{२} \text{नसवं}^{२} \left\{ \text{वं}^{२} \, (\text{पंम})^{२} - \text{वं}^{२} \, (\text{संम})^{२} \right\} \text{मु} \, (\text{ब} - \text{ब})$$

$$= \frac{३}{२} \text{नस} \, \frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}} \, \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}} \, \text{मु} \, (\text{ब} - \text{बं}) \qquad (१)$$

$$(२) \ - \frac{३}{२} \text{नस} \, \text{वं}^{३} \, (\text{पंम} + \text{संम}) \, \text{मु२} \, \text{पंमगं}$$

$$= - \frac{३}{२} \text{नस} \, \frac{\text{वं}^{३}}{\text{व}} \, \text{मु२} \, (\text{ब} - \text{बं}) \ \ldots\ldots \ (२)$$

$$(३) \ + \frac{१५}{४} \text{नसवं}^{३} \left\{ (\text{पंम}) \, \text{फ} - (\text{संम}) \, \text{फ} \right\} \text{मु२} \, \text{पंमगं}$$

$$= \frac{१५}{४} \text{नसवं}^{३} \left\{ (\text{पंम})^{३} \, \text{वं}^{२} - (\text{संम})^{३} \text{वं}^{२} \right\} \text{मु२} \, \text{पंमग}$$

$$= \frac{१५}{४} \text{नस} \, \frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}} \, \frac{\text{स}^{३} - \text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}} \, \text{मु२} \, (\text{ब} - \text{बं}) \ldots\ldots (३)$$

$$(४) \ - \frac{१५}{८} \text{नसवं}^{४} \left\{ (\text{पंम})^{२} - (\text{संम})^{२} \right\} (\text{मुपंमगं} + \text{मु३} \, \text{पंमगं})$$

$$= - \frac{१५}{८} \text{नस} \frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}} \, \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}} \left\{ \text{मु३} (\text{ब} - \text{बं}) + \text{मु} (\text{ब} - \text{बं}) \right\} \ldots (४)$$

$$(५) \ + \frac{१०५}{१६} \text{नसवं}^{४} \left\{ (\text{पंम})^{२} \text{फ} - (\text{संम})^{२} \text{फं} \right\} \left\{ \text{मुपंमगं} + \text{मु३} \, \text{पंमगं} \right\}$$

$$= \frac{१०५}{१६} \text{नसवं}^{४} \left\{ (\text{पंम})^{४} \, \text{वं}^{२} - (\text{संम})^{४} \, \text{ब}^{२} \right\} \left\{ \text{मु} \, (\text{ब} - \text{बं}) + \text{मु३} \, (\text{ब} - \text{बं}) \right\}$$

$$= \frac{१०५}{१६} \text{नस} \, \frac{\text{वं}^{६}}{\text{व}^{४}} \, \frac{\text{स}^{४} - \text{प}^{४}}{(\text{स} + \text{प})^{४}} \left\{ \text{मु} \, (\text{ब} - \text{बं}) + \text{मु३} \, (\text{ब} - \text{बं}) \right\} \ldots\ldots (५)$$

$$(६)\quad -\frac{३५}{१६}\,\text{नसवं}^{५}\left\{(\text{पंम})^{३}+(\text{संम})^{३}\right\}$$

$$\left\{\text{मु४ पंमग} + \text{२मु२ पमग}\right\}$$

$$= -\frac{३५}{१६}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}}\;\frac{\text{स}^{३}+\text{प}^{३}}{(\text{स}+\text{प})^{३}}$$

$$\left\{\text{२मु२}(\text{ब}-\text{बं}) + \text{मु४}(\text{ब}-\text{बं})\right\}\;\ldots\ldots\;(६)\quad(७)$$

वर निघालेली सर्व पदें खालीं एकत्र लिहिली आहेत :—

$$\text{तं} = \begin{cases} \left\{-\frac{३}{८}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}}\,\frac{\text{स}-\text{प}}{\text{स}+\text{प}} + \frac{१०५}{१६}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{६}}{\text{व}^{४}}\,\frac{\text{स}^{४}-\text{प}^{४}}{(\text{स}+\text{प})^{४}}\right\}\text{मु}(\text{ब}-\text{बं}) \\ \left\{-\frac{३}{२}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{३}}{\text{व}} - \frac{५}{८}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}}\,\frac{\text{स}^{३}+\text{१३प}^{३}}{(\text{स}+\text{प})^{३}}\right\}\text{मु२}(\text{ब}-\text{बं}) \\ \left\{-\frac{१५}{८}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{४}}{\text{व}^{२}}\,\frac{\text{स}-\text{प}}{\text{स}+\text{प}} + \frac{१०५}{१६}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{६}}{\text{व}^{४}}\,\frac{\text{स}^{४}-\text{प}^{४}}{(\text{स}+\text{प})^{४}}\right\}\text{मु३}(\text{ब}-\text{बं}) \\ -\frac{३५}{१६}\,\text{नस}\,\frac{\text{वं}^{५}}{\text{व}^{३}}\,\frac{\text{स}^{३}+\text{प}^{३}}{(\text{स}+\text{प})^{३}}\,\text{मु४}(\text{ब}-\text{बं}) \end{cases}$$

३६७. तं ही प्रेरणा भोगाच्या दिशेतील नाहीं, कारण भोगाची दिशा चलत्रिज्येवर लंब दिशेंत सर्वदा नसते. ग्रह आपल्या कक्षेच्या उच्चस्थानीं किंवा केंद्र सन्निधान बिंदूत असेल त्याचवेळीं त्याच्या गमनाची दिशा चलत्रिज्येवर लंब असते. इतर स्थानी त्याचें गमन, त्याचस्थानी कक्षेच्या वक्र रेषेशी जी स्पर्शरेषा निघेल त्या स्पर्शरेषेच्या दिशेचें असते. आणि ग्रहाचे गमनाची दिशा तीच त्याच्या भोगाची दिशा होय. तेव्हा आपणांस आतां तं ह्या चलत्रिज्येवर लंब असणाऱ्या प्रेरणेचें पृथःकरण करून स्पर्शरेषी प्रेरणा त ही आणिली पाहिजे. ही प्रेरणा खालीं दिलेल्या रीतीनें आणितां येतें. लेख ३३२ पहा. तेथे चलत्रिज्येवर लंब अशा वेगवृद्धीचें पृथःकरण, स्पर्शरेषेच्या दिशेत आणि चल चलत्रिज्येच्या दिशेंत केले आहे. वेगवृद्धि आणि प्रेरणा एकच कार्य

करणाऱ्या आहेत. त्याचे भिन्नत्व खालीं दाखवीन. येथे तं प्रेरणेचें पृथःकरण स्पर्शरेषी दिशेत आणि चलत्रिज्येच्या दिशेत करावयाचे—लेख ३३२ प्रमाणे—तं प्रेरणेला $\frac{\text{र}}{\text{सय}}$ नें गुणिलें म्हणजे त प्रेरणा येतें. सय=स्पर्शरेषेवर केंद्रापासून टाकिलेला लंब होय, ह्यास ल म्हटले आहे. येथें आपण $\frac{\text{र}}{\text{सय}}$ ह्यास $\frac{\text{र}}{\text{ल}}$ म्हणूं आणि त्याला संक्षिप्त नांव देऊं. $\frac{१}{\text{सय}} = \text{थ}$ हें अक्षर योजू तेव्हां

$$\frac{\text{र}}{\text{सय}} = \frac{\text{र}}{\text{ल}} = \text{रथ} = \frac{\text{थ}}{\text{व}} \quad \text{म्हणून}$$

$$\text{त} = \frac{\text{थ}}{\text{व}}.\text{तं}\ ;\ \text{अर्थात}\ \text{तव} = \text{तंथ}$$

म्हणून

$$\frac{\text{त}}{\text{थ}} = \frac{\text{तं}}{\text{व}}\ \text{म्हणू}\ \frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}} = \frac{\text{तं}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}}$$

तसेच तं प्रेरणेचा दुसरा पृथग्भाग तं प्रेरणेला खालच्या गुणकाने गुणिल्याने येतो. तो गुणक (आ. ले. ३३२ मधील पहा).

$\frac{\text{पय}}{\text{सय}}$ हा होय.

$$\frac{\text{पय}}{\text{सय}} = \frac{१}{\text{र}}\ \frac{\text{सूर}}{\text{सूब}} = \text{व}\ \frac{\text{सूर}}{\text{सूब}}$$

परंतु $\frac{\text{सूर}}{\text{सूब}} = -\frac{१}{\text{व}^{२}}\ \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}$ म्हणून

$$\frac{\text{पय}}{\text{सय}} = -\frac{१}{\text{व}}\ \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\ .$$

$\frac{१\ \text{सूव}}{\text{व सूब}}$ ह्या पदानें तं प्रेरणेला गुणिले असतां चलत्रिज्येशी समांतर असा पृथग्भाग तयार होईल.

३६८. प्रेरणा आणि गतिवृद्धि ह्या दोन्ही रेषांनी दाखवाव्या लागतात, त्या सरळ रेषाच घेतात. सरळ रेषेच्या दिशा दोन्ही टोकांकडे दोन असतात त्यापैकीं रेषेचाच (तिच्या लांबीचा) विचार असतां एक टोक स्थीर ठरविलेलें असते. ह्या स्थीर टोकापासून दुसऱ्या टोकाकडची दिशा रेषा वाढविते म्हणून ती धन मानिली

पाहिजे. चलत्रिज्येच्या रेषेच्या लांबीचा विचार करिताना चलत्रिज्या वाढविणारें पद धन होते. परंतु प्रेरणेचा विचार करितांना याच्या उलट चिन्ह येते. म्हणजे चलत्रिज्या वाढविणारी प्रेरणा ऋण असते. ह्यावरून वरच्या लेखातील तं प्रेरणेचे पृथक्करण ज्या दोन भागात केलें, ते दोन भाग तं प्रेरणेला निरनिराळे दोन गुणकांनी गुणून येतात. आणि त्या भागाची चिन्हें गुणकांच्या चिन्हाप्रमाणे असतात. तं प्रेरणेला स्पर्शरेषी गुणक $\frac{१}{व}$ हा धन आहे. पण चलत्रिज्येशी समांतर भागात नेणारा गुणक चलत्रिज्या कमी करणारा म्हणून तोहि धन आहे म्हणून $\frac{पय}{सय}$ हा गुणक धन आहे.

$$\text{तेव्हां} \quad तं \times \frac{पय}{सय} = तं \times \left(-\frac{१}{व}\,\frac{सूव}{सूब}\right)$$

$$= -\frac{तं}{व}\,\frac{सूव}{सूब}$$

हा प्र प्रेरणेतील एक भाग आहे. तो प्र ह्या प्रेरणेंत घेऊं.

३६९. ष प्रेरणेचें स्पष्टीकरण करावयाचें आहे. ह्या प्रेरणेतील दोनच पदें काढिली आहेत. त्यावरून शराची सूक्ष्मता उत्तम प्रकारें साधिली जाते. त्यापैकीं पहिलें पद

$$(१) \quad + \quad \frac{स + प}{(पस)^{२}} \text{ भुपंमप}$$

ह्यांतील भुपंमप ची किंमत काढूं.

$$श = स्प शर = \frac{भुपंमप}{कोभुपंमप} \quad \text{म्हणून}$$

$$भुपंमप = श \text{ कोभुपंमप}$$

$$\text{तेव्हां} \quad + \frac{स + प}{(पस)^{२}} \text{ भुपंमप} = + श \frac{स + प}{(पस)^{२}} \text{ कोभुपंमप} \cdots (१)$$

$$(२) \quad + \quad \frac{नस}{(पग)^{३}} \ (पंप - संस)$$

$$\frac{पंप}{पंम} = स्पशर = श, \text{ म्हणून } पंप = श\ (पंम)$$

$$\frac{संस}{संम} = स्पशर = श, \text{ म्हणून } संस = श\ (सम)$$

तेव्हां $$\text{पंप} - \text{संस} = \text{श}\,(\text{पंम} - \text{संम}) = \frac{\text{श}}{\text{व}}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$$

आतां $\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3}$ ह्या पदाची किंमत काढूं. त्याकरिता लेख ३५९ मधील समीकरण (५) याचा उपयोग करूं. त्यापैकीं खालचे स्वरूप पुरे आहे.

$$\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3} = \text{नसवं}^3\,(१ + ३\,\text{पमध})$$

$$= \text{नसवं}^3 + ३\,\text{नसवं}^3\,\text{पंमध}$$

तेव्हां $$\frac{\text{नस}}{(\text{पग})^3}\,(\text{पंप} - \text{संस}) = \text{नसवं}^3\,\frac{\text{श}}{\text{व}}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$$

$$+ ३\,\text{नसवं}^3 \times \frac{\text{वं}}{\text{व}}\,\text{कोभु}\,(\text{ब} - \text{बं}) \times \frac{\text{श}}{\text{व}}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$$

$$= \text{शनस}\,\frac{\text{वं}^3}{\text{व}}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}} + ३\,\text{शनस}\,\frac{\text{वं}^4}{\text{व}^2}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}\,\text{कोभु}\,(\text{ब} - \text{बं})$$

म्हणून $$\text{ष} = \text{श}\,\frac{\text{स} + \text{प}}{(\text{पस})^3}\,\text{कोभुपंमप} + \text{शनस}\,\frac{\text{वं}^3}{\text{व}}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}$$

$$+ ३\,\text{शनस}\,\frac{\text{वं}^4}{\text{व}^2}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}\,\text{कोभु}\,(\text{ब} - \text{बं}) \quad \ldots\ldots (\text{अ})$$

$$\text{पण प्रश} = \text{श}\,\frac{\text{स} + \text{प}}{(\text{पस})^3}\,\text{कोभुपंमप} - \tfrac{1}{2}\,\text{शनस}\,\frac{\text{वं}^3}{\text{व}}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{(\text{स} + \text{प})}$$

$$- ३\,\text{शनस}\,\frac{\text{वं}^4}{\text{व}^2}\,\frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}\,\text{कोभु}\,(\text{ब} - \text{बं})$$

$$- \tfrac{3}{2}\,\text{नस}\,\text{वं}^3\,\frac{\text{श}}{\text{व}}\,\text{कोभु}२\,(\text{ब} - \text{बं}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ब})$$

३७०. सूक्ष्मांश समीकरणांमध्ये प्र त ष ह्या प्रेरणास कांहीं भाजक आहेत. यासाठी त्या भाजकांनीं प्र त ष यांना भागून सूक्ष्मांश समीकरणात ज्या स्वरुपाची आहेत त्या स्वरुपाची करून त्यांच्या किंमती खालीं लिहितो. ती स्वरूपे $\frac{\text{प्र}}{\text{ज}^2\,\text{व}^2}$, $\frac{\text{त}}{\text{थज}^2\,\text{व}^2}$, $\frac{\text{प्रश} - \text{ष}}{\text{ज}^3\,\text{व}^3}$ ही स्वरूपे आणावयाकरिता प्र आणि $\frac{\text{त}}{\text{थ}}$ याना $\text{ज}^2\,\text{व}^2$ ह्या संख्येनें भागावयाचे आहे. तिसरें $\frac{\text{प्रश} - \text{ष}}{\text{ज}^3\text{व}^3}$ हें पद, हे तयार करण्याकरिता प्र प्रेरणेला श नें गुणून गुणाकारांत ष प्रेरणेची पदें वजा करा आणि बाकीला $\text{ज}^2\,\text{व}^3$ नें भागा. वजाबाकी करण्याकरिता वरच्या लेखांतील (ब) समीकरणांत (अ) समीकरण वजा करा.

३७१. प्र त षं प्रेरणांच्या किंमती—

$$
\frac{\text{प्र}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}} = \left\{
\begin{aligned}
& + \text{अ}(१ + \text{श}^{२})^{-\frac{३}{२}} - \frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}} \frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \\
& - \frac{१}{२} \frac{\text{नसवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}} - \frac{३}{१६} \frac{\text{नसवं}^{५}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}} \frac{३\text{स}^{३} + ४३\text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}} \\
& \qquad - \frac{१०५}{८} \frac{\text{नसवं}^{७}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{७}} \frac{\text{स}^{५} + \text{प}^{५}}{(\text{स} + \text{प})^{५}} \\
& - \left[\frac{९}{८} \frac{\text{नसवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}} + \frac{४०५}{१६} \frac{\text{नसवं}^{६}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{६}} \frac{\text{स}^{४} - \text{प}^{४}}{(\text{स} + \text{प}^{४})} \right] \\
& \qquad \text{कोभु}(\text{ब} - \text{बं}) \\
& - \left[\frac{३}{२} \frac{\text{नसवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}} - \frac{५}{४} \frac{\text{नसवं}^{५}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}} \frac{१३\text{स}^{३} - २\text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}} \right. \\
& \qquad \left. + \frac{१०५}{८} \frac{\text{नसवं}^{७}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{७}} \frac{\text{स}^{५} + \text{प}^{५}}{(\text{स} + \text{प})^{५}} \right] \text{कोभु}\,२\,(\text{ब} - \text{बं}) \\
& - \left[\frac{१५}{८} \frac{\text{नसवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}} \frac{\text{स} - \text{प}}{(\text{स} + \text{प})} + \frac{१७५}{१६} \frac{\text{नसवं}^{६}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{६}} \frac{\text{स}^{४} - \text{प}^{४}}{(\text{स} + \text{प})^{४}} \right] \\
& \qquad \text{कोभु}\,३\,(\text{ब} - \text{बं}) \\
& - \left[\frac{३५}{१६} \frac{\text{नसवं}^{५}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}} \frac{\text{स}^{३} + \text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}} \right] \text{कोभु}\,४\,(\text{ब} - \text{बं})
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}} = \left\{
\begin{aligned}
& - \left[\frac{३}{८} \frac{\text{नसवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}} - \frac{१०५}{१६} \frac{\text{नसवं}^{६}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{७}} \frac{\text{स}^{४} - \text{प}^{४}}{(\text{स} + \text{प})^{४}} \right] \\
& \qquad \text{भु}\,(\text{ब} - \text{बं}) \\
& - \left[\frac{३}{२} \frac{\text{नसवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}} + \frac{५}{८} \frac{\text{नसवं}^{५}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{६}} \frac{\text{स}^{३} + १३\text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})^{३}} \right] \text{भु}\,२\,(\text{ब} - \text{बं}) \\
& - \left[\frac{१५}{८} \frac{\text{नसवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}} - \frac{१५}{१६} \frac{\text{नसवं}^{६}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{७}} \frac{\text{स}^{४} - \text{प}^{४}}{(\text{स} + \text{प})^{४}} \right] \\
& \qquad \text{भु}\,३\,(\text{ब} - \text{बं}) \\
& - \left[\frac{३५}{१६} \frac{\text{नसवं}^{५}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{६}} \frac{\text{स}^{३} + \text{प}^{३}}{(\text{स} + \text{प})} \right] \text{भु}\,४\,(\text{ब} - \text{बं})
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\frac{\text{प्रश} - \text{ष}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}} = \left\{
\begin{aligned}
& - \frac{३}{२}\,\text{श}\,\frac{\text{नसंवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{६}} - \frac{३}{२}\,\text{श}\,\frac{\text{नसवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}}\,\text{कोभु}\,२\,(\text{ब} - \text{बं}) \\
& - \frac{३३}{८}\,\text{श}\,\frac{\text{नसवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}} \frac{\text{स} - \text{प}}{\text{स} + \text{प}}\,\text{कोभु}\,(\text{ब} - \text{बं})
\end{aligned}
\right.
$$

३७२. ह्या प्रेरणांच्या किंमती त्यांचा कक्षेशी संबंध दाखविणारी समीकरणें आणि त्या समीकरणावरून इष्ट मानें कशी शोधावी याचीं साधने हा विषय ह्या प्रकरणांत आणिला आहे. हा विषय अत्यंत महत्त्वाचा आहे. ज्योतिःशास्त्र हें वेधानें उच्च स्थितीला गेले आहे असे म्हणण्यापेक्षां तें उच्च प्रतीच्या गणितशास्त्रानेंच ह्या उच्च स्थितीला आले आहे. नुसते वेध बापडे कांहींच करूं शकत नाहींत, वेधांना गणिताची आवश्यकताच असते. वरचे सर्व प्रतिपादन सामान्य आहे. कल्पनेच्या आधारास्तव प हा पृथ्वी ग्रह, स हा सूर्य आणि ग हा प ला आकर्षण करणारा कक्षेच्या केंद्रापासून भिन्न स्थानीं असलेला आकर्षण करणारा ग्रह (पदार्थ) आहे असे निदर्शक घेतले आहे. ह्या प्रतिपादनांत प च्या स्थानीं शुक्र, ग च्या स्थानीं मंगळ आणि स च्या स्थानीं सूर्य मानिला आणि स प ग च्या स्थानी स शु भौ अक्षर योजिल्यास ती समीकरणें शुक्राच्या कक्षेची होतील. हीच समीकरणें चंद्र कक्षेला योजून चंद्राचे गणित करितां येतें तें पुढच्या प्रकरणांत केलें आहे. त्या स्पष्टीकरणावरून ह्या प्रकरणातील विषयाचा चांगला बोध होईल. सामान्य स्थूल अशा वेधांनी कक्षे-संबंधी जी पदें प्राप्त होतात ती समीकरणांत योजून दुसऱ्या कांहीं पदाच्या किंमती काढाव्या. अशा रीतीने एकमेकांचे संशोधनानें त्या पदाचें शुद्धीकरण करितां येते. ग्रहाच्या अन्योन्याकर्षणाचा विचार मागे घेतल्यास प्रकरण १० आणि ११ यावरून सर्व ग्रहांचे गणित करितां येते, त्यांची सामान्य समीकरणें त्या प्रकरणांत सिद्ध झालीं आहेत. प्रत्यक्ष किंमती पुढें तयार करण्याचे योजून प्रस्तुत चंद्राचे गणिताचे स्पष्टी-करण करण्याचे ठरविले आहे. म्हणजे पुढचे प्रकरणीं चंद्र कक्षेच्या गणिताचा विचार केला आहे.



प्रकरण तेरावें

चंद्राच्या कक्षेचीं सूक्ष्मांश समीकरणें

३७३. चंद्राची कक्षा निर्माण करणारा ग्रह पृथ्वी हा होय. म्हणजे चंद्र हा पृथ्वीचा उपग्रह आहे. चंद्राची कक्षा दीर्घवर्तुळ असून त्या दीर्घवर्तुळाच्या एका केंद्रांत म्हणजे केंद्रस्थानीं पृथ्वी आहे. चंद्राची चलत्रिज्या, शर आणि भोग ही अमुक इतकी असतां काल किती हे ठरविणें, तसेच अमक्या काली चंद्राची चलत्रिज्या किती, शर किती, भोग किती हें ठरविणें ही कार्यें कशीं ठरवावीं याचा येथे सोपपत्तिक विचार करावयाचा आहे. हीं कार्यें गेल्या प्रकरणांत जी सूक्ष्मांश समीकरणें सिद्ध केलीं आहेत ती सोडविल्यानें साध्य होतात. वरची सूक्ष्मांश समीकरणें सामान्य स्वरुपाची आहेत. परंतु त्यामध्ये ज्या प्र त ष प्रेरणांच्या किंमती दिल्या आहेत त्याही सामान्य आहेत. त्या किंमतीमध्यें पृथ्वी, चंद्र आणि सूर्य ही घेऊन प्रेरणाच्या किंमती ठरवाव्या लागतात आणि त्या किंमतीनें ती समीकरणें सुटतात. तीही एकदम सुटत नाहींत. प्रथम स्थूल मानाने, नंतर कांहींशी सूक्ष्म, नंतर सूक्ष्मतर आणि सूक्ष्मतम व शेवटीं अतिसूक्ष्म अशी पदवीपदवीनें सोडवावी लागतात. अशी ती सूक्ष्मांश समीकरणें व त्यामधील प्र त ष च्या किंमती खालीं लिहितो. ही समीकरणें मागे लिहिली आहेतच पण त्यातील आपणास लागेल तितकाच भाग घेऊन ही समीकरणें खाली लिहितो—

$$\frac{\text{सू}^2\text{व}}{\text{सूब}^2} + \text{व} = \frac{\text{प्र}}{\text{ज}^2\text{व}^2} - 2\,\text{ठँ}\left[\frac{\text{त}}{\text{थज}^2\text{व}^3}\right]\text{सूब}\left\{\frac{\text{सू}^2\text{व}}{\text{सूब}^2} + \text{व}\right\}$$

$$\frac{\text{सू}^2\text{श}}{\text{सूब}^2} + \text{श} = \frac{\text{प्रश}-\text{ष}}{\text{ज}^2\text{व}^3} - \frac{\text{त}}{\text{थज}^2\text{व}^3}\left(\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{श}}{\text{व}}\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right)$$

$$- 2\,\text{ठँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{थज}^2\text{व}^3}\right)\text{सूब}\left\{\frac{\text{सू}^2\text{श}}{\text{सूब}^2} + \text{श}\right\}$$

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \frac{1}{\text{जव}^2}\left\{1 + 2\,\text{ठँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{थज}^2\text{व}^3}\right)\text{सूब}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

३७४. वरच्या समीकरणांत प्र ष त प्रेरणांच्या ज्या किंमती आहेत त्या लेख ३७१ मध्यें आहेत, त्याच चंद्र कक्षेला अनुसरून कशा स्वरुपाच्या होतात हें येथें दाखवित आहे. चंद्र कक्षेच्या केंद्रस्थानीं पृथ्वी आहे; तिचे निदर्शक अक्षर प योजूं. कक्षा चंद्राची म्हणून चंद्राचे निदर्शक अक्षर च, हे पूर्वी दाखविलेल्या समीकरणांत प ज्या स्थानी आहे त्या स्थानी लिहू, आणि केंद्राव्यतिरिक्त आकर्षक ग आहे त्या स्थानीं

येथे स म्हणजे सूर्याचे निदर्शक अक्षर लिहूं. म्हणजे पूर्वीच्या समीकरणांतील स प ग च्या ऐवजीं आता प च स ही अक्षरें योजू. पूर्वीच्या समीकरणांत ग चे प्रकृत्यंश व आकर्षण नस ने दाखविले आहे ते आतां स नेंच दाखविले आहे.

$$\frac{\text{प्र}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}} = \begin{cases} \text{अ}(१+\text{श}^{२})^{-\frac{३}{२}} - \frac{१}{२}\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}} - \frac{३}{२}\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}}\,\text{कोभु}\,२\,(\text{ब}-\text{बं}) \\ -\frac{९}{८}\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}}\,\frac{\text{प}-\text{च}}{\text{प}+\text{च}}\,\text{कोभु}\,(\text{ब}-\text{बं}) - \frac{१५}{८}\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}}\,\frac{\text{प}-\text{च}}{\text{प}+\text{च}} \\ \quad\text{कोभु}\,३\,(\text{ब}-\text{बं}) - \frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{३}}\,\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} \end{cases}$$

$$\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}} = \begin{cases} -\frac{३}{४}\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}}\,\text{भु}२\,(\text{ब}-\text{बं}) - \frac{३}{८}\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}}\frac{\text{प}-\text{च}}{\text{प}+\text{च}}\,\text{भु}(\text{ब}-\text{बं}) \\ -\frac{१५}{८}\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}}\,\frac{\text{प}-\text{च}}{\text{प}+\text{च}}\,\text{भु}\,३\,(\text{ब}-\text{बं}) \end{cases}$$

$$\frac{\text{प्रश}-\text{ष}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}} = \begin{cases} -\frac{३}{२}\,\text{श}\,\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}} - \frac{३}{२}\,\text{श}\,\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}}\,\text{कोभु}\,२\,(\text{ब}-\text{बं}) \\ -\frac{३३}{८}\,\text{श}\,\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}}\,\frac{\text{प}-\text{च}}{\text{प}+\text{च}}\,\text{कोभु}\,२\,(\text{ब}-\text{बं}) \end{cases}$$

३७५. ह्या समीकरणांमध्यें सर्वच संख्या सामान्य आहेत आणि सामान्य असून अव्यक्त आहेत. जसे व ही संख्या. ही सामान्य असून अव्यक्त आहे. पण शिवाय ती चल आहे. ह्या चल संख्येची किमत आपणाला स्थिर संख्यांनीं दाखवावयाची आहे. चंद्राची चलत्रिज्या र आहे आणि लेख १८५ (२) प्रमाणे

$$\text{र} = \frac{\text{बृ}(१-\text{इ}^{२})}{१+\text{इकोभुब}} = \frac{१}{\text{व}}$$

तेव्हां

$$\text{व} = \frac{१+\text{इकोभुब}}{\text{बृ}(१-\text{इ}^{२})}$$

याप्रमाणेच सूर्याची चलत्रिज्या रं आहे तेव्हां

$$\frac{१}{\text{रं}} = \text{वं} = \frac{१+\text{इं कोभुब}}{\text{बृ}(१-\text{इं}^{२})}$$

आता चंद्राचा केंद्रगभुज (भुजार्ध) कभ याची किंमत लेख १७८ (१) प्रमाणे

$$कभ = \frac{घ^2}{ध} = \frac{(१-इ^2)\ ध^2}{ध} = (१-इ^2)\ ध$$

पण ध म्हणजे दीर्घवर्तुळाच्या वृहदक्षाचे अर्ध = बृ असे लिहिले आहे.

आणि $कभ = \frac{१}{अ}$ किंवा $\frac{१}{कभ} = अ$ आहे.

म्हणून $कभ = (१ - इ^2)\ बृ$ आणि $अ = \frac{१}{(१-इ^2)\ बृ}$

याप्रमाणेंच रवीचा केंद्रगभुज यावरून

$$अं = \frac{१}{(१-इं^2)\ बृ}$$

यावरून

$$\frac{वं}{व} = \frac{१+इंकोभुबं}{१+इकोभुब} \times \frac{(१-इ^2)\ बृ}{(१+इं^2)\ बृ}$$
$$= \frac{१+इंकोभुबं}{१+इकोभुब} \times \frac{अं}{अ}$$

आणि

$$\frac{वं^3}{व^3} = \frac{अं^3}{अ^3}\ (१+इंकोभुबं)^3 \times (१+इकोभुब)^{-3}$$

ह्या समीकरणांतील ब आणि बं ह्या मात्र चलसंख्या आहेत.

३७६. वरच्या प्रेरणांच्या समीकरणामध्यें $\frac{स}{ज^3}$ ही संख्या आहे हिची किंमत शोधूं.

स ही सूर्याकर्षण शक्ति, हिच्याशी समप्रमाणांत प्रकृत्यंश आहेत. सूर्याचे प्रकृत्यंश कक्षेच्या पदांनीं समजतात. त्यावरून (ले. ३०७)—

$$स = म$$

पृथ्वीचा सूर्यासभोवती प्रदक्षिणाकाल $= २\pi\sqrt{\frac{बृ^3}{स}}$

आणि चंद्राचा पृथ्वीसभोवती प्रदक्षिणा काल $= २\pi\sqrt{\frac{बृ^3}{प}}$

तेव्हां $$\frac{\text{चं. प्र. का}}{\text{पृ. प्र. का}} = २\pi\sqrt{\frac{\text{बृ}^{३}}{\text{प}}} \div २\pi\sqrt{\frac{\text{बृ}'^{३}}{\text{स}}} = \text{ठ}$$

ठ हें अक्षरचिन्ह योजिले आहे, याची किंमत $\frac{२७}{३६५}$ आहे.

वर्ग केला तर $$\text{ठ}^{२} = \frac{\text{बृ}^{३}}{\text{बृ}'^{३}} \times \frac{\text{स}}{\text{प}} \quad \text{म्हणून}$$

$$\frac{\text{स}}{\text{प}} = \text{ठ}^{२}\,\frac{\text{बृ}'^{३}}{\text{बृ}^{३}} = \frac{\left\{(१ - \text{इ}^{२})\,\text{अ}\right\}^{३}}{\left\{(१ - \text{इं}^{२})\,\text{अं}\right\}^{३}}$$

परंतु भू कक्षेसंबंधी जसे $\text{म} = \text{अज}^{२}$ तसे चंद्र कक्षेसंबंधीं

$$\text{प} = \text{अज}^{२}$$

तेव्हां $$\frac{\text{स}}{\text{प}} = \frac{\text{स}}{\text{अज}^{३}} = \text{ठ}^{२}\left(\frac{१ - \text{इ}^{२}}{१ - \text{इं}^{२}}\right)^{३}\frac{\text{अ}^{३}}{\text{अं}^{३}}$$

$$\frac{\text{स}}{\text{ज}^{२}} = \text{अठ}^{२}\left(\frac{१ - \text{इ}^{२}}{१ - \text{इं}^{२}}\right)^{३} \times \frac{\text{अ}^{३}}{\text{अं}^{३}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

ह्या समीकरणाला $\frac{\text{वं}^{३}}{\text{व}^{३}}$ ह्याच्या किंमतीनें गुणू. ही मागच्या लेखांत सिद्ध केली आहे. त्यावरून

$$\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}} = \text{अठ}^{२}\,\frac{(१ - \text{इ}^{२})^{३}\,(१ + \text{इंकोभुबं})^{३}}{(१ - \text{इं}^{२})^{३}\,(१ + \text{इकोभुब})^{३}}$$

३७७. चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति इ ही सुमारें $\frac{१}{२०}$ आहे. ह्या अनुरोधाने सूक्ष्मतेच्या पदव्या स्वीकारल्या आहेत. एखादी संख्या $\frac{१}{२०}$ च्या सुमारे असेल तर ती संख्या पहिल्या पदवीची संख्या होय. तसेच जी संख्या $\frac{१}{४००}$ च्या सुमारे असेल ती दुसऱ्या पदवीची संख्या समजावी आणि $\frac{१}{८०००}$ जवळची तिसऱ्या पदवीची संख्या होय. चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति इ ही संख्या चंद्रसूर्याच्या गतीचे गुणोत्तर ठ, चंद्राच्या महत्तम शराची स्पर्शरेषा ल ह्या अक्षरांने दाखवावयाचे ठरविले आहे. ती ल ही संख्या. भू कक्षेची केंद्रच्युति इं ही सुमारें $\frac{१}{६०}$ जवळ आहे; ही सुद्धा पहिल्याच पदवीची संख्या मानिली आहे. चंद्रकक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणें प्रथम पहिल्या पदवीनें सोडवावयाची आहेत. नंतर दुसऱ्या, तिसऱ्या पदवीने सोडविता येतात. ही समीकरणें एकदम सोडविता येत नाहींत. प्रथम स्थूल किंमती शोधून नंतर त्यापेक्षा सूक्ष्म किंमती काढाव्या लागतात. चंद्रावर सूर्याचें आकर्षण दुसऱ्या पदवीची संख्या उत्पन्न करणारे आहे; कारण $\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}}$ याची किंमत $\text{ठ}^{२}$ या संख्येजवळ आहे. त्याचा

विचार दुसऱ्या पदवीच्या वेळी होईल. असे म्हणून ते बाजूस ठेविले तर चंद्रकक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणें खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतील :—

$$\left\{\frac{सू^2 श}{सूब^2} + श\right\} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\left\{\frac{सू^2 व}{सूब^2} + व\right\} = अ \quad \cdots\cdots\cdots (२)$$

$$\frac{सूक}{सूब} = \frac{१}{जव^2} \quad \cdots\cdots\cdots (३)$$

ह्यापैकीं (२) व (३) ही समीकरणें मागे सोडवून दाखविली आहेत. लेख ३१६, ३१७ आणि ३०५, ३०६ व ३०७ हे पुनः लक्षपूर्वक पहा. विवक्षित समीकरणाचें संकलन त्या समीकरणाच्या संस्थितिवरूनच करावे लागते. चलत्रिज्येसंबंधी विचार केला तर दिसून येते कीं, चलत्रिज्या ० कधीही नसते, म्हणून तिच्या समीकरणांत स्थिर संख्या असलीच पाहिजे. चलत्रिज्या केंद्र संन्निधानापासून वाढत जाते म्हणून व संख्या कमी होत जाईल म्हणून (२) हे समीकरण कोभुज्येचे आहे. पण (१) हे समीकरण शराचे आहे. ते भुजज्यचे आहे.

ह्यावरून वरच्या तिन्ही समीकरणांचें संकलन खालीं दिल्याप्रमाणे होते :—

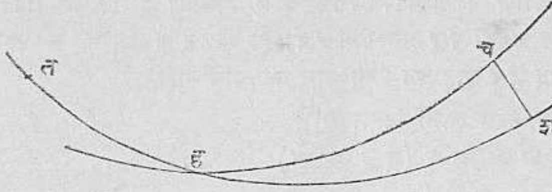
$$श = ल\,भु\,(एब - रा) \quad \cdots\cdots\cdots (१)$$

$$व = अ\left\{१ + इकोभु\,(णब - उ)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (२)$$

$$कम = ब - २इभु\,(णब - उ) \quad \cdots\cdots\cdots (३)$$

३७८. वरच्या तीन समीकरणांपैकीं समीकरण (२) चलत्रिज्येचें आहे. याच्या संकलनासंबंधीं लेख ३०५ मध्यें विशेष खुलासा केला आहे. तथापि तेथें $(१ - ण^2)$ याची किंमत ० मानिली आहे, म्हणजे $ण^2 = १$ मानिली आहे. जर पृथ्वीच्या कक्षेंत केंद्र सन्निधान म्हणजे तकअ कोन (आ. लेख ३४१) ज्यास उ म्हटले आहे तो स्थीर असता तर $ण^2 = १$ असता. पण केंद्रस्थाकर्षणाशिवाय इतर आकर्षण असल्यास कअ रेषा (आ. ले. ३१३) स्थिर रहात नाहीं. तिला चलन प्राप्त होते. त्या चलनास उच्चाचे चलन म्हणतात. हे चलन आम्ही ब ह्या चल संख्येला ण हा गुणक देऊन त्यात सामील करून घेतले आहे. आणि उ ही संख्या ज्यावेळी ब = ० असेल किंवा वास्तविक ब ची कालाशी समप्रमाणांत असलेली क म संख्या ज्यावेळीं ० असेल त्या कालांतीची केंद्रसंन्निधानाची संख्या होय. ह्या स्थानीं ब आणि क म ह्या संख्या स्थूलमानाने समान आहेत असें घेतले आहे. प्रस्तुत आपण असें मानिलें आहे कीं, चंद्रावर पृथ्वीशिवाय इतर कोणाचें आकर्षण नाहीं (सूर्याचें आकर्षण दुसऱ्या पदवीचे आहे) म्हणून चंद्रकक्षा दीर्घवर्तुळ आहे. त्यास अनुसरून समीकरण (२) व (३) यांचा स्पष्ट खुलासा होतो. लेख ३१७ पहा.

३७९. समीकरण (१) हे शराचे आहे. खालच्या आकृतींत तहश हें क्रांतिवृत्त आहे, आणि ह च हें चंद्राचें कक्षावृत्त आहे. त हे पौष्णांत स्थान असून ह बिंदु चंद्र-कक्षेचा व क्रांतिवृत्ताचा छेदन बिंदु (कक्षापात) राहु आहे. आणि च हे चंद्राचें स्थान आहे. च बिंदूपासून त ह क्रांतिवृत्तावर चश लंब काढिला आहे, अर्थात चश हा चंद्राचा शर आहे.



चहश हा गोलीय त्रिकोण असून त्याचा चशह कोन काटकोन आहे. तेव्हा गोलीय त्रिकोण-मितीवरून :

स्प (चश) = स्प (चहश) × भु (हश) [लें. ८७ स. (७)] यामध्ये स्प (चश) = स्पशर = श.

आणि स्प (चहश) = ल ही संख्या घेतली आहे. मध्यम मानाने चंद्राचा महत्तम शर ५ अंश ८ कला आहे. (अनेक महत्तम शरांची वेधाने बेरीज घेऊन आलेल्या बेरजेची सरासरी.) तसेंच हश = तश — तह म्हणजे स्पष्ट चंद्र — राहू = व — रा.

ह्यातील ह बिंदूचे स्थान स्थीर नाहीं. ते प्रतिक्षणी त पौष्णांत बिंदूकडे सरत आहे. म्हणजे राहूला गति असून ती ऋण आहे. याकरितां ए ही संख्या जशी घेतली आहे कीं,

(ए-१) × मध्यम चंद्रगति = राहु गति; ह्या योजनेने राहूची गति चंद्राच्या गतीने दाखविली जाते ती अशी :—

मध्यम चंद्र — राहु = मध्यम चंद्र — {राहु — राहुगति}
= म. चंद्र — रा + (ए — १) म. चंद्र
= म. चंद्र — रा + ए. म. चं — म. चंद्र
= ए. म. चंद्र — रा

ह्यामध्ये स्थूल मानानें मध्यम चंद्र = स्पष्ट चंद्र घेतला म्हणून

श = ल भु (ए ब — रा)

वर जशी राहूची गति मध्यम चंद्राला ए हा गुणक योजून दाखविली तशीच मध्यम चंद्राला ण हा गुणक योजून चंद्राच्या उच्चाची किंवा केंद्र सन्निधानाची गति दाखविता येते ती अशीं :—

चंद्रोच्च गति = चंद्र मध्यम गति × (१ — ण)

चं. मध्यम गति — चंद्रोच्चगति = ण × च. म. गति = ण कम

३८०. सूक्ष्मतेच्या पहिल्या पदवी प्रमाणें चंद्राचा शर आणि रवि चंद्राची चल-त्रिज्या आणि भोग ही समीकरणें सर्वांशी अशीं सिद्ध झालीं आहेत. तीं खालीं दिलीं आहेत. त्यांत द्र हें रवीचे केंद्रसान्निधान आहे असें समजावें. सूर्याचें मंदकेंद्र कंग — द्र हें आहे. ह्यांत कं हा काल मध्यम रवि ज्या क्षणीं पौर्णांति होता त्या क्षणापासून मोजलेला आहे असें समजावें. ग ही रवीची मध्यम गति आहे. कं आणि क यामध्यें अंतर आहे. आणि द्र ही संख्याही चल आहे. परंतु ते चलन अगदी थोडे असल्यामुळें दोन्ही म्हणजे कं आणि क काली समाध आहे म्हणजे द्र हेंच आहे असें म्हणण्यास प्रत्यवाय नाही.

ती समीकरणें खाली दिल्याप्रमाणे—

श = ल भु (ए ब — रा) .. .. .. (१)

व = अ { १ + इ को भु (ण ब — उ) } .. (२)

कम = ब — २ इ भु (ण ब — उ) .. .. (३)

ब = कम + २ इ भु (ण क म — उ) .. .. (४)

बं = कंग + २ इं भु कंम — द्र) .. .. (५)

कंग = बं — २ इं भु (बं — द्र) .. .. (६)

वं = अं { १ + इं को भु (वं — द्र) .. .. (७)

[सूक्ष्मतेची पहली पदवी]

सूक्ष्मतेची दुसरी पदवी

३८१. सूक्ष्मांश समीकरणांत उजवीकडे जी व्यक्त संख्यात्मक पदें येतात त्या पदांचे संकलन करावयाचे असते, त्यात चल संख्या एकच असावी लागते, आणि जिच्या सूक्ष्मांशानें सूक्ष्मांशगुण आलेला असेल तीच पाहिजे असते, म्हणजे संकलन करितां येते. वरच्या सिद्ध केलेल्या सूक्ष्मांश समीकरणांत (लेख ३७३, ३७४) ब च्या सूक्ष्मांशा संबधींच सूक्ष्मांशगुण आहेत, आणि त्या समीकरणाच्या किमती प्र त ष च्या किमती ब ह्याच चल संख्येच्या रूपानें आणिल्या आहेत. तथापि त्यात इतर चल संख्या येऊ लागल्यास त्या ब च्या रूपानें म्हणजे बला कांहीं स्थीर गुणक योजून घ्याव्या लागतात. लेख ३८० मध्ये श व कम याची (१), (२), (३) ही समीकरणें दिली आहेत त्यांच्या किमती ब च्याच संचयानें दिल्या आहेत. परंतु बं कंग आणि वं यांच्या किमती ब च्या संचयाच्या नाहींत. याकरितां त्या चल संख्याच्या किमती आपणास ब नें दाखविल्या पाहिजेत.

३८२. स्पष्ट रवि चंद्राचा एकमेकाशी कसा संबंध आहे तो कळण्यासारखा नाहीं. परंतु मध्यम रवि चंद्राचा एकमेकाशीं जो संबंध आहे तो कळतो. अगोदर कंग ह्या पदाची किमत ठरवू. काल मोजण्याचा आरंभ क्षण, ज्या क्षणीं मध्यम चंद्र

पौर्णांत बिंदूत येईल तो क्षण घेतला आहे. त्यापासून मोजलेला काल क आहे. ज्या क्षणी मध्यम चंद्र ० होता त्या क्षणीं मध्यम रवि ० असे नेहमी संभवत नाहीं. मध्यम रवि ० होता तो काल कं हा आहे. तेव्हां कं-क ह्या कालांतील रवीची मध्यम गति (कं-क) ग इतकी असली पाहिजे. ही चाल 'घ' ह्या अक्षरानें दाखवूं तेव्हा :

$$(कं\text{-}क)ग = कंग - कग = घ$$

म्हणून

$$कंग = कग + घ.$$

क कालचा आपणाला स्पष्ट रवि पाहिजे आहे. म्हणजे बं ची किंमत आपणाला ठरविली पाहिजे. मध्यम रवीवरून आपणाला स्पष्ट रवि करितां येतो [ले. ३८० समी. (५)] त्याप्रमाणें

$$बं = कंग + २ इं भु (कंग - द्र)$$
$$= कग + घ + २ इं भु (कग + घ - द्र)$$

ह्या समीकरणात ग ही रवीची मध्यम गति आली आहे ती लुप्त करितां येते. त्या स्थानीं म ह्या चंद्राच्या मध्यम गतीची योजना करिता येते. ती खाली दिल्या-प्रमाणे :—

$$ग = २\pi \div \text{रवीचा पूर्ण प्रदक्षिणा काल}$$
$$म = २\pi \div \text{चंद्राचा पूर्ण प्रदक्षिणा काल}$$
$$\frac{ग}{म} = \frac{\text{चं. प्र. का}}{\text{र. प्र. का}} = ठ \qquad [\text{ले. ३७६}]$$
$$ग = ठम$$

ही गची किंमत वरच्या समीकरणांत ठेवूं. तेव्हां

$$बं = ठकम + घ + २ इं भु (ठकम + घ - द्र)$$

ह्या समीकरणांत कम हा मध्यम चंद्र आलेला आहे तो इष्ट नाहीं. त्या स्थानीं ब हा स्पष्टचंद्र आणिला पाहिजे. हें कृत्य ले. ३८० स. (३) प्रमाणे करितां येते. कारण :

$$कम = ब - २ इ भु (णब - उ)$$

तेव्हां

$$बं = ठ \left\{ब - २ इ भु (णब - उ)\right\} + घ$$
$$+ २ इं भु \left[ठ \left\{ब - २ इ भु (णब - उ)\right\} + घ - द्र \right]$$

प्रस्तुत आपणांस पहिल्याच पदवीच्या रूपाची जरूर आहे.

म्हणून

$$बं = ठब + घ + २ इं भु (ठब + घ - द्र)$$

वरचे समीकरण ब = ब यांतून वजा केलें तेव्हा

$$ब - बं = ब - ठबं - घ - २ इंभु (ठब + घ - द्र)$$
$$२ (ब - बं) = (२ - २ ठ) ब - २ घ - ४ इं भु (ठब + घ - द्र)$$

३८३. कांहीं पारिभाषिक शब्दांचे अर्थ--

केंद्र--हचा शद्बाचा व्यवहारातील अर्थ अनेक वस्तूंच्या एकीकरणाचें स्थान असा आहे. परंतु येथें आम्ही दोन कोनांची किंवा कोनांच्या पटीची वजाबाकी किंवा बेरीज अशा अर्थानें केंद्र हा शद्ब वापरीत आहो. जसे : मंदकेंद्र = ग्रहाचे मध्यम भोग — केंद्रसान्निधान. सूर्याचे मंदकेंद्र बं — द्र, किंवा चंद्राचा स्पष्ट भोग ब च्या किमतीनें (ठब + घ — द्र) हें आहे, इत्यादि.

केंद्रगुणक--केंद्रात जी चल संख्या असते, तिच्या गुणकाला केंद्रगुणक असें म्हटले आहे. जसे (ठब + घ — द्र) हचा केंद्रांत घ आणि द्र हे कोन स्थीर आहेत, ब ही कोनाची संख्या चल आहे, तिला ठ हा गुणक आहे म्हणून त्याला केंद्रगुणक म्हणावें.

पदगुणक--इच्छिलेल्या पदाचा जो गुणक त्याला पदगुणक म्हणावें.

लेखन सौकर्याकरिता लांब लांब दोन-तीन-चार पदें ज्यामध्ये आहेत जशा केंद्रांना कांहीं नामाक्षरें योजिली आहेत. त्याचा खुलासा येथे करीत आहे. केंद्रातील स्थीर क्षेपक पदें घ, उ, रा, द्र, ही गाळून ठेवून केंद्रे लिहावयाची आहेत. ही पदें गाळिल्याने कांहीं मोह उत्पन्न होत नाहीं. ही स्थीरपदें केंद्र गुणकाशी संगत आहेत. ब ला केंद्रगुणक १,२,३ हे गुणक असले तर त्यापुढे क्षेपक पद नाहीं. जसे: (२ ब) असें केंद्र असेल तर त्या केंद्रात स्थीर पद नाहीं. ब ला ण गुणक असेल तर क्षेपक पद — उ आहे असे म्हणावें, ए हा गुणक असला तर — रा आहे. केंद्रगुणक ठ असतां + घ हें क्षेपक पद असतें. पण रवीच्या, चंद्रगतीनें आणिलेल्या केंद्रात + घ — द्र ही क्षेपक पदें आहेत. यास्तव त्याठिकाणीं ठ च्या जागी ड हा गुणक (केंद्रगुणक) योजिला आहे.

३८४. सूक्ष्मांश समीकरण सोडवावयाचे म्हणजे त्यांत जे अवलंबी पद असते त्याची किंमत ठरविणें होय. त्या समीकरणांत जो सूक्ष्मांश गुण असतो त्याची किंमत केवळ संख्यांनी दिलेली असते त्या संख्यांवरून त्या अवलंबी पदाची किंमत ठरते हचाच्या कृतीला संकलन म्हटले आहे. प्रस्तुत विषयामध्यें म्हणजे ग्रहगणितांत जी

सूक्ष्मांश समीकरणें आली आहेत, आणि त्याचे संकलन करण्याचे प्रसंग येतात त्यांचीं काल्पनिक एक-दोन उदाहरणें घेऊन त्यांचें संकलन कशा रीतीनें करावें याची रीति खालीं देतो. त्याकरिता एक काल्पनिक पद सामान्य स्वरूपाचें घेतो :—

$$\frac{सू^2 व}{सू ब^2} + व = \ldots\ldots + ध\ कोभु\ (पब - स)\ \ldots\ldots\ldots (१)$$

ह्या समीकरणाचें संकलन कसें येतें हें माहित आहे. डावीकडच्या पेटयांत व ही संख्या येते आणि उजवीकडे कोभु (पब—स) हेंच पद येतें. पण त्याला गुणक कोणता येतो हें माहित नाहीं. समजा तो गुणक फ हा येतो. म्हणजे संकलन

$$व = \ldots\ldots + फ\ कोभु\ (पब - स) \quad .. \quad (२)$$

याचा शून्यलब्धिगुण.

$$\frac{सू\ व}{सू\ ब} = \ldots\ldots - प.\ फ\ भु\ (प ब - स) \quad .. \quad (३)$$

तसेच :

$$\frac{सू^2 व}{सू\ ब^2} = \ldots\ldots - प^2.\ फ\ कोभु\ (प\ ब - स) \quad .. \quad (४)$$

समीकरण (२) व (४) यांची बेरीज केली तर

$$\frac{सू^2 व}{सू\ ब^2} + व = \ldots.\ (१ - प^2)\ फ\ कोभु\ (प\ ब - स) \quad (५)$$

समीकरण (१) याचे संकलन समीकरण (२) हे आहे. कारण (२) ह्या समीकरणापासून समीकरण (१) मधील डावीकडचा पेटा तयार होतो. आणि असें ठरतें कीं, समीकरण (१) आणि (५) ही दोन्ही एकच आहेत. म्हणून

$$+ ध\ कोभु\ (पब - स) = + (१ - प^2) फ\ कोभु\ (पब - स)$$

$$ध = (१ - प^2) फ$$

$$फ = \frac{ध}{१ - प^2}$$

ह्यावरून रीति ठरते ती अशी :—

रीति (१) श आणि व यांच्या सूक्ष्मांश समीकरणाचे संकलन करावयाचे असले तर, ज्या पदाचें संकलन करावयाचें त्याच्या केंद्रगुणकाचा वर्ग १ ह्या संख्येत वजा करून आलेल्या बाकीनें त्या पदाच्या गुणकाला भागावे, हा भागाकार संकलित पदाचा गुणक होतो. संकलनानें केंद्रगुणक किंवा क्षेपक पद यांत बदल होत नाहीं. संकलन ज्या पदाचे असेल त्याशीच संकलन कार्याचा संबंध असतो, इतर पदाशीं नसतो.

हचा पद्धतीनेच कालाच्या म्हणजे कम च्या समीकरणाचें संकलन कसें करावें तें ठरवूं. त्याकरिता काल्पनिक पद घेऊं.

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \quad \ldots \quad \ldots + \text{ध कोभु (पब—स)}$$

याचे संकलन

$$\text{क} = \quad \ldots \quad \ldots + \text{फ भु (पब—स)}$$

याचा सूक्ष्मांश गुण

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \quad \ldots \quad \ldots + \text{पफ कोभु (पब—स)}$$

$$\text{पफ} = \text{ध}$$

$$\text{फ} = \frac{\text{ध}}{\text{प}}$$

यावरून रीति ठरते ती खालीं दिली आहे. कोभुजज्येचे संकलन + भजज्या हचा पदानें येते, आणि भुजज्येचे संकलन—कोभुजज्येने येतें.

रीति (२) कालाच्या सूक्ष्मांश समीकरणाचे म्हणजे $\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} =$ याचे किंवा त प्रेरणेच्या पदांचे संकलन करावयाचे असेल तर, ज्या पदाचे संकलन करावयाचे त्या पदाच्या गुणकाला त्याच्या केंद्रगुणकानें भागावें. भागाकार हा संकलित पदाचा गुणक होतो. केंद्रांत कांहीं बदल होत नाहीं.

३८५. वरच्या लेखातील विचारावरून आपणाला हे कळते कीं, संकलनानंतर विवक्षित पदाचा पदगुणक बदलतो, त्यामुळें कित्येक पदांची पदवी भिन्न होते. शर आणि चलत्रिज्या हचांची पदवी चवथीची तिसरी, तिसरीची दुसरी, पाचवीची चवथी याप्रमाणें होते. ज्या पदाचा केंद्रगुणक १ हचा संख्येजवळ असेल तर $(१ - \text{केंद्रगुण}^{२})$ हा भाजक लहान झाल्याने, संकलनानंतर येणारा पदगुणक मोठा होतो आणि वरप्रमाणे पदवी सूक्ष्मतेच्या अलीकडे येते. म्हणजे तिसरीची दुसरी होते. पण केंद्रगुणक ३ ते ५ हचा संख्या समीप असेल तर पदवी सूक्ष्मतेकडे जाते म्हणजे तिसरीची चवथी होते. कालाच्या समीकरणांत केंद्रगुणक ० हचा संख्येजवळ असता त्याने भागिल्यानें पद गुणक वाढतो. हचावरून संकलनानंतर ज्या पदवीची पदें आपणास इष्ट असतील, त्या अनुसंधानानें समीकरणात पदें गोळा केली पाहिजेत. कालाच्या समीकरणांत येणाऱ्या $\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}$ याच्या किमतीपासून येणाऱ्या पदांचे दोन वेळा संकलन होते. म्हणून त्यांतील ० समीप केंद्रगुणकाची पदें दोन पदव्या पुढची घ्यावी लागतात.

३८६. चंद्राची सूक्ष्मांश समीकरणें दुसऱ्या पदवीनें सोडविण्यास आता सुरुवात करूं. समीकरणांत जीं पदे घ्यावयाची ती कोणत्या पदवीची घ्यावी याचा गणितकार्याच्या आधी उमज घडावा याकरितां समीकरणांतील गुणक कोणत्या पदवीचे आहेत हे त्वरित लक्षांत यावे म्हणून त्यांचे स्पष्टीकरण प्रथम काढतो. हे मुख्य गुणक चार आहेत. तें असे

$$(१)\ \frac{सवं^{३}}{ज^{२}व^{३}},\quad (२)\ \frac{सवं^{३}}{ज^{२}व^{४}},\quad (३)\ \frac{सवं^{४}}{ज^{२}व^{४}},\quad (४)\ \frac{सवं^{४}}{ज^{२}व^{५}}$$

$$(१)\ \frac{सवं^{३}}{ज^{२}व^{३}} = अठ^{२}\ (१ + इं\ को\ भुडब)^{३} \times (१ + इ\ कोभुणब)^{-३}$$

ह्यावरून हें पद दुसऱ्या पदवीपासून तिसरी चवथी वगैरे ह्व्या त्या पदवीपर्यंत आहे.

ह्या पहिल्या पदाला व = अ (१ + इ कोभुण ब) याने गुणिलें

$$(२)\ \frac{सवं^{३}}{ज^{२}व^{४}} = ठ^{२}(१ + इं\ कोभु\ डब)^{३} \times (१ + इ\ कोभुण\ ब)^{-४}$$

$$(३)\ \frac{सवं^{४}}{ज^{२}व^{४}} = \frac{अं}{अ}\ अठ^{२}\ (१ + इं\ कोभुडब)^{४} \times (१ + इ\ कोभुणब)^{-४}$$

$$(४)\ \frac{सवं^{४}}{ज^{२}व^{५}} = \frac{अं}{अ}\ ठ^{२}\ (१ + इं\ कोभुडब)^{४} \times (१ + इ\ कोभुणब)^{-५}$$

भु (ब-बं) तसेंच कोभु (ब — बं) तसेंच (ब-बं) ची कोणतीही पट यांची भुजज्या किंवा कोभुजज्या ह्या पदवी कमजास्त करीत नाहींत. पण यांच्या विस्तारांत जीं पदें येतील त्यांना कांहीं गुणक येतात. त्या गुणकानुरूप त्या पदाची पदवी असतें. (३) आणि (४) हे गुणक चवथ्या पदवीचे आहेत, कारण—

$$\frac{अं}{अ}\ \frac{प - च}{प + च} = \frac{१}{४००}\ \text{आहे,}$$

३८७. प्रथम शराचें समीकरण घेऊं. ह्या समीकरणांत ३ पदें आहेत. ले. ३७३ पहा. ती क्रमानें घेऊन त्यांच्या किंमती काढूं. ह्या किंमतींत दुसऱ्या पदवीचीं सर्व पदें, आणि ज्यांचा केंद्रगुणक १ ह्या संख्येजवळ आहे अशी तिसऱ्या पदवीची पदें इतकीच घ्यावयाची आहेत.

$$\frac{प्रश - ष}{ज^{२}व^{३}} = -\ \frac{३}{२}\ श\ \frac{सवं^{३}}{ज^{२}व^{४}} \left\{ १ + कोभु\ २\ (ब - बं) \right\}$$

$$= -\ \frac{३}{२}\ ठ^{२}लभुएव \left\{ १ + कोभु\ (२ - २\ ठ)\ ब \right\}$$

$$= -\ \frac{३}{२}\ ठ^{२}लभुएब + \frac{३}{४}\ ठ^{२}लभु\ (२ - २\ ठ - ए)\ ब$$

ह्या स्पष्टीकरणांत तिसऱ्या पदवीचें आणखी एक पद मिळतें, तें $\frac{3}{8}$ ठ^{2}लभु (२–२ठ+ए) ब हें आहे. पण याचा केंद्र गुणक (२+ए) हा ३ संख्येजवळ आहे कारण ए=१. म्हणून ते घेतले नाहीं. वरच्या पदाच्या किंमती मधील श $\frac{\text{सवं}^{4}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{5}}$ हा गुणक पांचव्या पदवीचा आहे. समीकरणांतील दुसरें पदाचें स्पष्टीकरणः—

$$\text{श} = \text{लभुएब}$$

$$\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} = \text{लएकोभुएब} = \text{लकोभुएब}\ [\text{कारण ए} = १]$$

$$-\frac{\text{त}}{\text{थज}^{2}\text{व}^{3}}\cdot\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} = +\tfrac{3}{2}\frac{\text{सवं}^{3}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{4}}\ \text{भु}\ २\ (\text{ब}-\text{बं}) \times \text{लकोभुएब}$$

$$= +\tfrac{3}{2}\text{ठ}^{2}\text{भु}\ (२-२\text{ठ})\ \text{ब} \times \text{लकोभुएब}$$

$$= +\tfrac{3}{4}\text{ठ}^{2}\text{लभु}\ (२-२\text{ठ}-\text{ए})\ \text{ब}$$

त प्रेरणेच्या किंमतीपासून तिसऱ्या पदवीचें इष्ट पद यापेक्षां आणखी निघत नाहीं. शराच्या समीकरणांतील तिसऱ्या पदाला $\left\{\frac{\text{सू}^{2}\text{श}}{\text{सूब}^{2}}+\text{श}\right\}$ हा गुणक आहे ह्याची पहिल्या पदवीची किंमत शून्य आहे. आणि गणित करीत आहोत एथे तिसऱ्या पदवीची पदें आहेत. ठ^{2}ल हा गुणक तिसऱ्या पदवीचा आहे. $\left(\frac{\text{त}}{\text{थज}^{3}\text{व}^{2}}\right)$सूब ह्यातील पाहिलें पद ठ^{2} आहे म्हणजे दुसऱ्या पदवीचे आहे. म्हणून शराच्या समीकरणांत वर निघालेल्या पदाशिवाय पद निघत नाहीं. म्हणून

$$\frac{\text{सू}^{2}\text{श}}{\text{सूब}^{2}} + \text{श} = -\tfrac{3}{2}\ \text{ठ}^{2}\text{ल}^{2}\text{भुएब} + \tfrac{3}{2}\ \text{ठ}^{2}\text{लभु}\ (२-२\ \text{ठ}-\text{ए})\text{ब}$$

ह्या समीकरणाचें संकलन केलें म्हणजे श ची किंमत कळेल. लेख ३८४ मधील रीति (१) प्रमाणें कृति करावयाची. तेव्हां

$$(-\tfrac{3}{2}\text{ठ}^{2}\text{ल}) \div (१-\text{ए}^{2})$$

पण भुएब ह्या पदाचा गुणक ल आहे असे भूमितीरीत्या सिद्ध आहे. अर्थात एथेंही तोच गुणक असला पाहिजे. म्हणून

$$(-\tfrac{3}{2}\text{ठ}^{2}\text{ल}) \div (१-\text{ए}^{2}) = \text{ल}$$

$$\text{तेव्हा}\qquad १-\text{ए}^{2} = -\tfrac{3}{2}\text{ठ}^{2};\ \ \text{ए}^{2} = १ + \tfrac{3}{2}\text{ठ}^{2}$$

$$\text{ए} = १ + \tfrac{3}{4}\text{ठ}^{2}$$

ह्याप्रमाणे एथे आपणाला एक महत्त्वाचा सिद्धांत सांपडला आहे. तो असा कीं, ए ही संख्या मध्यम चंद्रगतीशी संबंध दाखविते आणि त्यावरून राहूगतीचा मध्यम चंद्रगतीशी संबंध कळतो. लेख ३७९ मध्यें दाखविले आहे कीं,

$$(१ - ए) \times \text{मध्यम चंद्रगति} = \text{राहुगति}$$
$$= - \tfrac{३}{४} ठ^{२} \text{ मध्यम चंद्रगति}$$

$$\text{राहुगति} = - \tfrac{३}{४} ठ^{२} \text{ चंद्राची मध्यमगति}$$

चंद्राची मध्यम गति ७९० कला आहे आणि $ठ^{२} = \frac{१}{१८०}$ तेव्हां

$$\text{राहुगति} = - \tfrac{३}{४} \times \tfrac{१}{१८०} \times ७९० = - \tfrac{७९}{२४} = - ३ \cdot २९ \text{ कला.}$$

सूक्ष्मांश समीकरणाची ही दुसरीच पदवी आहे, म्हणून आलेली राहुगति स्थूल आहे.

आता दुसऱ्या पदाचें संकलन करूं. त्यासाठीं त्या पदाचा संकलन गुणक तयार करूं.

$$\left\{ १ - (२ - २ठ - ए)^{२} \right\} = \left\{ १ - (१ - २ठ)^{२} \right\}$$
$$= \left\{ १ - (१ - ४ठ) \right\}$$
$$= + ४ठ$$

$$\frac{१}{१ - (२ - २ठ - ए)^{२}} = \frac{१}{४ठ} \quad \text{हा संकलन गुणक होय}$$

तेव्हा

$$+ \tfrac{३}{२} ठ^{२} ल \times \frac{१}{४ठ} = + \tfrac{३}{८} ठ ल$$

$$\text{म्हणून तें दुसरें पद} = + \tfrac{३}{८} ठल \, भु \, (२ - २ठ - ए)ब$$

यावरून

$$श = लभुएब + \tfrac{३}{८} ठलभु \, (२ - २ठ - ए)ब$$

[शराची दुसरी पदवी]

३८८. आता आपण चलत्रिज्येचें समीकरण सोडविण्यास घेऊं. चलत्रिज्येचे म्हणण्याचे जागी आपण त्यास व चें समीकरण म्हणूं. कारण $\frac{१}{र} = व$. चलत्रिज्येच्या म्हणजे व च्या सूक्ष्मांश समीकरणांत दोन पदें आहेत. त्यापैकीं पहिलें पद $\frac{प्र}{ज^{२}व^{२}}$ हे आहे. याची किंमत लेख ३७४ मध्ये दिली आहे. त्या किंमतीत सहा पदें आहेत.

तीं क्रमानें घेऊन त्यांतील दुसऱ्या पदवीची सर्व आणि ज्यांचा केंद्रगुणक १ हा संख्य समीप आहे अशी तिसऱ्या पदवीची पदें गोळा करूं.

$$(१)\ अ(१ + श^२)^{-\frac{३}{२}} = अ\,(१ - \tfrac{३}{२} श^२ + \cdots)$$

$$- \tfrac{३}{२} अश^२ = - \tfrac{३}{२}\, अ\, ल^२ भु^२ ए ब$$
$$= - \tfrac{३}{४} अल^२ + \tfrac{३}{४} अल^२ को भु २ ए ब \qquad [१]$$

$$(२)\ - \tfrac{१}{२} \frac{स\, वं^३}{ज^२ व^३}$$
$$= - \tfrac{१}{२} अठ^२\,(१ + ३\, इ\, को\, भु\, ड\, ब)\,(१ - ३\, इ\, को\, भु\, ण\, ब).$$
$$= - \tfrac{१}{२} अठ^२ + \tfrac{३}{२} अ\, ठ^२ इ\, कोभु\, ण\, ब \qquad [२]$$

$$(३)\ - \tfrac{३}{२} \frac{स वं^३}{ज^२ व^३} कोभु२\,(ब - बं)$$
$$= ३(-\tfrac{१}{२}अठ^२ + \tfrac{३}{२} अ\, ठ^२ इ\, कोभु\, ण\, ब)\ कोभु\ (२ - २ठ)ब$$
$$= - \tfrac{३}{२} अठ^२\ कोभु\ (२ - २\, ठ)\ ब$$
$$+ \tfrac{९}{४}\ अठ^२\ इ\ कोभु\,(२ - २ठ - ण)\, ब. \qquad [३]$$

(४) (५) यांतील किंमत चवथ्या पदवी पुढील आहे

$$(६)\ - \frac{त}{थ\, ज^२ व^२} \frac{सूव}{सूब} = + \tfrac{३}{२} \frac{सवं^३}{ज^२ व^४}\ भु\ (२ब - २बं) \times \frac{सूव}{सूब} + \ldots$$

यातील पुढची दोन पदें चवथ्या पदवीची आहेत. तेव्हां

$$- \frac{त}{थ ज^२ व^२} \frac{सूव}{सूब} = + \tfrac{३}{२} ठ^२\,(१ - ४ इ\, कोभु\, णब)\ भु\ (२ - २ठ)\ ब\, \frac{सूव}{सूब}$$
$$व = अ\ (१ + इ\ कोभुणब) \qquad [ले.\ ३८०]$$

$$\frac{सूव}{सूब} = -अ\, ण\, इ\, भुण\, ब = -अ\, इ\, भुण\, ब \qquad [ण = १]$$

$$- \frac{त}{थ ज^२ व^२} \frac{सूव}{सूब} = - \tfrac{३}{४}\ अठ^२ इ\, कोभु\ (२ - २ठ - ण)\ ब \quad [६]$$

आता व च्या समीकरणांतील दुसरें पदापासून येणारी किंमत काढूं. त्या दुसऱ्या पदांत दोन अवयव आहेत. त्यापैकीं एक अवयव खाली दिल्याप्रमाणे आहे. लेख ३७७ स. (२) पहा.

$$२\left\{ \frac{सू२व}{सू ब^२} + व \right\} = २अ$$

दुसरा अवयव $ॐ \frac{त}{थज^2 ब^2}$ सू ब. यांतील

$$\frac{त}{थज^2 व^2} = - \frac{3}{2} \frac{सवं^3}{ज^2 व^4} भु२ (ब - बं)$$
$$= - \frac{3}{2} ठ^2 (१ - ४इ कोभुणब) भु (२ - २ठ) ब$$
$$= - \frac{3}{2} ठ^2 भु (२ - २ठ) ब + ३ ठ^2 इ भु (२ - २ठ - ण) ब$$

या समीकरणाचे संकलन करावयाचे. लेख १८४ रीति (२). तेव्हा

$$ॐ \frac{त}{यज^2 ब^2} \ सूब = + \frac{3}{2} \frac{ठ^2}{२ - २ठ} कोभु (२ - २ठ) ब$$
$$- ३ \frac{ठ^2 इ}{२ - २ठ - ण} कोभु (२ - २ठ - ण) ब$$
$$= \frac{3}{4} ठ^2 कोभु (२ - २ठ) ब - ३ठ^2 इकोभु (२ - २ठ - ण) ब$$

तेव्हां

$$- २ \left\{ \frac{सू२व}{सूब^2} + व \right\} \times ॐ \frac{त}{थज^2 व^2} \ सूब$$
$$= - \frac{3}{2} अठ^2 कोभु (२ - २ठ) ब + ६ अठ^2 इ कोभु (२ - २ठ - ण) ब.$$

वर काढिलेल्या $\frac{प्र}{ज^2 व^2}$ या पदाची किंमत आणि दुसऱ्या पदाची किंमत वरची दोन पदें ही एकत्र केली. तेव्हा,

$$\left\{ \frac{सू२व}{सूब^2} + व \right\} = अ \left\{ \begin{array}{l} १ - \frac{3}{4} ल^2 - \frac{1}{2} ठ^2 + \frac{3}{2} ठ^2 इ \ कोभु \ ण \ ब \\ + \frac{3}{4} ल^2 कोभु२ए ब - ३ ठ^2 कोभु (२ - २ठ) ब \\ + \frac{15}{2} ठ^2 इ \ कोभु (२ - २ठ - ण) ब \end{array} \right.$$

ह्या समीकरणाचें संकलन खालच्या लेखांत केलें आहे.

३८९. व च्या समीकरणाचें संकलन करावयाचें. ह्या समीकरणांत $- \frac{3}{4} ल^2 - \frac{1}{2} ठ^2$ ही आणि यांना गुणक अ अशी स्थीर पदें आहेत. परंतु, ह्या समीकरणांत असलेल्या स्थीर पदांत (केंद्राविरहित स्थीर पदांत) कोणत्याही प्रकारचा विपर्यास होत नाहीं, हे सहज लक्षांत येण्यासारखे आहे. कारण सूक्ष्मांश-गुण वर्तवितांना विकारी पदाशी असंयुक्त पदें लुप्त होतात. पण ह्या समीकरणांत व हे विकारीपद मिळविले असल्यामुळें संकलनांत तीं पदें जशीचीं तशीं येतात.

सूक्ष्मांश गणित व त्यास सहाय्यभूत त्रिकोमिति आदिकरून उच्चगणितात्मक भाग यांच्या सहाय्यानें अनेक चमत्कृतिजनक सिद्धांत व शोध लागले आहेत. त्या-पैकींच चंद्राचा कक्षापात म्हणजे राहु याची गति केवळ गणिताने साध्य होते, तशीच

चंद्रोच्च अथवा चंद्राचे केंद्रसंन्निधान याचीही गति साध्य होते. चंद्रोच्चगति वरच्या समीकरणावरून कशी साध्य होते हे राहूगति लेख २८७ मध्ये दाखविली आहे त्याच-प्रमाणे साध्य होते. तीं खालीं दिल्याप्रमाणें.

भूमितिरीत्या सिद्ध केले आहे कीं, व ह्या पदाच्या किंमतीत कोभुणव ह्या पदाला इ हा गुणक आहे. आणि आकर्षण कार्य नसते तर त्यांत बदल झाला नसतां. संकलनानें त्या पदाला $+\frac{३}{२}\,\frac{\text{ठ}^{२}\text{इ}}{१-\text{ण}^{२}}$ हा गुण येतो. अर्थात हे दोन्ही गुणक समान आहेत. म्हणून,

$$+\tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इ} \div (१-\text{ण}^{२}) = \text{इ}$$
$$१-\text{ण}^{२} = \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\;;\quad \text{ण}^{२} = १-\tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}$$
$$\text{ण} = १-\tfrac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}$$

३९०. व च्या समीकरणाचे संकलन करण्याकरितां संकलन गुणक तयार करूं. म्हणजे त्या गुणकानें ज्याच्या त्या पदाला गुणिल्यानें संकलन होते. तो गणक व गुणाकार खालीं दिल्याप्रमाणें एथें गुणक न करिता $-३, -३, +४\,\text{ठ}$ हे भाजकच तयार केले आहेत.

$$+\tfrac{३}{४}\,\text{ल}^{२} \div (१-४\,\text{ए}^{२}) = \tfrac{३}{४}\,\text{ल}^{२} \div (१-४) = -\tfrac{१}{४}\,\text{ल}^{२}$$
$$-३\,\text{ठ}^{२} \div \left\{१-(२-२\text{ठ})^{२}\right\} = ३\,\text{ठ}^{२} \div (१-४) = +\text{ठ}^{२}$$
$$+\tfrac{१५}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इ} \div \left\{१-(२-२\text{ठ}-\text{ण})^{२}\right\} = +\tfrac{१५}{२}\text{ठ}^{२}\,\text{इ} \div ४\text{ठ}$$
$$= +\tfrac{१५}{८}\,\text{ठइ}.$$

ह्यावरून व चें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें झाले.

$$\text{व} = \text{अ}\left\{\begin{array}{l} १-\tfrac{१}{२}\text{ठ}^{२}-\tfrac{३}{४}\text{ल}^{२}+\text{इ कोभुणव}-\tfrac{१}{४}\text{ल}^{२}\text{ कोभु २ एव} \\ +\,\text{ठ}^{२}\text{ कोभु }(२-२\text{ठ})\,\text{व}+\tfrac{१५}{८}\text{ठइ कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\text{व} \end{array}\right.$$

[व ची दुसरी पदवी]

३९१. शर आणि चलत्रिज्या यांची सूक्ष्मांश समीकरणें दुसऱ्या पदवीपर्यंत सोडविली. आतां कालाचे म्हणजे कम चे समीकरण दुसऱ्या पदवी पर्यंत सोडवावयाचे. पण ते सोडविण्यास व च्या किंमतीचीं कांहीं पदें तिसऱ्या पदवीचीं घ्यावीं लागतात म्हणजे ज्या पदाचा केंद्रगुणक ० ह्या संख्येजवळ असेल अशी तिसऱ्या पदवीचीं पदें शोधावी लागतात. याकरितां व चें समीकरण तिसऱ्या पदवीपर्यंत पूर्णत्वानें सोडवि-ल्यावर कम चें समीकरण सोडवूं. शर आणि चलत्रिज्या यांची समीकरणें तिसऱ्या पदवीनें सोडविण्यास कम च्या दुसऱ्या पदवीच्या पदाची आवश्यकता नाहीं.

३९२. चलत्रिज्या आणि शर यांच्या समीकरणांतील पदें दुसऱ्या पदवी-करितां जशी गोळा करितां आली, तशीं पुढच्या पदवीकरितां गोळा करणें अति कठीण काम होईल. वरच्या समीकरणांच्या कृतीवरून आपणास हे समजून आलें

आहे कीं, समीकरण इष्ट पदवीनें सोडविण्याकरितां विवक्षित पदें गोळा करावी लागतात. म्हणजे नियमित पदवीची आणि नियमित केंद्रगुणकाची पदें शोधावी लागतात. प्रत्यक्ष पदें गुणाकार वगैरे करून न काढितां विवक्षित पदें शोधिता यावीं अशाकरिता खालची युक्ति योजिली आहे. या युक्तीत अशी योजना केली आहे कीं, प्रत्येक पदाची किंमत दाखविण्यास अव्यक्त अशी पदें घेऊन त्यांच्या गुणाकाराने (नुसते गुण्य गुणक मांडून) त्या पदाची किंमत इष्ट पदवीपर्यंत दाखविली आहे. त्या गुण्य गुणक स्वरूपापासून इष्ट पदें शोधिता येतात. संयुक्त पदापासून निर्माण होणारी असंयुक्त पदें कोणत्या केंद्रगुणकाची आहेत व कोणत्या पदवीची होतील हे प्रत्यक्ष गुणाकार न करितां कळतें याचें स्पष्टीकरण पुढे दिल्याप्रमाणें. उदाहरणार्थ, एक, दोन अवयवांचे संयोगी पदें घेऊ व त्याची असंयुक्त पदें करू. तो गुणाकार असा––

$$प \text{ कोभु } न ब \quad \times \quad द \text{ कोभु } म ब$$

हे दोन अवयवांचे संयोगी पद आहे, ह्यांत प हा पहिल्या पदवीचा गुणक असून द हा दुसऱ्या पदवीचा गुणक आहे. तेव्हां पद हा तिसऱ्या पदवीचा गुणक होईल म्हणजे असंयुक्त असे प्रत्येक पद तिसऱ्या पदवीचे होईल, आणि त्यांचे केंद्रगुणक खाली लिहिल्याप्रमाणे होतील.

$$\tfrac{१}{२} \text{ पद कोभु } (न + म) ब + \tfrac{१}{२} \text{ पद कोभु } (न - म) ब$$

ह्यावरून उघड होते की, संयुक्त पद ज्या दोन पदाच्या गुणाकारापासून झालेले असेल, त्याच्या पदगुणकांच्या गुणाकाराचे अर्ध हा असंयुक्त पदाचा गुणक असतो. आणि ह्या गुणकावरून तें पद कोणत्या पदवीचे आहे हे समजते. तसेच त्या दोन अवयवाचे जे केंद्रगुणक असतील, त्यांच्या बेरजेबरोबर एका असंयुक्त पदाचा केंद्रगुणक असून दुसऱ्या पदाचा केंद्रगुणक वजाबाकी बरोबर असतो. एथे हेही कळेल की, $प^२ द$ हा चवथ्या पदवीच्या पदाचा गुणक आहे. संयुक्तपद दोहोपेक्षां जास्त अवयवांचे असले तरी ही पदांच्या गुणकांच्या गुणाकारानें असंयुक्त पदाची पदवी कळेल, आणि केंद्रगुणकांच्या बेरजा वजाबाक्या ह्यावरून असंयुक्त पदाचा केंद्रगुणक शोधिता येतो. ह्या योजनेनें विवक्षित पदें सहज वेंचितां येतात.

३९३. आपण आतां ज्या सूक्ष्मांश समीकरणाचे संकलन करीत आहोत, त्याच्यामधील पदांच्या किंमती सामान्य स्वरूपाच्या आणि अव्यक्त संख्यात्मक घेऊ, आणि त्या अव्यक्त संख्या संघ रूपानें घेऊं. ते संघ कसें हे खालच्या स्पष्टीकरणावरून कळेल. श व आणि कम यांच्या किंमती सामान्य स्वरूपानें आणि संघ रूपानें खालीं लिहिल्याप्रमाणें घेतल्या आहेत.

$$श = (श_१) + (श_२) + (श_३) + (श_४) \ldots\ldots (१)$$

$$\frac{१}{अ} व = (व_१) + (व_२) + (व_३) + (व_४) \ldots . (२)$$

$$कम = ब + (क_१) + (क_२) + (क_३) \ldots . (३)$$

श चे आणि व चे सूक्ष्मांश समीकरण दुसऱ्या पदवीपर्यंत सोडविलेले आहे त्यावरून (श$_{१}$), (श$_{२}$) यांच्या किंमती व्यक्त झाल्या आहेत त्या अशा.

(श$_{१}$) = ल भु ए ब

(श$_{२}$) = $\frac{३}{२}$ ठ ल भु (२ — २ठ — ए)

तसेच व च्या किंमती खालीं दिल्याप्रमाणें

(व$_{१}$) = अ इ कोभु ण ब

(व$_{२}$) = — $\frac{१}{२}$ अ ठ^{२} — $\frac{३}{४}$ अ ल^{२} — $\frac{१}{४}$ अल^{२} कोभु२ ए ब
+ अठ^{२} कोभु (२ — २ठ) ब + $\frac{१५}{८}$ अठइ कोभु (२—२ठ — ण) ब

ह्यापैकी प्रत्येक पद. अशा संघाच्या स्वरूपानें (व$_{२}$) हे अव्यक्त पद योजिले आहे.

एथें असेही लक्षांत असावे कीं, (व$_{२}$)^{२} ह्या संख्येचा अर्थ वरच्या पांचही पदांच्या एकूणातीचा वर्ग.

३९४. चंद्राच्या गणितांतील सूक्ष्मता सूक्ष्मतेच्या चवथ्या पदवीपर्यंत न्यावी अशा हेतूनें हें गणित करावयाचें आहे. तेव्हां त्या मानानें अव्यक्त पदें घेतली आहेत. प्रेरणांच्या किमतीमध्ये प्रत्येक प्रेरणेमध्ये आहे अशी साधारण पदें आहेत. त्या पदांच्या किंमती सामान्य स्वरूपानें आधि तयार करूं, म्हणजे त्यावरून प्रत्येक प्रेरणेची किंमत सहज तयार होईल. ही सामान्य पदें खालीं दिल्याप्रमाणें.

(१) श, (५) भु (ब — बं), (९) भु३ (ब — बं),
(२) व, (६) कोभु (ब — बं), (१०) कोभु३ (ब — बं)
(३) कम, (७) भु२ (ब — बं), (११) [१] बं — द्र
(४) ब, (८) कोभु२ (ब — बं), (११) (२) कोभु (बं — द्र)
(१२) [१] वं, (१२) [२] वं^{३} (१२) [३] वं^{४}

(१३) [१] $\frac{१}{व^{३}}$ (१३) [२] $\frac{१}{व^{४}}$ (१३) [३] $\frac{१}{व^{५}}$

(१४) $\frac{स}{ज^{२}}$

(१५) [१] $\frac{स वं^{३}}{ज^{२} व^{३}}$; (१५) [२] $\frac{स व^{३}}{ज^{२} व^{४}}$

(१५) [३] $\frac{स वं^{४}}{ज^{२} व^{४}}$; (१५) [४] $\frac{स व^{४}}{ज^{२} व^{५}}$

ह्या पदांच्या किंमती, व्यक्त पदें असल्यास त्यानीं, आणि व्यक्त पद नसल्यास अव्यक्त पदांनीं प्रथम तयार करूं. नंतर त्यांच्या निदर्शनानें प्रेरणांच्या किंमती लिहूं. ह्या किंमती मधून आपणास इष्ट पदवीचीं पदें वेचून घेऊन समीकरणे मांडता येतील.

३९५. वरच्या २० पदार्पैकीं (१), (२), (३) याचीं स्वरूपें स्पष्टीकरणासह ३९३ लेख यामध्यें दाखविली आहेत.

(४) $बं$ = सूर्याचे स्पष्ट भोग. सूक्ष्मांश समीकरणात अवलंबी पद श व आणि क ह्या पैकीं एक, आणि विकारी पद ब हें एकच असलें पाहिजे. ह्या शिवाय चलसंख्या नसली पाहिजे. त्या शिवाय असलेली चलसंख्या ब च्या पटीनेंच दाखविली पाहिजे. तेव्हां

$$बं = ठकम + घ + २ इं भु (ठकम + घ - द्र) + \tfrac{5}{4} इं^2 भु२ (ठकम + घ - द्र)$$

[लेख ३२०, ३२५, ३८२]

ह्या समीकरणांत कम हें पद आहे तें यांतून लुप्त केले पाहिजे.

$$कम = ब + (क_1) + (क_2) + (क_3)$$

ह्या समीकरणाला ठ नें गुणून त्यात घ—द्र ही स्थीरपदें धनर्ण केली तेव्हां.

$$ठकम + घ - द्र = ठब + घ - द्र + ठ(क_1) + ठ(क_2) + ठ(क_3)$$

ह्या पदाची व याच्या दुपटीच्या पदाची भुजज्या केली पाहिजे.

(हे कृत्य लेख २५६ प्रमाणे करावे.)

एक पटीची भुजज्या चवथ्या पदवीपर्यंत पुरे, आणि दुपटीची भुजज्या दुसऱ्या पदवीपर्यंत असावी. त्या भुजज्याना अनुक्रमें २इं आणि $\tfrac{5}{4}इं^2$ हे गुणक यावयाचे आहेत. $इं^2$ ही संख्या फार सूक्ष्म $(\tfrac{1}{60})^2$ असल्यामुळे $इं^2$ पेक्षां जास्त सूक्ष्मतेची आवश्यकता नाहीं. ठकम + घ — द्र ह्यातील घ — द्र ह्या संख्या गाळून ठ च्या जागी ड हा केंद्र गुणक केला. असे घेऊन :—

$$भु (ठकम + घ - द्र) = भुडब - \tfrac{1}{2}ठ^2 (क_1)^2 भुडब + ठ(क_1) कोभुड + ठ(क_2) कोभुड + ठ(क_3) कोभुड$$

आणि $$भु२(ठकम + घ - द्र) = भु२डब + २ठ(क_1) कोभु२डब$$

तेव्हां

$$बं = \begin{cases} ठब + घ + ठ(क_1) + ठ(क_2) + ठ(क_3) \\ \quad + २इंभुडब + २इंठ(क_1) कोभुडब \\ \quad + २इंठ(क_2) कोभुडब + २इंठ(क_3) कोभुडब \\ \quad - ठ^2इं(क_1)^2भुडब + \tfrac{5}{4}इं^2भु२डब \\ \quad + \tfrac{5}{2}इं^2ठ(क_1) कोभु२डब \cdots\cdots\cdots \quad (४) \end{cases}$$

३९६. (५) भु(ब—बं), हें पद तयार करण्याकरिता ब चंद्राचे स्पष्ट भोग यामध्यें बं म्हणजे सूर्याचे स्पष्ट भोग वजा करावयाचे. अर्थात समीकरण (४) वजा करावयाचे. आणि जी वजावाकी येईल त्या बाकीची भुजज्या करावयाची आहे. (हें कृत्य लेख २५६ प्रमाणें करावे.)

प्रथम ब–बं यांची वजाबाकी लिहिली पाहिजे, ती खाली दिली आहे. ती सर्व न देता तिसऱ्या पदवीपर्यंत फार सूक्ष्म होते. पण दिली आहे.

ब — बं = (१ — ठ)ब — २इं भुडब — ठ(क$_{१}$) — ठ(क$_{२}$)

भु(ब — बं) = भु(१ — ठ)ब — २इंभुडबकोभु(१ — ठ) ब
— ठ(क$_{१}$)कोभु(१ — ठ)ब — २इं^{२}भु^{२}डबभु(१ — ठ) ब
— $\frac{५}{४}$इं^{२} भु२डबकोभु(१ — ठ)ब · · · · · · (५)

(६) या पदाची सूक्ष्मता दुसऱ्या पदवीपर्यंत पुरे आहे.

कोभु(ब — बं) = कोभु(१ — ठ)ब + २ईभुडबभु(१ — ठ)ब
+ ठ(क$_{१}$) भु (१–ठ)ब — २इं^{२}भु^{२}डबकोभु(१ — ठ)ब
+ $\frac{५}{४}$इं^{२}भुरडबभु(१ — ठ)ब · · · · · · · · (६)

(७) भु२ (ब — बं) ह्या पदाच्या विस्तारांत ४ थ्या पदवीपर्यंत सूक्ष्मतेची आवश्यकता आहे. तितकी २ (ब-बं) ची किंमत लिहू नंतर त्याची भुजज्या करूं. भुजज्या लेख २५६ प्रमाणें करावीं.

२(ब–बं) = {
(२–२ठ)ब — ४इं भुडब — २ठ(क$_{१}$) — २ठ(क$_{२}$)
— २ठ(क$_{३}$) — ४इं ठ(क$_{१}$)को भुडब — ४इंठ(क$_{२}$) कोभुडब
— $\frac{५}{२}$ इं^{२} भु२ डब — ५इं^{२} ठ(क$_{१}$) कोभु२डब

ह्याची भुजज्या करिता त्यांत जी भु (२ — ठ) ब आणि कोभुड यांच्या गुणाकाराचीं पदें येतील त्यांचा गुणाकार करून आलेलीं पदें खाली लिहिलीं आहेत. म्हणजे भुडब.कोभु (२–२ठ) = $\frac{१}{२}$भु (२–२ठ+ड) आणि –$\frac{१}{२}$भु(२–२ठ–ड) अशा रीतीनें गुणाकार करून पदें घेतली आहेत.

भु २(ब-बं) = {
+ भु(२–२ठ)ब — २इंभु(२–२ठ + ड)ब
+ २इंभु(२–२ठ — ड)ब — ४इं^{२} भु(२–२ठ)ब
+ $\frac{३}{४}$ इं^{२}भु(२–२ठ + २ड)ब + $\frac{१३}{४}$ इं^{२}भु (२–२ठ–२ड)ब
— २ठ(क$_{१}$) कोभु(२–२ठ)ब — २ ठ(क$_{२}$)कोभु(२–२ठ)ब
+ २ठ (क$_{१}$) इंकोभु (२–२ठ + ड) ब
— ६ठ (क$_{१}$) इंकोभु (२–२ठ–ड)ब
— २ठ(क$_{३}$) कोभु (२–२ठ) ब
— २ठ^{२} (क$_{१}$)^{२} भु (२–२ठ)ब
+ २ठ(क$_{२}$) इंकोभु (२–२ठ + ड)ब
— ६ ठ (क$_{२}$) इंकोभु(२–२ठ — ड)ब
— ८ठ(क$_{१}$) इं^{२}भु (२–२ठ + २ड) ब
— ८ठ (क$_{१}$) इं^{२} भु (२–२ठ — २ड)ब……… (७)

(८) कोभु २(ब-बं) ह्या पदाची किंमत तिसऱ्या पदवीपर्यंत पुरे आहे. ही कोभुजज्या २५६ लेखाप्रमाणें करून कोभुडब × भु(२—२ठ) असे गुणाकार केले आहेत.

+ कोभु (२-२ठ)ब — २इंकोभु (२-२ठ + ड)ब
— ४इं^{२}कोभु(२-२ठ)ब + २इंकोभु(२-२ठ — ड)ब
+ २ ठ (क$_{२}$) भु (२-२ ठ)ब + २ ठ(क$_{२}$)भु(२-२ ठ)ब
+ ६ ठ (क$_{१}$) इंभु (२-२ ठ-ड) — २ ठ(क$_{१}$)इंभु(२-२ ठ + ड)ब
+ $\frac{१३}{४}$ इं^{२}कोभु(२-२ ठ-२ ड)ब + $\frac{३}{४}$ इं^{२}कोभु(२-२ ठ + २ड) ब

(९) भु३(ब-बं) ह्या पदाला स्थीर पदाचा गुणक चवथ्या पदवीचा आहे म्हणून याची भुजज्या कोभुजज्या पहिल्या पदवीची पुरे आहे.

३ (ब-बं) = (३-३ ठ)ब — ६ इंभुडब

म्हणून

भु ३ (ब-बं)=भु(३-३ठ)ब—६ इं भुडब कोभु (३-३ ठ)ब...... (९)

(१०) कोभु३ (ब—बं) = कोभु(३ — ३ठ)
+ ६ इंभुडबभु (३ — ३ठ)ब......(१०)

३९७. (११) हें पद भूकक्षेच्या चलत्रिज्येच्या व्युत्क्रय पदाचे आहे. वं ची किंमत भूमितिरीत्या सिद्ध झालेली आहे.
ती अशी.

$$वं = अं\left\{ १ + इंकोभु(बं-द्र) \right\}$$

लेख ३९५ समीकरण (४) प्रमाणें.

$$बं-द्र = \begin{cases} डब + ठ (क_{१}) + ठ (क_{२}) + २ इं भुडब \\ \quad + \frac{५}{४} इं^{२} भु२ डब + २ ठइं (क_{१}) कोभुडब. \end{cases} \quad ....(११)[१]$$

ह्याची कोभुजज्या लेख २५६ प्रमाणें केली आणि तिला इं ह्या पदानें गुणिले तेव्हां

$$कोभु (बं-द्र) = \begin{cases} कोभुडब — २इं भु^{२} डब — \frac{५}{४} इं^{२} भु२ डब भुडब \\ — ठ (क_{१}) भुडब — २ इं^{२} भु^{२} डब कोभु डब \\ — ठ(क_{२}) भुडब — २ ठइं (क_{१}) कोभुडब भुडब \end{cases} \quad ....(११) [२]$$

ह्या उल्लेखांतील इं^{३} चीं पदें नको आहेत.

(१२) [१] $वं =$

$$अं \left\{ १ + ई \; कोभु \; (\text{'}-द्र) \right\} =$$

$$वं = अं \left\{ \begin{array}{l} १ + ई \; कोभुडव - ई^{२} + ई^{२} \; कोभु२ \; डव - ठई(क_{१}) \; भुडव \\ - ठई \; (क_{२}) भु \; डव - २ \; ठई^{२}(क_{१}) कोभुड \; वं \; भुडव \end{array} \right. \quad (१२)[१]$$

(१२) [१] $\frac{वं^{३}}{अं^{३}}$, [२] $\frac{वं^{४}}{अं^{४}}$ यांच्या किंमती ह्या किंमती (११) ह्या समीकरणाचा घन आणि चतूर्थात केल्याने येतात.

$$\frac{वं}{अं} = (१ + ध), \text{ तर } \frac{वं^{३}}{अं^{३}} = (१ + ध)^{३}$$

$$\frac{वं^{३}}{अं^{३}} = १ + ३ध + ३ध^{२}$$

आणि $\frac{वं^{४}}{अं^{४}} = १ + ४ध + ६ध^{२}$

ह्या विस्तारांत $इं^{३}$ चें पदांची आवश्यकता मुळीच नाहीं. यास्तव $ध^{२}$ तील पदें शोधूं.

$$३ध^{२} = ३ई^{२} \left(\tfrac{३}{२} + \tfrac{३}{२} \; कोभु२डब\right) - ६ठ \; (क_{१}) \; ई^{२} भुडब \; को \; भुड$$

म्हणून

$$वं^{३} = अ^{३} \left\{ \begin{array}{l} १ + ३ई \; कोभुडब - \tfrac{३}{२}ई^{२} + \tfrac{९}{२}ई \; को^{२}भु२ \; डब \\ - ३ठई \; (क_{१}) मुडब - ३ठई \; (क_{२}) \; भुडब \\ - २ठई^{२}(क_{१}) \; मु२डब \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (१२) \; [२] \end{array} \right.$$

तसेंच

$$६ध^{२} = ३ई^{२} + ३ई^{२} \; को \; भु२बड$$

म्हणून

$$वं^{४} = अं^{४} \left\{ \begin{array}{l} १ + ४ई \; कोभुडब - ई^{२} + ७ई^{२} \; कोभु२डब \\ \ldots\ldots\ldots \; (१२) \; [३] \end{array} \right\}$$

३९८. (१३) $\frac{१}{व}$ ह्या पदाचा घन, चतुर्घात आणि पंचघात करावयाचा आहे. व ची किंमत दुसऱ्या पदवीपर्यंत आपणाला कळली आहे. परंतु ती न घेतां सामान्य स्वरूपाची लेख ३९३ मधील घेऊं. ती अशी

$$व = अ \left\{ १ + (व_{१}) + (व_{२}) + (व_{३}) + (व_{४}) \right\} \ldots$$

$$व = अ [१ + \left\{ (व_१) + ध \right\}]$$

$$\frac{अ^३}{व^३} = [१ + \left\{ (व_१) + ध \right\}]^{-३}$$

$$= [१ - ३ \left\{ (व_१) + ध \right\} + ६ \left\{ (व_१) + ध \right\}^२ \ldots\ldots]$$

यांतील

$$+ ६ \left\{ (व_१) + ध \right\}^२ = ६ (व_१)^२ + १२ (व_१) ध + ६ ध^२$$

$$६ ध^२ = ६ (व_२)^२$$

$$१० \left\{ (व_१) + ध \right\}^३ = + १० (व_१)^३ + ३० (व_१)^२ ध$$

तेव्हां

$$\frac{१}{व^३} = \frac{१}{अ^३} \left\{ \begin{array}{l} १ - ३ (व_१) - ३ (व_२) + ६ (व_१)^२ \\ - १० (व_१)^३ - ३ (व_३) + १२ (व_१) (व_२) \\ - ३ (व_४) + ६ (व_२) (व_२) + १५ (व_१)^४ \\ - ३० (व_१)^२ (व_२) + १२ (व_१) (व_३) \end{array} \right.$$

$$\ldots \ldots \ldots (१३) \quad [१]$$

$$\frac{अ^४}{व^४} = \left[१ + \left\{ (व_१) + ध \right\} \right]^{-४}$$

$$\frac{अ^४}{व^४} = १ - ४ \left\{ (व_१) + ध \right\} + १० \left\{ (व_१) + ध \right\}^२$$

$$- २० \left\{ (व_१) + ध \right\}^३ + ३५ (व_१)^४$$

यांतील

$$१० \left\{ (व_१) + ध \right\}^२ = १० (व_१)^२ + २० (व^१) ध + (१०) (व_२)^२$$

$$- २० \left\{ (व_१) + ध \right\}^३ = - २० (व_१)^३ - ६० (व_१)^२ ध$$

तेव्हां

$$\frac{१}{व^४} = \frac{१}{अ^४} \left\{ \begin{array}{l} १ - ४ (व_१) - ४ (व_२) + १० (व_१)^२ \\ - ४ (व_३) - २० (व_१)^३ + २० (व_१) (व_२) \\ - ४ (व_४) + १० (व_२) (व_२) + २० (व_१) (व_३) \\ - ६० (व_१)^२ (व_२) + ३५ (व_१)^४ \end{array} \right. \ldots\ldots\ldots (१३) \quad [२]$$

ह्या प्रमाणेंच

$$\frac{१}{\text{व}^{५}}=\frac{१}{\text{अ}^{५}}\left\{ १-५\,(\text{व}_{१})-५(\text{व}_{२})-१५(\text{व}_{१})^{२} \right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots(१३)\ [३]$$

३९९. (१४) $\frac{\text{स}}{\text{ज}^{२}}$ ह्या पदाची किंमत लेख ३७६ सभी. (१)

$$\frac{\text{स}}{\text{ज}^{२}}=\text{अठ}^{२}\left(\frac{१-\text{इ}^{२}}{१-\text{इं}^{२}}\right)^{३}\frac{\text{अ}^{३}}{\text{अं}^{३}}=\text{अठ}^{२}\text{स्थ}\,\frac{\text{अ}^{३}}{\text{अं}^{३}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(१४)$$

$\left(\frac{१-\text{इ}^{२}}{१-\text{इ}^{२}}\right)^{३}$ = स्थ. लेखन सौकर्याकरिता.

(१५) [१] $\frac{\text{स वं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{२}}$, [२] $\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}}$, [३] $\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}}$, [४] $\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}}$

ह्या मधील प्रत्येक पदांत ३ अवयव आहेत. $\frac{\text{स}}{\text{ज}^{२}}$ हा एक दुसरा वं चा घन किंवा चतुर्घात आणि तिसरा $\frac{१}{\text{व}}$ चा घन चतुर्घात किंवा पंचघात. त्यापैकी पहिल्या अवयवांची किंमत (१४) मध्यें अठ²स्थ $\frac{\text{अ}^{३}}{\text{अं}^{३}}$ ही आहे. वं च्या घाताच्या किंमती (१२) मध्यें आहेत आणि $\frac{१}{\text{व}}$ ह्या अवयवाच्या घाताच्या किंमती (१३) मध्ये आहेत. प्रत्येक अवयवाची किंमत घेऊन गुणाकार केला म्हणजे वरच्या चार पदांपैकी प्रत्येक पदाची किंमत तयार होईल. त्याप्रमाणें गुणाकार करून किंमती खालीं लिहिल्या आहेत.

$$[१]\quad \frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}}=\frac{\text{स}}{\text{ज}^{२}}\times\text{वं}^{३}\times\frac{१}{\text{व}^{३}}$$

$$-\tfrac{१}{२}\,\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{३}}=\text{अठ}^{२}\text{स्थ}\left\{\begin{array}{l}-\frac{१}{२}+\frac{३}{२}(\text{व}_{१})\quad-\frac{३}{२}\text{इंभुडव}\\ -३(\text{व}_{१})^{२}+\frac{३}{२}(\text{व}_{२})+\frac{९}{२}(\text{व}_{१})\ \text{इंकोभुडव}\\ +\frac{३}{४}\text{इं}^{२}-\frac{९}{४}\text{इं}^{२}\ \text{कोभु२डव}\\ +\frac{९}{२}(\text{व}_{२})\ \text{इं कोभुडव}-९(\text{व}_{१})^{२}\ \text{इंकोभुडव}\\ -\frac{९}{४}(\text{व}_{१})\ \text{इं}^{२}+\frac{२७}{४}(\text{व}_{१})\ \text{इं}^{२}\ \text{कोभु२डव}\\ +\frac{३}{२}(\text{व}_{३})+५(\text{व}_{१})^{३}-६(\text{व}_{१})(\text{व}_{२})\\ +\frac{३}{२}\,\text{ठ}(\text{क}_{१})\ \text{इंभुडव}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(१५)\ [१]\end{array}\right.$$

$$[\text{२}]\quad \frac{\text{स}\text{व}'^{3}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{4}} = \frac{\text{स}}{\text{ज}^{2}} \times \text{व}'^{3} \times \frac{1}{\text{व}^{4}}$$

$$-\tfrac{3}{2}\frac{\text{स}\text{व}'^{3}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{4}} = \text{ठ}^{2}\text{थ} \begin{cases} -\frac{3}{2} + \text{६}(\text{व}_1) - \frac{9}{2}\,\text{इ}'\text{कोभुडब} \\ +\text{६}(\text{व}_2) - \text{१५}(\text{व}_1)^2 + \text{१८}(\text{व}_1)\ \text{इ}'\text{कोभुडब} \\ +\frac{9}{4}\text{इ}'^2 - \frac{27}{4}\ \text{इ}'^2\text{कोभु२डब} \\ +\text{६}(\text{व}_3) + \text{३०}(\text{व}_1)^3 - \text{९}(\text{व}_1)\,\text{इ}'^2 \\ \qquad\qquad + \text{१८}(\text{व}_2)\ \text{इ}'\text{कोभुडब} \\ +\frac{9}{2}\,\text{ठ}\ (\text{क}_1)\ \text{इ}'\text{भुडब} - \text{४५}(\text{व}_1)^2\text{इ}'\text{कोभुडब} \\ +\text{२७}(\text{व}_1)\ \text{इ}'^2\text{कोभु२डब} - \text{३०}(\text{व}_1)(\text{व}_2) \\ +\text{६}(\text{व}_4) - \frac{105}{2}(\text{व}_1)^4 - \text{१८०ठ}(\text{क}_1)(\text{व}_1)\text{इ}'\text{भुडब} \\ +\text{९०}(\text{व}_1)^3\text{इ}'\text{कोभुडब} - \text{१५}(\text{व}_2)(\text{व}_2) \\ \qquad\qquad - \text{३०}(\text{व}_1)(\text{व}_3) \\ +\text{१८}(\text{व}_3)\text{इ}'\text{कोभुडब} + \text{९०}(\text{व}_1)(\text{व}_2) \\ +\frac{9}{2}\text{ठ}\ (\text{क}_2)\ \text{इ}'\text{भुडब} - \text{९०}(\text{व}_1)(\text{व}_2)\ \text{इ}'\text{कोभुडब} \\ -\text{९}(\text{व}_2)\,\text{इ}'^2 + \frac{45}{2}(\text{व}_1)^2\text{इ}'^2 + \text{२७}(\text{व}_2)\text{इ}'^2\text{कोभु२डब} \\ -\frac{105}{2}\ (\text{व}_1)^2\ \text{इ}'^2\text{कोभु}\ (\text{२डब})\ \ldots\ldots(\text{१५})[\text{२}] \end{cases}$$

$$[\text{३}]\quad \frac{\text{स}\text{व}'^{4}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{4}} = \frac{\text{स}}{\text{ज}^{2}} \times \text{व}'^{4} \times \frac{1}{\text{व}^{4}}$$

$$= \text{अठ}^{2}\text{स्थ} \times \frac{\text{अ}^{3}}{\text{अ}^{3}} \times \frac{\text{अ}'^{4}}{\text{अ}^{4}} \times (\text{इतर पदें})$$

$$= \text{अठ}^{2}\text{स्थ}\ \frac{\text{अ}'}{\text{अ}}\ (\text{इतर पद समूह})$$

$\frac{\text{अ}'}{\text{अ}}$ हें पद दुसऱ्या पदवीचें आहे. तेव्हां $\text{ठ}^{2}\,\frac{\text{अ}'}{\text{अ}}$ हा गुणक चवथ्या पदवीचा आहे. याकरितां इतर पदें दुसऱ्या पदवीपर्यंत घेतली. तेव्हां

$$-\frac{\text{स}\text{व}'^{4}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{4}} = \text{अठ}^{2}\text{स्थ}\,\frac{\text{अ}'}{\text{अ}} \begin{cases} -1 + \text{४}(\text{व}_1) - \text{४}\ \text{इ}'\text{कोभुडब} \\ +\text{४}(\text{व}_2) - \text{१०}(\text{व}_1)^2 + \text{इ}'^2 - \text{७}\text{इ}'^2\text{कोभु२डब} \\ +\text{१६}(\text{व}_1)\ \text{इ}'\text{कोभुडब}\ \ldots\ldots\ldots\ldots [\text{३}] \end{cases}$$

$$[\text{४}]\quad \frac{\text{स}\text{व}'^{4}}{\text{ज}^{2}\text{व}^{5}} = \frac{\text{स}}{\text{ज}^{2}} \times \text{व}'^{4} \times \frac{1}{\text{व}^{5}}$$

$$= \text{अठ}^{2}\text{स्थ} \times \frac{\text{अ}^{3}}{\text{अ}^{3}} \times \frac{\text{अ}'^{4}}{\text{अ}^{5}} \times (\text{इतर पदें})$$

$$= \text{ठ}^{2}\text{स्थ}\ \frac{\text{अ}'}{\text{अ}}\ (\text{इतर पद समूह})$$

$$-\frac{\text{सवं}^{४}}{\text{ज}^{२}\,\text{व}^{४}} = \text{ठ}^{२}\,\text{स्थ}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\left\{\begin{array}{l} -\,१ + ५\,(\text{व}_{१}) - ४\,\text{इं कोभुडब} \\ +\,५\,(\text{व}_{२}) - १५\,(\text{व}_{१})^{२} + \text{इं}^{२} - ७\,\text{इं}^{२}\,\text{कोभु२डब} \\ +\,२०\,(\text{व}_{१})\,\text{इं कोभुडब} \ldots\ldots\ldots\ldots[४] \end{array}\right.$$

४००. सूक्ष्मांश समीकरणामध्यें प्र, त, ष प्रेरणांची तीन पदें आहेत. ती लेख ३७४ मध्यें दिली आहेत. ते प्रत्येक पद ज्या संख्यांनी बनते ती प्रत्येक संख्या सामान्य स्वरूपानें ३९३ लेखापासून ३९९ लेखांपर्यंत दाखविली आहे. आतां प्रेरणेचे प्रत्येक पद त्या सामान्य संख्यांनी दाखवीत आहे. म्हणजे $\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\,\text{व}^{४}}$ हृया पदाची किंमत वरच्या लेखात [२] हृया अंकीं ज्या संख्यांनीं दाखविली आहे तसल्याच संख्यांनीं प्र, त, ष ला प्रेरणामध्यें जीं अनेक पदें आहेत, त्या पदांच्या किमती व्यक्त अव्यक्त अशा संख्यांनीं दाखवितो.

४०१. प्रथमतः त प्रेरणेची किंमत लिहितो. हृया प्रेरणेच्या किंमतीमध्यें तीन पदें आहेत. लेख ३७४ पहा. त्यापकीं पहिलें पद

$$-\tfrac{३}{२}\,\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\,\text{व}^{४}}\,\text{भु}२(\text{ब} - \text{बं})$$

हें आहे. हृया पदाचें अवयव दोन मुख्य आहेत. पहिल्या $-\tfrac{३}{२}\frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\,\text{व}^{४}}$ हृया अवयवाचा विस्तार ३९९ व्या लेखांतील (१५) [२] हृया अंकी दिला आहे. आणि दुसऱ्या अवयवाचा विस्तार म्हणजे भु (२ब — २बं) हृया पदाचा विस्तार ३९६ व्या लेखाच्या (७) हृया अंकी दिला आहे. तेव्हां हृया दोन पदसंघांचा गुणाकार करावयाचा आहे. अर्थात हा गुणाकार, एका संघातील प्रत्येक पदानें दुसऱ्या संघांतील प्रत्येक पदास गुणिल्यानें येतो. हे गुणाकार करितांना, २५७ हृया लेखांतील भुजज्या आणि कोभुज्या यांचे गुणाकार कसे होतात ते १ ते ४ अंकी दाखविले आहेत, त्याकडे विशेष लक्ष्य असावें. त्यापैकीं २ व ४ यांत चिन्ह चुकण्याचा फार संभव असतो. हृया गुणाकारांत गुणून आलेल्या किंवा येणाऱ्या पदाची पदवी कोणती आहे हें ही पाहिलें पाहिजे. गुणक व गुण्य हृया दोन पदांच्या पदव्यांच्या बेरजेइतकी गुणाकाराची पदवी असते. तसेच गुणून आलेल्या पदाचा केंद्र गुणक कोणता आहे हे ही ठरविले पाहिजे. हा केंद्र गुणक, गुण्य आणि गुणक यांच्या केंद्र गुणकांच्या सचिन्ह बेरजेबरोबर असतो. त प्रेरणेच्या पाचव्या आणि सहाव्या पदवीच्या प्रत्येक पदाचा केंद्र गुणक नियमित असावा लागतो. म्हणजे पांचव्या पदवीच्या प्रत्येक पदांचा केंद्र गुणक १ किंवा ० हृया संख्ये समीप असला पाहिजे, आणि सहाव्या पदवीचा केंद्र गुणक ० हृया संख्ये समीप असाच असला पाहिजे. केंद्रगुणक तसा नसल्यास तें पद गुणाकारांत न घेतां सोडून द्यावें.

४०२. वरच्या लेखांतील गुणाकारांचा कार्यविस्तार कमी व्हावा व त्याची वाटणी होऊन सुलभता यावी यासाठी ज्या ज्या ठिकाणी $(\text{व}_{१})$ आणि $(\text{क}_{१})$ ह्या अव्यक्त संख्या येतील त्या त्या ठिकाणी त्यांच्या व्यक्त किंमती अनुक्रमे $+\text{इ कोभुण ब}$ आणि $-\text{ २ इ भुण ब}$ ह्या ठेवाव्या. स्थ ही सुद्धां व्यक्त संख्याच आहे, कारण

$$\text{स्थ} = (\text{१} - \text{३ इ}^{\text{२}} + \text{३ इ}'^{\text{२}})$$

तेव्हां स्थ संख्या गाळून तिची व्यक्त किंमत $(\text{१} - \text{३इ}^{\text{२}} + \text{३इ}'^{\text{२}})$ ही उपयोगांत आणावी. गुणाकार करितांना प्रथम ३९६ (७) मधील पहिलें पद भु (२ — २ठ) ब ह्यानें ३९९ (१५) [२] मधील प्रत्येक पदास गुणावें नंतर दुसऱ्या तिसऱ्या पदानें गुणावे. दोन संघांतील पदांना क्रमांक द्यावे म्हणजे बरीच सोय होते. ३९९ (१५) [२] ह्यामध्यें ३० पदें आहेत आणि ३९६ (७) मध्यें १६ पदें आहेत. ह्या सर्व पदांचा गुणाकार करण्याचें कारण नाहीं. ४०१ वा लेख पहा. जे गुणाकार करावयाचे तेही येथे करून ग्रंथाची जागा अडविणे योग्य नाहीं. तथापि, उदाहरणार्थ, कांही गुणाकार खालच्या लेखांत केले आहेत.

४०३. वरच्या ३० पदांच्या समूहातील ६ व्या पदाला १६ पदाच्या संघांतील पहिल्या पदाने गुणितो.

$$[\text{६}] \times [\text{१}] + \text{१८ ठ}^{\text{२}} (\text{व}_{१}) \text{ इ}' \text{कोभुडब} \times \text{भु } (\text{२} - \text{२ ठ}) \text{ ब}$$

$$= + \text{९ठ}^{\text{२}} \text{इ}' (\text{व}_{१}) \left\{\text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} + \text{ड}) \text{ ब} + \text{भु } (\text{२} - \text{२ ठ} - \text{ड}) \text{ ब}\right\}$$

$$= + \text{९ठ}^{\text{२}}\text{इ}' \text{ इकोभुणब} \left\{\text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} + \text{ड}) \text{ब} + \text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} - \text{ड}) \text{ ब}\right\}$$

$$= + \tfrac{\text{९}}{\text{२}} \text{ठ}^{\text{२}} \text{ इ इ}' \left\{\text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण} + \text{ड})\text{ब} + \text{भु}(\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण} - \text{ड})\text{ब}\right\}$$

$$+ \tfrac{\text{९}}{\text{२}} \text{ठ}^{\text{२}}\text{इइ}'\left\{\text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} + \text{ण} + \text{ड})\text{ब} + \text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} + \text{ण} - \text{ड})\text{ब}\right\}$$

$$[\text{१३}] [\text{१}] + \tfrac{\text{९}}{\text{२}} \text{ठ}^{\text{३}} (\text{क}_{१}) \text{ इ}' \text{भुडब} \times \text{भु } (\text{२} - \text{२ठ}) \text{ ब}$$

$$= + \tfrac{\text{९}}{\text{२}} \text{ठ}^{\text{३}}\text{इ}' (\text{क}_{१}) \left\{\text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} - \text{ड}) \text{ ब} - \text{भु } (\text{२} - \text{२ठ} + \text{ड}) \text{ ब}\right\}$$

$$= + \tfrac{\text{९}}{\text{२}} \text{ठ}^{\text{३}} \text{ इ}' (- \text{ २इ भुणब}) \times \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

$$= - \tfrac{\text{९}}{\text{२}} \text{ठ}^{\text{३}}\text{इ इ}'\left\{\text{भु}(\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण} - \text{ड})\text{ब} - \text{भु}(\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण} + \text{ड}) \text{ ब}\right\}$$

आणखी दोन पदें निघतात, पण त्यांचा केंद्र गुणक ३ ह्या संख्ये समीप होतो म्हणून ती पदें घेतली नाहीत.

$$[\text{९}] [\text{१}] + \text{६ठ}^{\text{२}} (\text{व}_{३}) \times \text{भु } (\text{२} - \text{२ठ}) \text{ ब}. \quad (\text{व}_{३}) \text{ ची किंमत व्यक्त नाहीं}$$

$$= + \text{६ठ}^{\text{२}} (\text{व}_{३}) \text{ भु } (\text{२} - \text{२ठ}) \text{ ब}.$$

ह्या गुणाकारांतील तयार पदांना $-\text{ ३इ}^{\text{२}}$ आणि $+\text{ इ}'^{\text{२}}$ ह्यांनी गुणावे लागते. पण इष्ट असें पद निघत नाहीं. कारण केंद्र गुणक ० समीप नाहीं.

ह्याप्रमाणें गुणाकार करून पदें पदवीच्या क्रमाप्रमाणे खालीं लिहिली आहे. ही त प्रेरणेच्या पहिल्या पदाची किंमत होय.

$$- \frac{३}{२} \frac{\text{सवं}^{३}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{४}} \text{भु} (२\text{व} - २\text{वं}) =$$

दुसरी आणि तिसरी पदवी.

$- \frac{३}{२}$ ठ^{२} भु (२ — २ठ) ब

$+$ ३ठ^{२} इ भु (२ — २ठ — ण) ब $\quad$ $+$ ३ठ^{२} इ भु (२ — २ठ + ण) ब

$- \frac{२१}{४}$ ठ^{२} ई भु (२ — २ठ — ड) ब $\quad$ $+ \frac{३}{४}$ ठ^{२} ई भु (२ — २ठ + ड) ब

चवथी पदवी.

$+ \frac{५}{२}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ठ) ब $\quad$ $+ \frac{१५}{४}$ ठ^{२} ई^{२} भु (२ — २ठ) ब

$+$ ३ठ^{३} इ भु (२ — २ठ — ण) ब $\quad$ $-$ ३ठ^{३} इ भु (२ — २ठ + ण) ब

$+ \frac{२१}{२}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ठ — ण — ड) ब $\quad$ $- \frac{३}{२}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ठ — ण + ड) ब

$+ \frac{२१}{२}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ठ + ण — ड) ब $\quad$ $- \frac{३}{२}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ठ + ण + ड) ब

$- \frac{१५}{२}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ठ) ब $\quad$ $- \frac{५१}{४}$ ठ^{२} ई^{२} भु (२ — २ठ — २ड) ब

$- \frac{१५}{४}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ठ — २ण) ब $\quad$ $- \frac{१५}{४}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ठ + २ण) ब

$+$ ६ठ^{२} (व$_{२}$) भु (२ — २ठ) ब

पांचवी पदवी.

$+ (\frac{५}{४}$ ठ^{२} इ^{३} $- \frac{१५}{२}$ ठ^{२} इ ई^{२}) भु (२ — २ठ — ण) ब $\quad$ $+ \frac{१५}{४}$ ठ^{२} इ^{३} भु (२ — २ठ — ३ण) ब

$+ \frac{६३}{४}$ ठ^{२} इ^{२} ई भु (२ — २ठ — ण — ड) ब $\quad$ $- \frac{३}{४}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ठ — ण + ड) ब

$- \frac{१०५}{८}$ ठ^{२} इ^{२} ई भु (२ — २ठ — २ण — ड) ब $\quad$ $+ \frac{१५}{८}$ ठ^{२} इ^{२} ई भु (२ — २ठ — २ण + ड) ब

$-$ ६ठ^{३} इ^{२} भु (२ — २ठ — २ण) ब $\quad$ $+ \frac{५१}{२}$ ठ^{२} इ ई^{२} भु (२ — २ठ — ण — २ड) ब

$-$ १५ठ^{२} इ (व$_{२}$) भु (२ — २ठ — ण) ब $\quad$ $-$ १५ठ^{२} इ (व$_{२}$) भु (२ — २ठ + ण) ब

$+$ २१ठ^{२} ई (व$_{२}$) भु (२ — २ठ — ड) ब $\quad$ $-$ ३ठ^{२} ई (व$_{२}$) भु (२ — २ठ + ड) ब

$+$ ६ठ^{२} (व$_{३}$) भु (२ — २ठ) ब $\quad$ $+$ ३ठ^{३} (क$_{२}$) भु (२ — २ठ) ब

त प्रेरणेच्या ६ व्या पदवीचा पदसंघ येथे तयार केला नाहीं. तो पुडे तयार करूं. त्या पदांची आवश्यकता कम चें समीकरण ४ थ्या पदवीनें सोडवितांना उत्पन्न होते. शर आणि चलत्रिज्या यांच्या चवथ्या पदवीला त्यांची आवश्यकता नाही म्हणून तीं पदें यथा प्रसंगीं तयार करूं.

४०४. त प्रेरणेचे दुसरें आणि तिसरें पद खालीं लिहिल्याप्रमाणे आहे

$$\text{दुसरें पद} - \frac{3}{8} \frac{\text{स}\text{वं}^4}{\text{ज}^2\text{व}^5} \frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}} \text{ भु } (\text{ब} - \text{बं})$$

$$\text{तिसरें पद} - \frac{15}{8} \frac{\text{स}\text{वं}^4}{\text{ज}^2\text{व}^5} \frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}} \text{ भु३ } (\text{ब} - \text{बं})$$

ह्या दोन्ही पदांमध्यें साधारण असा $\frac{\text{स}\text{वं}^4}{\text{ज}^2\text{व}^5} \quad \frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}}$ हा अवयव आहे. ह्यां-

तील $\frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}}$ हा एक स्थीर गुणक आहे. प हे पृथ्वीचे प्रकृत्यंश आणि च हे चंद्राचे प्रकृत्यंश आहेत. पृथ्वीचे प्रकृत्यंश एक परिमाण मानिले तर चंद्राचे प्रकृत्यंश $\frac{1}{80}$ आहेत असे सिद्ध होते तेव्हां

$$\frac{\text{प} - \text{च}}{\text{प} + \text{च}} = \frac{1 - \frac{1}{80}}{1 + \frac{1}{80}} = \frac{79}{81} \text{ हा गुणक आहे.}$$

पदवीच्या दृष्टीनें हा गुणक १ आहे असें मानिले तर पदवीमध्यें बदल होत नाहीं म्हणून तो एक ह्या संख्येइतका आहे. आणि दुसरा अवयव याची किंमत लेख ३९९ [४] मध्यें दिली आहे. तसेंच भु (ब — बं) आणि भु३ (ब — बं) ह्या पदांच्या किंमती ३९६ व्या लेखांत (५) आणि (९) ह्या अंकी दिल्या आहेत. ह्या किंमती घेऊन गुणाकार करून त प्रेरणेचीं जीं वरचीं दोन पदें त्यामध्यें येणारीं पदें खालीं दिली आहेत. त्यापैकीं भु (३ब — ३ ं) याचा केंद्र गुणक ३ असल्यामुळें आणि $\frac{\text{स}\text{वं}^4}{\text{ज}^2\text{व}^5}$ याचा

स्थीर गुण $\text{ठ}^2\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ हा चवथ्या पदवीचा असल्यामुळें त्यांत ५ व्या व सहाव्या पदवीचें, आपणास इष्ट असें पद निघत नाहीं. ह्याप्रमाके गुणाकार करून आलेलीं इष्ट अशी पदें खालीं दिली आहेत.

$$-\frac{3}{8} \frac{\text{स}\text{वं}^4}{\text{ज}^2\text{व}^5} \text{ भु } (\text{ब} - \text{बं}) =$$

$$\text{चवथी पदवी} - \frac{3}{8} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ ठ}^2 \text{ भु } (1 - \text{ठ}) \text{ ब}$$

$$\text{पांचवी पदवी} \begin{cases} + \frac{१५}{१६} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} ठ^{२} इ\, भु\,(१ - ठ - ण)\, ब \\ - \frac{९}{८} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} ठ^{२} इं\, भु\,(१ - ठ - ड)\, ब \\ - \frac{३}{८} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} ठ^{२} इं\, भु\,(१ - ठ + ड)\, ब \end{cases}$$

$$\text{सहावी पदवी} \begin{cases} + \frac{१५}{१६} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} ठ^{२} इ\, इं\, भु\,(१ - ठ - ण + ड)\, ब \\ + \frac{४५}{१६} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} ठ^{२} इ\, इं\, भु\,(१ - ठ - ण - ड)\, ब \\ - \frac{१७७}{१२८} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} ठ^{३} इ\, भु\,(१ - ठ - ण)\, ब \cdots (२) \end{cases}$$

$$- \frac{१५}{८} \frac{\text{सवं}^{६}}{\text{ज}^{२}\text{व}^{५}} भु३(ब - बं) = - \frac{१५}{८} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} ठ^{२} भु\,(३ - ३\,ठ)\, ब \cdots\cdots (३)$$

४०५. वरच्या गणित कार्यात जशी त प्रेरणेची किंमत तीन पदांमध्यें विशद केली तशी आता प्र प्रेरणेची किंमत विशद करूं. प्र प्रेरणेमध्यें सहा पदें आहेत त्यापैकीं प्रत्येक पद घेऊन त्याचें स्पष्टीकरण करितो. त्यापैकी पहिलें पद खालीं लिहिल्याप्रमाणे.

$$(१)\ अ\,(१ + श^{२})^{-\frac{३}{२}} = अ\,(१ - \tfrac{३}{२} श^{२} + \tfrac{१५}{८} श^{४})$$

घातविस्ताराविषयीं २४, २५, २६ हे लेख पहा.

श ची सामान्य स्वरूपाची किंमत खालीं दिल्याप्रमाणे आहे

$$श = (श_{१}) + (श_{२}) + (श_{३}) + (श_{४})$$

तेव्हां

$$- \tfrac{३}{२} श^{२} = - \tfrac{३}{२} (श_{१})^{२} - ३\,(श_{१})\,(श_{२}) - \tfrac{३}{२} (श_{२})^{२}$$
$$- ३\,(श_{१})(श_{३}) - ३\,(श_{१})(श_{४}) - ३\,(श_{२})(श_{३}).$$
$$+ \tfrac{१५}{८} श^{४} = + \tfrac{१५}{८} (श_{१})^{४} + \tfrac{१५}{२} (श_{१})^{३}\,(श_{२})$$

ह्यामध्यें $(श_{१})$ आणि $(श_{२})$ ह्या संख्या व्यक्त झाल्या आहेत. [३८७ लेख.]

$$श_{१} = + ल\, भु\, ए\, ब \text{ आणि } श_{२} = + \tfrac{३}{८} ठ\, ल\, भु\,(२ - २\,ठ - ए)\,ब.$$

$$- \tfrac{३}{२} (श_{१})^{२} = - \tfrac{३}{२} ल^{२} भु^{२} ए\, ब = - \tfrac{३}{४} ल^{२} + \tfrac{३}{४} ल^{२} कोभु२\, ए\, ब.$$

$$
\begin{aligned}
-\text{३}(\text{श}_{\text{१}})(\text{श}_{\text{२}}) &= -\text{३ ल भु ए ब}\times\tfrac{\text{३}}{\text{८}}\,\text{ठ ल भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\,\text{ब} \\
&= +\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\,\text{ठ ल}^{\text{२}}\,\text{कोभु}\,(\text{२}-\text{२ ठ})\,\text{ब} \\
&\quad -\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\,\text{ठ ल}^{\text{२}}\,\text{कोभु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{२ ए})\,\text{ब.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{\text{३}}{\text{२}}(\text{श}_{\text{२}})^{\text{२}} &= -\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\times\tfrac{\text{९}}{\text{६४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{भु}^{\text{२}}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{ए})\,\text{ब} \\
&= -\tfrac{\text{२७}}{\text{२५६}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}} \\
&\quad +\tfrac{\text{२७}}{\text{२५६}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{कोभु}\,(\text{४}-\text{४ ठ}-\text{२ ए})\,\text{ब.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\text{३}(\text{श}_{\text{१}})(\text{श}_{\text{३}}) &= -\text{३}\,(\text{श}_{\text{३}})\,\text{ल भु ए ब} \\
-\text{३}(\text{श}_{\text{१}})(\text{श}_{\text{४}}) &= -\text{३}\,(\text{श}_{\text{४}})\,\text{ल भु ए ब} \\
-\text{३}(\text{श}_{\text{२}})(\text{श}_{\text{३}}) &= -\tfrac{\text{९}}{\text{८}}\,(\text{श}_{\text{३}})\,\text{ठ ल भु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{ए})\,\text{ब.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{\text{१५}}{\text{८}}(\text{श}_{\text{१}})^{\text{४}} &= +\tfrac{\text{१५}}{\text{८}}\,\text{ल}^{\text{४}}\,\text{भु}^{\text{४}}\,\text{ए ब} \\
&= +\tfrac{\text{१५}}{\text{८}}\,\text{ल}^{\text{४}}\left(\tfrac{\text{३}}{\text{८}}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{कोभु२ ए ब}+\tfrac{\text{१}}{\text{८}}\,\text{कोभु४ए}\right)\text{ब.} \\
&= +\tfrac{\text{४५}}{\text{६४}}\,\text{ल}^{\text{४}}-\tfrac{\text{१५}}{\text{१६}}\,\text{ल}^{\text{४}}\,\text{को भु२ ए ब} \\
&\quad +\tfrac{\text{१५}}{\text{६४}}\,\text{ल}^{\text{४}}\,\text{कोभु४ ए ब.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\tfrac{\text{१५}}{\text{८}}(\text{श}_{\text{१}})^{\text{३}}(\text{श}_{\text{२}}) &= +\tfrac{\text{१५}}{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{३}}\,\text{भु}^{\text{३}}\,\text{ए ब} \\
&\quad \times\tfrac{\text{३}}{\text{८}}\,\text{ठ ल भु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{ए})\,\text{ब.} \\
&= +\tfrac{\text{४५}}{\text{१६}}\,\text{ठ ल}^{\text{४}}\left(\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{भु ए ब}-\tfrac{\text{१}}{\text{४}}\text{भु३ ए ब}\right) \\
&\quad \text{भु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{ए})\,\text{ब.} \\
&= +\tfrac{\text{१३५}}{\text{१२८}}\,\text{ठ ल}^{\text{४}}\,\text{कोभु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{२ ए})\,\text{ब.}
\end{aligned}
$$

सर्व पदें एकत्र केलीं तेव्हां

$$
\text{अ}\,(\text{१}+\text{श}^{\text{२}})^{-\frac{\text{३}}{\text{२}}} = \text{अ}\left\{
\begin{aligned}
&-\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ल}^{\text{२}}+\tfrac{\text{४५}}{\text{६४}}\,\text{ल}^{\text{४}}-\tfrac{\text{२७}}{\text{२५६}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}} \\
&\quad +\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{कोभु२ ए ब.} \\
&+\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\,\text{ठ ल}^{\text{२}}\,\text{कोभु}\,(\text{२}-\text{२ ठ})\,\text{ब} \\
&\quad -\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\,\text{ठल}^{\text{२}}\,\text{कोभु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{२ ए})\,\text{ब} \\
&+\tfrac{\text{२७}}{\text{२५६}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{कोभु}\,(\text{४}-\text{४ ठ}-\text{२ ए})\,\text{ब} \\
&\quad -\tfrac{\text{१५}}{\text{१६}}\,\text{ल}^{\text{४}}\,\text{कोभु२ ए ब} \\
&+\tfrac{\text{१५}}{\text{६४}}\,\text{ल}^{\text{४}}\,\text{कोभु४ ए ब} \\
&\quad -\text{३}\,(\text{श}_{\text{३}})\,\text{ल भु ए ब} \\
&-\text{३}\,(\text{श}_{\text{४}})\,\text{ल भु ए ब} \\
&\quad -\tfrac{\text{९}}{\text{८}}\,(\text{श}_{\text{३}})\,\text{ठल भु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{ए})\,\text{ब} \\
&+\tfrac{\text{१३५}}{\text{१२८}}\,\text{ठ ल}^{\text{४}}\,\text{कोभु}\,(\text{२}-\text{२ ठ}-\text{२ ए})\,\text{ब} \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{प्र (१)}
\end{aligned}
\right.
$$

४०६. प्र प्रेरणचें दुसरें पद खालीं लिहिल्याप्रमाणें आहे. त्याची सामान्य स्वरूपाची किंमत ३९९ (१५) [१] मध्यें दिली आहे. तीच येथेंही देत आहे. त्यांत ४०२ व्या लेखांत दाखविल्याप्रमाणें (व_1), (क_1) आणि स्थ यांच्या व्यक्त संख्या त्यांच्या जागीं लिहून गुणाकार करून आलेला पदसंघ खालीं लिहीत आहे. त्यांत (व_2) ची व्यक्त किंमत ले. ३९० प्रमाणे घेतली आहे.

$$
-\frac{1}{2}\,\frac{\text{स}\,\text{ब}^3}{\text{ज}^2\text{व}^3} = \text{अ}
\left\{
\begin{array}{l}
-\frac{1}{2}\text{ठ}^2 + \frac{3}{2}\text{ठ}^2\text{इ कोभु ण ब} - \frac{3}{2}\text{ठ}^2\text{ई कोभु ड ब} \\
-\frac{3}{4}\text{ठ}^2\text{ई}^2 - \frac{3}{2}\text{ठ}^2\text{इ}^2\text{ कोभु २ ण ब} \\
\quad -\frac{9}{4}\text{ठ}^2\text{ई}^2\text{ कोभु २ ड ब} \\
+\frac{9}{4}\text{ठ}^2\text{इई कोभु (ण + ड) ब} \\
\quad +\frac{9}{4}\text{ठ}^2\text{इई कोभु (ण − ड) ब} \\
-\frac{3}{4}\text{ठ}^4 - \frac{9}{8}\text{ठ}^2\text{ल}^2 - \frac{3}{8}\text{ठ}^2\text{ल}^2\text{ कोभु २ ए ब} \\
+\frac{3}{2}\text{ठ}^4\text{ कोभु (२ − २ ठ) ब} \\
\quad +\frac{45}{16}\text{ठ}^3\text{इ कोभु (२ − २ ठ − ण) ब} \\
+\left(\text{३ ठ}^4\text{इ} + \frac{9}{2}\text{ठ}^2\text{ल}^2\text{इ} + \frac{27}{4}\text{ठ}^2\text{ई}^2\text{इ}\right. \\
\quad \left. -\frac{3}{4}\text{ठ}^2\text{इ}^3\right)\text{ कोभु ण ब} \\
+\frac{27}{8}\text{ठ}^2\text{ई}^2\text{इ कोभु (ण + २ ड) ब} \\
\quad +\frac{27}{8}\text{ठ}^2\text{ई}^2\text{इ कोभु (ण − २ ड) ब} \\
-\frac{9}{4}\text{ठ}^2\text{इ}^2\text{ई कोभु (२ ण + ड) ब} \\
\quad -\frac{9}{4}\text{ठ}^2\text{इ}^2\text{ई कोभु (२ ण − ड) ब} \\
+\frac{3}{4}\text{ठ}^2\text{ल}^2\text{इ कोभु (२ ए + ण) ब} \\
\quad +\frac{3}{4}\text{ठ}^2\text{ल}^2\text{इ कोभु (२ ए − ण) ब} \\
-\frac{9}{16}\text{ठ}^2\text{ल}^2\text{ई कोभु (२ ए + ड) ब} \\
\quad -\frac{9}{16}\text{ठ}^2\text{ल}^2\text{ई कोभु (२ ए − ड) ब} \\
+\frac{135}{32}\text{ठ}^3\text{इई कोभु (२ − २ ठ − ण + ड) ब} \\
\quad +\frac{135}{32}\text{ठ}^3\text{इई कोभु (२ − २ ठ − ण − ड) ब} \\
+\frac{9}{4}\text{ठ}^4\text{ई कोभु (२ − २ ठ − ड) ब} \\
\quad +\frac{9}{4}\text{ठ}^4\text{ई कोभु (२ − २ ठ + ड) ब} \\
+\frac{3}{2}\text{ठ}^3\text{इई कोभु (ण + ड) ब} \\
\quad -\frac{3}{2}\text{ठ}^3\text{इई कोभु (ण − ड) ब} \\
-\text{३ ठ}^4\text{इ कोभु (२ − २ ठ − ण) ब} \\
\quad -\text{३ ठ}^4\text{इ कोभु (२ − २ ठ + ण) ब} \\
-\frac{45}{8}\text{ठ}^3\text{इ}^2\text{ कोभु (२ − २ ठ − २ ण) ब} \\
\quad -\frac{45}{8}\text{ठ}^3\text{इ}^2\text{ कोभु (२ − २ ठ) ब} \\
-\left(\frac{9}{2}\text{ठ}^2\text{इ}^2\text{ई} + \frac{9}{4}\text{ठ}^4\text{ई} + \frac{27}{8}\text{ठ}^2\text{ल}^2\text{ई}\right)\text{ कोभु ड ब} \\
+\frac{5}{4}\text{ठ}^2\text{इ}^3\text{ कोभु ३ ण ब} \quad + \frac{3}{2}\text{ठ}^2(\text{व}_2) \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\text{ प्र (२)}
\end{array}
\right.
$$

४०७. प्र प्रेरणेच्या तिसऱ्या पदाची किंमत वरच्या पदसंघास ३कोभु२ (ब— बं) यानें गुणिल्याने येतें. वरच्या पदसंघांत पांचव्या पदवीचीही सर्वच पदें घेतली आहेत. वस्तुतः ती ० आणि १ ह्या संख्ये संन्निध ज्यांचा केंद्रगुण आहे अशीच असावी लागतात. पण त्यांना ३कोभु२ (ब— बं) या पदांच्या संघांतील पदांनीं गुणतांना गुणाकाराचा केंद्रगुणक समजावा म्हणून ती सर्वच दिली आहेत. आता ह्या तिसऱ्या पदाच्या किंमतीत, चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें आणि पांचव्या पदवीचीं ० आणि १ ह्या संख्या समीप केंद्रगुणाची पदें घेऊन इतर पदें गाळावी. कोभु२ (ब— बं) ह्या पदाच्या किंमतीचा पदसंघ ३९६ व्या लेखांत आठव्या अंकीं दिला आहे. त्यातील प्रत्येक पदानें वरच्या प्र (२) ह्या पदसंघास गुणावयाचे आहे. हे गुणाकार वरच्याच रितीनीं करावयाचे आहेत. ते करून आलेल्या पदसंघ खालीं लिहिला आहे.

$$
\left.-\frac{३}{२}\,\frac{\text{म}\,\text{वं}^{३}}{\text{जं}^{२}\,\text{णं}^{३}}\times\text{कोभु२}\,(\text{ब}-\text{बं})\right\}=\text{अ}\left\{
\begin{aligned}
&-\tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ})\,\text{ब}\\
&+\tfrac{१}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इ}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}\\
&\qquad+\tfrac{१}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इ}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{ब}\\
&-\tfrac{२१}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ड})\,\text{ब}\\
&\qquad+\tfrac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ड})\,\text{ब}\\
&+\tfrac{१}{४}\,\text{ठ}^{४}-\left(\tfrac{२७}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}+\tfrac{१}{४}\,\text{ठ}^{४}\right.\\
&\qquad\left.-\tfrac{१५}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}\right)\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ})\,\text{ब}\\
&-\tfrac{१}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{ब}\\
&\qquad-\tfrac{१}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+२\text{ए})\,\text{ब}\\
&-\tfrac{१}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब}\\
&\qquad-\tfrac{१}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+२\text{ण})\,\text{ब}\\
&+\tfrac{६३}{८}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इइं}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}\\
&\qquad-\tfrac{१}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इइं}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}\\
&+\tfrac{६३}{८}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इइं}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण}-\text{उ})\,\text{ब}\\
&\qquad-\tfrac{१}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इइं}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}\\
&+\tfrac{१३५}{३२}\,\text{ठ}^{३}\text{इकोभुणब}+\tfrac{१३५}{३२}\,\text{ठ}^{३}\text{इकोभु}(४-४\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}\\
&+३\,\text{ठ}^{३}\text{इ}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}\\
&\qquad-३\,\text{ठ}^{३}\text{इ}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{ब}\\
&+\tfrac{१}{४}\,\text{ठ}^{४}\,\text{कोभु}\,(४-४\text{ठ})\,\text{ब}\\
&\qquad-\tfrac{५१}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं}^{२}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-२\text{ड})\,\text{ब}\\
&+\tfrac{१५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३}\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-३\text{ण})\,\text{ब}-९\,\text{ठ}^{४}\,\text{इकोभुण}\,\text{ब}\\
&+\left(\tfrac{१}{२}\,\text{ठ}^{४}\text{इ}+\tfrac{२७}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इ}+\tfrac{१}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}\text{इ}\right.\\
&\qquad\left.-\tfrac{१}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३}\right)\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}
\end{aligned}\right.
$$

+ $\frac{२७}{१६}$ ठ^{२}ई^{२}इ कोभु (२ — २ठ — ण — २ड) ब
— $\frac{१८९}{१६}$ ठ^{२}ई^{२}इ कोभु (२ — २ठ — ण + २ड) ब
+ $\frac{१}{८}$ ठ^{२}ल^{२}इ कोभु (२ — २ठ — २ए — ण) ब
+ $\frac{१}{८}$ ठ^{२}ल^{२}इ कोभु (२ — २ठ — २ए + ण) ब
+ $\frac{१४५}{६४}$ ठ^{३}इई कोभु (ण — ड) ब
— $\frac{१३५}{६४}$ ठ^{३}इई कोभु (ण + ड) ब
+ $\frac{६३}{४}$ ठ^{३}इई कोभु (२ — २ठ — ण — ड) ब
— $\frac{३}{४}$ ठ^{३}इई कोभु (२ — २ठ — ण + ड) ब
— $\frac{६३}{८}$ ठ^{२}इ^{२}ई कोभु (२ — २ठ — २ण — ड) ब
+ $\frac{१}{८}$ ठ^{२}इ^{२}ई कोभु (२ — २ठ — २ण + ड) ब
— $\frac{६३}{३२}$ ठ^{२}ल^{२}ई कोभु (२ — २ठ — २ए — ड) ब
+ $\frac{१}{३२}$ ठ^{२}ल^{२}ई कोभु (२ — २ठ — २ए + ड) ब
— $\frac{१}{२}$ ठ^{३}इ^{२} कोभु (२ — २ठ — २ण) ब + $\frac{२७}{४}$ ठ^{४}ई कोभु ड ब
+ $\frac{१}{२}$ ठ^{२}(व$_{१}$) कोभु (२ — २ठ) ब — ३ठ^{३} (क$_{२}$) भु (२ — २ठ) ब
.... प्र (३)

४०८. प्र प्रेरणेच्या (४) आणि (५) ह्या पदांच्या किंमती, ३९९ व्या लेखातील (१५) [३] अंकी जे पद आहे त्याला अनुक्रमें $\frac{१}{८}$ कोभु (ब — बं) आणि $\frac{१५}{८}$ कोभु३ (ब — बं) ह्या पदांनीं गुणिल्यानें येतात. ह्या कोभुज्यांचे पद विस्तार ३९६ व्या लेखाच्या अनुक्रमें (६) आणि (१०) ह्या अंकी दिल्या आहेत.

— $\frac{१}{८}\,\frac{\text{सबं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{बं}^{४}}$ कोभु (ब — बं) =

— $\frac{१}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ अठ^{२} कोभु (१ — ठ) ब — $\frac{२७}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ अ ठ^{२} इं कोभु (१ — ठ — ड) ब

— $\frac{१}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ अठ^{२} इं को भु (१ — ठ + ड) ब

+ $\frac{१}{४}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ अठ^{२} इ को भु (१ — ठ — ण) ब ....प्र (४)

— $\frac{१५}{८}\,\frac{\text{सबं}^{४}}{\text{ज}^{२}\text{बं}^{४}}$ कोभु३ (ब — बं) = — $\frac{१५}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ अठ^{२} कोभु (३ — ३ठ) ब

.... प्र (५)

A-2548—22-B

४०९. प्र प्रेरणेचें सहावें पद त प्रेरणेच्या किंमतीच्या पदसंघानें बनते. तेव्हां ते मागाहून तयार करूं. त्याकरितां त प्रेरणेचा पदसंघ प्रथम तयार करूं. मागे त प्रेरणेची चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें तयार केलीं आहेत, त्यांत $+\ \text{६}\ \text{ठ}^{\text{२}}\ (\text{व}_{\text{२}})\ \text{भु}\ (\text{२} - \text{२ठ})$ ह्याच एका संयुक्त पदाची किंमत काढिली नाही. त्यांत खालीं लिहिलेली सहा पदें निघतात. तीं अशी

$$
\begin{aligned}
& - \left(\text{३ठ}^{\text{४}} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}\right) \text{भु}\ (\text{२}-\text{२ ठ})\ \text{ब} + \text{३ ठ}^{\text{४}}\ \text{भु}\ (\text{४}-\text{४ ठ})\ \text{ब} \\
& - \tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}\ \text{भु}\ (\text{२}-\text{२ ठ}-\text{२ ए})\ \text{ब} - \tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}\ \text{भु}\ (\text{२}-\text{२ ठ} + \text{२ ए})\ \text{ब} \\
& + \frac{\text{४५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\ \text{इ भुणब} \qquad\qquad + \frac{\text{४५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\ \text{इ भु}\ (\text{४}-\text{४ ठ}-\text{ण})\ \text{ब.}
\end{aligned}
$$

हीं ६ पदें ४०३ व्या लेखातील १७ पदांत मिळविली आणि ४०४ व्या लेखातील दोन पदें मिळून २५ पदें खालीं एकत्र लिहिली आहेत.—

$$
\frac{\text{त}}{\text{श्रज}^{\text{२}}\text{व}^{\text{२}}} = \left\{
\begin{aligned}
& - \frac{\text{३}}{\text{२}}\,\text{ट}^{\text{२}}\text{भु}\ (\text{२}-\text{२ठ})\ \text{ब} \\
& + \text{३ ठ}^{\text{२}}\text{इभु}\ (\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण})\ \text{ब} + \text{३ ठ}^{\text{२}}\text{इ भु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ण})\ \text{ब} \\
& - \frac{\text{२१}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इं भु}\ (\text{२}-\text{२ठ}-\text{ड})\ \text{ब} + \frac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इं भु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ड})\text{ब} \\
& - \left(\text{३ठ}^{\text{४}} + \text{३ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}} + \frac{\text{९}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}} - \frac{\text{१५}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इं}^{\text{२}}\right) \text{भु}(\text{२}-\text{२ठ})\text{ब} \\
& - \frac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए})\text{ब} - \frac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{२ए})\text{ब} \\
& - \frac{\text{१५}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}}\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण})\text{ब} - \frac{\text{१५}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}}\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{२ण})\text{ब} \\
& + \frac{\text{४५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\text{इभुणब} \qquad + \frac{\text{४५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\text{इभु}(\text{४}-\text{४ठ}-\text{ण})\text{ब} \\
& + \text{३ठ}^{\text{३}}\text{इभु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण})\text{ब} - \text{३ठ}^{\text{३}}\text{इभु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ण})\text{ब} \\
& + \frac{\text{२१}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इइंभु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण}-\text{ड})\text{ब} - \frac{\text{३}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इइंभु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण}+\text{ड})\ \text{ब} \\
& + \frac{\text{२१}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इइं भु}\ (\text{२}-\text{२ठ}+\text{ण}-\text{ड})\text{ब} - \frac{\text{३}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इइंभु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ण}+\text{ड})\text{ब} \\
& + \text{३ठ}^{\text{४}}\text{भु}(\text{४}-\text{४ठ})\text{ब} - \frac{\text{५१}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इं}^{\text{२}}\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ड})\text{ब} \\
& - \frac{\text{३}}{\text{८}}\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{भु}(\text{१}-\text{ठ})\text{ब} - \frac{\text{१५}}{\text{८}}\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{भु}(\text{३}-\text{३ठ})\text{ब}\ \ [\text{चवथो पदवो}]
\end{aligned}
\right.
$$

४१०. वरच्या पदसंघाचें संकलन करावयाचें. संकलन म्हणजे शून्य लब्धिगुणापासून तो ज्या पदसंघाचा म्हणजे संचयाचा लब्धिगुण आहे तो संचय शोधावयाचा. संकलन म्हणजे काय, लेख ३१६ पहा. आणि लेख ३८४ पहा. वरचें संकलन करावयाचें असतां पदगुणकाला केंद्रगुणकानें भागावें लागतें. त्याचे जागीं केंद्रगुणकानें १ ह्या संख्येला भागुन गुणक तयार करून त्या गुणकानें पदगुणकाला गुणिल्यानें तेंच कार्य होते. त्यांना संकलन गुणक म्हणूं. ते खालीं तयार करून लिहिले आहेत. भुजज्येचे संकलन—कोभुजज्येने होते. एथे ऋणचिन्ह संकलनालाच दिले आहे.

$(२-२ठ)^{-१} = +\frac{१}{२}+\frac{१}{२}ठ+\frac{१}{२}ठ^{२}$	$(४-४ठ-ण)^{-१} = +\frac{१}{३}$
$(२-२ठ-ण)^{-१} = १+२ठ+\frac{१३}{४}ठ^{२}$	$(४-४ठ)^{-१} = +\frac{१}{४}$
$(२-२ठ+ण)^{-१} = +\frac{१}{३}+\frac{२}{९}ठ$	$(२-२ठ-२ड)^{-१} = +\frac{१}{२}$
$(२-२ठ-ड)^{-१} = +\frac{१}{२}+\frac{३}{४}ठ$	$(२-२ठ+२ड)^{-१} = +\frac{१}{२}$
$(२-२ठ+ड)^{-१} = +\frac{१}{२}+\frac{१}{४}ठ$	$(२-२ठ+ण-ड)^{-१} = (३-३ठ)^{-१} = \frac{१}{३}$
$(२-२ठ-ण+ड)^{-१} = (१-ठ)^{-१} = १+ठ$	$(२-२ठ-ण-ड)^{-१} = १+३ठ$
$(२-२ठ-२ण)^{-१} = -\frac{१}{२ठ}-\frac{३}{८}$	$(२-२ठ-२ए)^{-१} = -\frac{१}{२ठ}+\frac{३}{८}$

यांतील $ण = १-\frac{३}{४}ठ^{२}$ आणि $ए = १+\frac{३}{४}ठ^{२}$ घेतला आहे. ३८९ व ३८७ ले. पहा.

$$-\text{ॐ}\left(\frac{त}{थज^{२}व^{२}}\right) सूब =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{३}{४}ठ^{२}कोभु(२-२ठ)ब-\frac{३}{४}ठ^{२}कोभु(२-२ठ)ब \\ +\ ३ठ^{२}इ\ कोभु(२-२ठ-ण)ब+ठ^{२}इ\ कोभु(२-२ठ+ण)ब \\ -\frac{२१}{८}ठ^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-ड)ब+\frac{३}{८}ठ^{२}इं\ कोभु(२-२ठ+ड)ब \\ +\frac{३}{८}ठल^{२}कोभु(२-२ठ-२ए)ब+\frac{१५}{८}ठइ^{२}कोभु(२-२ठ-२ण)ब \end{array}\right.$$

$$-\text{ऊँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}\right)\text{सूब} = \qquad \text{—चालू.}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}
+\left(\frac{१५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}-\frac{९}{४}\text{ठ}^{४}-\frac{३}{२}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}-\frac{९}{४}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\right)\text{कोभु }(२-२\text{ठ})\text{ ब} \\
+ ९\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\text{ब}-\frac{१}{३}\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण})\text{ब} \\
-\frac{६३}{१६}\text{ठ}^{३}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ड})\text{ब}+\frac{३}{१६}\text{ठ}^{३}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ड})\text{ब} \\
+\frac{४५}{३२}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\text{ब}-\frac{१५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+२\text{ण})\text{ब} \\
-\frac{९}{३२}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\text{ब}-\frac{३}{१६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+२\text{ए})\text{ब} \\
-\frac{५१}{८}\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ड})\text{ब}-\frac{३}{८}\;\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ठ}^{३}\text{कोभु}(१-\text{ठ})\text{ब} \\
+\frac{२१}{२}\text{ठ}^{३}\text{इइं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\text{ब}-\frac{३}{२}\text{ठ}^{३}\text{इइं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\text{ब} \\
+\frac{७}{२}\text{ठ}^{३}\text{इइं कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}-\text{ड})\text{ब}-\frac{१}{२}\text{ठ}^{३}\text{इइं कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}+\text{ड})\text{ब} \\
+\frac{१५}{८}\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु}(४-४\text{ठ}-\text{ण})\text{ब}+\frac{४५}{८}\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु णब} \\
+\frac{३}{४}\text{ठ}^{४}\text{कोभु}(४-४\text{ठ})\text{ब}-\frac{५}{८}\;\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ठ}^{३}\text{कोभु}(३-३\text{ठ})\text{ब}
\end{array}\right.$$

ह्या संकलनामध्यें तिसऱ्या पदवीच्या पदापासून आणि चवथ्या पदवीच्या पदापासून कांहीं पदें पांचव्या पदवीची निघण्याचा संभव आहे.

४११. चंद्राच्या कक्षेचें तिसरें सूक्ष्मांश समीकरण पहिल्या व दुसऱ्या समीकरणाहून भिन्न आहे. ह्या समीकरणात $\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}}$ हें एकच पद आहे. यांतील पदें अव्यक्त स्वरूपाची घेऊन त्यांनीं ह्या पदाची किंमत ठरवूं. तें समीकरण खाली लिहिल्याप्रमाणें.—

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}}=\frac{१}{\text{जव}^{२}}\left[\;१+२\text{ऊँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}\right)\text{सूब}\;\right]^{-\frac{१}{२}}$$

लेखन सौकर्याकरितां संकलन हे कंसातील पद प्रथम क्ष नें दाखवितो.

तेव्हां

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \frac{१}{\text{ज}^२\text{व}^२}(१+२\text{क्ष})^{-\frac{१}{२}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज}^२\text{व}^२}(१-\text{क्ष}+\frac{३}{२}\text{क्ष}^२)$$

एथें क्ष म्हणजे ४०२ ह्या लेखांत जो पदसमूह तयार होईल त्याचें संकलन करून आलेली पदें. ह्यामध्ये पहिलें पद दुसऱ्या पदवीचें येतें आणि पांचव्या पदवीपेक्षां सूक्ष्म पदें आपणास नको आहेत. याकरिता क्ष ची सामान्य स्वरूपाची किंमत खालीं दिल्या-प्रमाणें होते.

$$-\text{क्ष} = (\text{सं}_२) + (\text{सं}_३) + (\text{सं}_४) + (\text{सं}_५)$$

$$+\frac{३}{२}\text{क्ष}^२ = +\frac{३}{२}(\text{सं}_२)(\text{सं}_२) + ३(\text{सं}_२)(\text{सं}_३)$$

आणि

$$\text{व} = \text{अ}\,[१ + (\text{व}_१) + (\text{व}_२) + (\text{व}_३) + (\text{व}_४) + (\text{व}_५)]$$

$$= \text{अ}\,[१ + \left\{(\text{व}_१) + \text{घ}\right\}]$$

$$\frac{\text{अ}^२}{\text{व}^२} = \left[१ + \left\{(\text{व}_१) + \text{घ}\right\}\right]^{-२}$$

$$= १ - २\left\{(\text{व}_१) + \text{घ}\right\}$$

$$+ ३\left\{(\text{व}_१) + \text{घ}\right\}^२$$

$$- ४\left\{(\text{व}_१) + \text{घ}\right\}^३$$

$$+ ५\left\{(\text{व}_१) + \text{घ}\right\}^४ - ६(\text{व}_१)^५$$

$$+३\left\{(\text{व}_१)+\text{घ}\right\}^२ = +३(\text{व}_१)^२ + ६(\text{व}_१)\,\text{घ} + ३\text{घ}^२$$

$$-४\left\{(\text{व}_१)+\text{घ}\right\}^३ = -४(\text{व}_१)^३ - १२(\text{व}_१)^२\text{घ} - १२(\text{व}_१)\text{घ}^२$$

$$+५\left\{(\text{व}_१)+\text{घ}\right\}^४ = +५(\text{व}_१)^४ + २०(\text{व}_१)^३\text{घ} + ३०(\text{व}_१)^२\,\text{घ}^२$$

$$-\text{६}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{५}} \qquad = -\text{६}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{५}}$$

$$+\text{३घ}^{\text{२}} \qquad = \text{३}(\text{व}_{\text{२}})^{\text{२}} + \text{६}(\text{व}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{३}})$$

तेव्हां

$$\frac{\text{१}}{\text{जव}^{\text{२}}} = \frac{\text{१}}{\text{जअ}^{\text{२}}}\left\{\begin{array}{l} \text{१} - \text{२}(\text{व}_{\text{१}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{२}}) + \text{३}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}} + \text{६}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{२}}) - \text{४}(\text{व}_{\text{२}})^{\text{३}} \\ \quad - \text{२}(\text{व}_{\text{३}}) + \text{६}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{३}}) + \text{३}(\text{व}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{२}}) \\ \qquad - \text{१२}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}}(\text{व}_{\text{२}}). \\ + \text{५}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{४}} - \text{२}(\text{व}_{\text{४}}) + \text{६}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{४}}) - \text{१२}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}}(\text{व}_{\text{३}}) \\ + \text{६}(\text{व}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{३}}) - \text{१२}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{२}}) \\ \qquad + \text{२०}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{३}}(\text{व}_{\text{२}}) - \text{६}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{५}} - \text{२}(\text{व}_{\text{५}}) \end{array}\right. \qquad \ldots\ldots(\text{ब})$$

वरचें समीकरण (अ) आणि (ब) यांचा गुणाकार केला म्हणजे $\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}}$ ह्या पदाची किंमत येतें, ती पांचव्या पदवीपर्यंत खालीं दिली आहे

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \frac{\text{१}}{\text{जअ}^{\text{२}}}\left\{\begin{array}{l} \text{१} - \text{२}(\text{व}_{\text{१}}) + [\text{३}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}} - \text{२}(\text{व}_{\text{२}}) + (\text{सं}_{\text{२}})] \\ + [\text{६}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{२}}) - \text{४}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{३}} - \text{२}(\text{व}_{\text{१}})(\text{सं}_{\text{२}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{३}}) + (\text{सं}_{\text{३}})] \\ + \left[\begin{array}{l} + \text{५}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{४}} - \text{१२}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}}(\text{व}_{\text{२}}) + \text{३}(\text{व}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{२}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{४}}) \\ + \text{६}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{३}}) + (\text{सं}_{\text{४}}) + \tfrac{\text{३}}{\text{२}}(\text{सं}_{\text{२}})(\text{सं}_{\text{२}}) \\ + \text{३}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}}(\text{सं}_{\text{२}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{१}})(\text{सं}_{\text{३}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{२}})(\text{सं}_{\text{२}}) \end{array}\right] \\ + \left[\begin{array}{l} + \text{६}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{४}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{५}}) - \text{१२}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{२}}) \\ + \text{२०}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{३}}(\text{व}_{\text{२}}) - \text{१२}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}}(\text{व}_{\text{३}}) + \text{६}(\text{व}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{३}}) \\ + \text{३}(\text{सं}_{\text{२}})(\text{सं}_{\text{३}}) - \text{२}(\text{सं}_{\text{२}})(\text{व}_{\text{३}}) - \text{६}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{५}} \\ + \text{३}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}}(\text{सं}_{\text{३}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{१}})(\text{सं}_{\text{४}}) - \text{३}(\text{व}_{\text{१}})(\text{सं}_{\text{२}})(\text{सं}_{\text{२}}) \\ + (\text{सं}_{\text{५}}) - \text{४}(\text{व}_{\text{१}})^{\text{३}}(\text{सं}_{\text{२}}) - \text{२}(\text{व}_{\text{२}})(\text{सं}_{\text{३}}) \\ + \text{६}(\text{व}_{\text{१}})(\text{व}_{\text{२}})(\text{सं}_{\text{२}}) \end{array}\right] \end{array}\right.$$

हें समीकरण कम ची किंमत चवथ्या पदवीपर्यंत पूर्णपणें काढण्याच्या उपयोगी पडेल. यांतील पदें पदवीच्या क्रमानें दिलीं आहेत.

प्रकरण चवदावें

चंद्रकक्षेच्या सूक्ष्मांश समीकरणांचें संकलन

तिसरी पदवी

४१२. चंद्राच्या शराचें सूक्ष्मांश समीकरण आतां आपण तिसऱ्या पदवीनें सोडवूं. हें समीकरण ३७३ ह्या लेखांत दिलें आहे. त्यांतील पहिलें पद $\frac{प्रश — प}{ज^{२} व^{१}}$ हें आहे. याची किंमत प्रथम तयार करितो. ह्या पदाच्या किंमतींत तीन पदें आहेत, त्यापैकीं तिसरें पद असें आहे कीं, त्यातील पहिलेंच पद पांचव्या पदवीचें असून केंद्रगुणक ० किंवा २ ह्या संख्या समीप असल्यामुळें तें आपणाला विचारांत ध्यावयाचेंच नाहीं. बाकी दोन पदें प्र प्रेरणेचीच आहेत. मात्र त्यांना $३\frac{श}{व}$ आणि $\frac{श}{व}$ यांनीं गुणावें लागते. म्हणून प्रथम आपण $\frac{श}{व}$ ची किंमत तयार करूं. ही किंमत दुसऱ्या पदवीची पुरे आहे.

$$श = लभुएब + \tfrac{३}{८} ठलभु(२—२ठ—ए)ब$$

$$व = अ (१ + इ कोभुणव + ...)$$

$$\frac{श}{अ}अ = श \times (१ + इ कोभुणव)^{-१}$$

$$= लभुएब + \tfrac{३}{८} ठल भु (२—२ठ—ए)ब$$

$$= \tfrac{१}{२}इल भु(ए—ण)ब—\tfrac{१}{२}इल भु(ए+ण)ब \quad .. \quad (अ)$$

यांनीं ३ प्र (२) व प्र (३) ह्या पदसंघाला गुणून पदें गोळा केलीं त्यात तिसऱ्या पदवीचीं सर्व पदें, आणि चवथ्याही पदवीचीं सर्व पदें घेतली. हे पदसंध ४०६ व ४०७ ह्या लेखांत आहेत. हा गुणाकार करिताना त्या दोन्ही पदसंघांतील तीन तीन पदांना गुणावें लागते.

$$\frac{प्रश — ष}{ज^{२} व^{१}} = \begin{cases} — (\tfrac{३}{२}ठ^{२}ल — \tfrac{९}{३२}ठ^{३}ल) भुएब \\ + (\tfrac{३}{४}ठ^{२}ल — \tfrac{९}{१६}ठ^{३}ल) भु (२ — २ठ — ए) ब \\ — \tfrac{३}{४}ठ^{२}लभु (२ — २ठ + ए) ब \\ \qquad\qquad — \tfrac{९}{३२}ठ^{३}लभु (४ — ४ठ — ए) ब \\ + \tfrac{२१}{८}ठ^{२}लइभु (२ — २ठ — ए — ड) ब \\ \qquad\qquad — \tfrac{३}{८}ठ^{२}लइभु (२ — २ठ — ए + ड) ब \\ — \tfrac{२१}{८}ठ^{२}लइभु (२ — २ठ + ए — ड) ब \\ \qquad\qquad — \tfrac{३}{८}ठ^{२}लइभु (२ — २ठ + ए + ड) ब \\ — \tfrac{१}{४}ठ^{२}लइभु (ए — ड) ब — \tfrac{१}{४}ठ^{२}लइभु (ए + ड) ब \end{cases}$$

$$+ ३ठ^{२}लइभु (ए + ण) ब + ३ठ^{२}लइभु (ए - ण) ब$$
$$+ \frac{३}{२}ठ^{२}लइभु (२ - २ठ + ए - ण) ब$$
$$- \frac{३}{२}ठ^{२}लइभु (२ - २ठ - ए + ण) ब$$
$$+ \frac{३}{२}ठ^{२}लइभु (२ - २ठ + ए + ण) ब$$
$$- \frac{३}{२}ठ^{२}लइभु (२ - २ठ - ए - ण) ब$$
$$\ldots \ldots \ldots \quad (१)$$

४१३. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांत जें दुसरें पद आहे त्या दुसऱ्या पदाला ($\frac{सूश}{सूब} - \frac{श सूव}{व सूव}$) हा गुणक आहे. ह्या गुणकाची किंमत प्रथम तयार करूं.

$$श = लभुएब + \frac{३}{२} ठल भु(२-२ठ-ए) ब$$

$$\frac{सूश}{सूब} = ल कोभु एब + \frac{३}{२} ठल कोभु(२-२ठ-ए)ब \ldots\ldots (अ)$$

वरच्या लेखांत $\frac{श}{व}$ अ ह्या पदाची किंमत काढिली आहे. आणि त्याला गुणक $\frac{सूव}{सूब}$ आहे. ह्या गुणकाची किंमत खालीं लिहिल्याप्रमाणें :—

$$व \frac{१}{अ} = \left\{ \begin{array}{l} + इकोभुणब - \frac{३}{४} ल^{२} कोभु२ एब \\ + ठ^{२}कोभु(२-२ठ)ब + \frac{१५}{८} ठइ कोभु(२-२ठ-ण)ब \end{array} \right.$$

तेव्हां

$$\frac{१}{अ}\frac{सूव}{सूब} = \left\{ \begin{array}{l} - इभुणब + \frac{३}{२} ल^{२}भु(२एब) \\ - २ठ^{२}भु(२-२ठ)ब + \frac{१५}{८}ठइभु(२-२ठ-ण)ब \ldots (ब) \end{array} \right.$$

म्हणून
$$-\frac{त}{थज^{२}व^{२}}\left(\frac{सूश}{सूब} - \frac{श}{व}\frac{सूव}{सूब}\right) =$$

$$+ \frac{३}{४} ठ^{२}लभु(२-२ठ-ए)ब + \frac{३}{४} ठ^{२}लभु(२-२ठ+ए)ब$$
$$+ \frac{२१}{८}ठ^{२}लइंभु (२-२ठ-ए-ड)ब + \frac{२१}{८}ठ^{२}लइंभु(२-२ठ+ए-ड) ब$$
$$- \frac{३}{८} ठ^{२}लइंभु(२-२ठ-ए+ड)ब - \frac{३}{८}ठ^{२}लइंभु(२-२ठ+ए+ड)ब$$
$$- \frac{१५}{८} ठ^{२}लइभु(२-२ठ-ए-ण)ब - \frac{१५}{८} ठ^{२}लइभु(२-२ठ+ए+ण) ब$$
$$- \frac{९}{८} ठ^{२}लइभु(२-२ठ+ए-ण)ब - \frac{९}{८}ठ^{२}लइभु(२-२ठ-ए+ण)ब$$
$$+ \frac{३९}{३२} ठ^{२}लभुएब \qquad + \frac{३९}{३२} ठ^{२}लभु(४-४ठ-ए)ब$$
$$\ldots\ldots (२)$$

४१४. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांतील तिसरें पद अत्यंत सूक्ष्म आहे. त्यांतील पहिलेंच पद पांचव्या पदवीचें आहे. त्याचा विचार मागाहून करूं. वरच्या दोन लेखांतील पदसंघ (१) व (२) यामध्यें चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें

आली आहेत. यांचें संकलन केले तर चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें येणार नाहींत. त्यांत थोडे वैगुण्य राहील. पण त्याकरितां अशी योजना करूं कीं, पांचव्या पदवीची १ केंद्रगुणकासमीप ज्यांचे केंद्रगुणक आहेत अशीं पदें शोधून, त्याचें संकलन चवथ्या पदवीचें होईल. तीं पदें ह्या संकलनात घेतलीं म्हणजे ते वैगुण्य नाहींसे होईल. म्हणून ४ थ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें घेऊन त्याचें संकलन करूं. तीं सर्व पदें खालीं लिहिल्याप्रमाणें :—

$$\left\{ \frac{\text{सू}^2\text{श}}{\text{सू}^2\text{व}} + \text{श} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&- \left(\tfrac{३}{२}\text{ठ}^2\text{ल} - \tfrac{९}{१६}\text{ठ}^3\text{ल}\right)\text{भुएब} + \left(\tfrac{३}{२}\text{ठ}^2\text{ल} - \tfrac{९}{१६}\text{ठ}^3\text{ल}\right)\text{भु}(२-२\text{ठ}-\text{ए})\text{ब} \\
&+ \tfrac{२१}{४}\text{ठ}^2\text{लइंभु}(२-२\text{ठ}-\text{ए}-\text{ड})\text{ब} - \tfrac{३}{४}\text{ठ}^2\text{लइंभु}(२-२\text{ठ}-\text{ए}+\text{ड})\text{ब} \\
&- \tfrac{९}{४}\text{ठ}^2\text{लइंभु}(\text{ए}-\text{ड})\text{ब} \qquad - \tfrac{९}{४}\text{ठ}^2\text{लइंभु}(\text{ए}+\text{ड})\text{ब} \\
&- \tfrac{२७}{८}\text{ठ}^2\text{लइभु}(२-२\text{ठ}-\text{ए}-\text{ण})\text{ब} - \tfrac{२१}{८}\text{ठ}^2\text{लइभु}(२-२\text{ठ}-\text{ए}+\text{ण})\text{ब} \\
&+ \tfrac{३}{८}\text{ठ}^2\text{लइभु}(२-२\text{ठ}+\text{ए}-\text{ण})\text{ब} - \tfrac{३}{८}\text{ठ}^2\text{लइभु}(२-२\text{ठ}+\text{ए}+\text{ण})\text{ब} \\
&+ ३\text{ठ}^2\text{लइभु}(\text{ए}-\text{ण})\text{ब} \qquad + ३\text{ठ}^2\text{लइभु}(\text{ए}+\text{ण})\text{ब}
\end{aligned}$$

४१५. क्रांतिवृत्ताला चंद्रकक्षेनें छेदिल्यामुळें होणारे दोन बिंदु ज्यांना राहु आणि केतु अशीं दोन नांवें आहेत, हे दोन बिंदु स्थीर नाहींत, त्यांना गति आहे. ही गति चंद्राच्या मध्यम गतीच्या (१—ए) इतक्या पटी बरोबर असते. ह्या गतीला कारण सूर्याचें आकर्षण होय. चंद्र-सूर्याच्या मध्यम गतीचें गुणोत्तर ठ ही संख्या आहे. ठ ह्या संख्येच्या विशेष घातांनीं ए ही संख्या ठरवितां येतें. ३८७ व्या लेखांत हे उघड केले आहे. तेथें ठ च्या वर्गापर्यंत किंमत काढिली ती एथें घननापर्यंत सापडतें, ती अशी—

$$\begin{aligned}
\text{ल} &= -\left(\tfrac{३}{२}\text{ठ}^2\text{ल} - \tfrac{९}{१६}\text{ठ}^3\text{ल}\right) \div (१-\text{ए}^2) \\
१-\text{ए}^2 &= -\tfrac{३}{२}\text{ठ}^2 + \tfrac{९}{१६}\text{ठ}^3 \\
\text{ए}^2 &= १ + \tfrac{३}{२}\text{ठ}^2 - \tfrac{९}{१६}\text{ठ}^3 \\
\text{ए} &= १ + \tfrac{३}{४}\text{ठ}^2 - \tfrac{९}{३२}\text{ठ}^3
\end{aligned}$$

४१६. शर आणि चलत्रिज्या यांचे संकलन करण्याकरिता प्रत्येक पदाच्या गुणकाला, केंद्रगुणाचा वर्ग १ ह्या संख्येंत वजा करून जी संख्या होते तिनें भागावें लागतें. ह्या भाजकानें १ ह्या संख्येस भागून त्या भाजकाला गुणकाचें स्वरूप दिलें आहे. ह्या गुणकांना 'संकलन गुणक' म्हणा. ते शराच्या समीकरणाचें संकलन गुण खालीं तयार केले आहेत :—

$$\frac{१}{१-(\text{केंद्रगुणक})^2} = \left\{१-(\text{केंद्र गुणक})^2\right\}^{-१}$$

ह्या पद्धतीनें म्हणजे वजाबाकी केल्यानंतर — १ घात करावयाचा आहे, आणि ठ ही संख्या ड बरोबर आहे असे मानिलें आहे. ए आणि ण यांच्या किमतीं ठ च्या रूपानें घ्यावयाच्या आहेत. स्पष्टीकरणासाठीं कांहीं केंद्रांचें संकलन गुणक तयार करून दाखवितों.

$$\left\{१-(२-२ठ-ए)^{२}\right\}$$
$$=\left\{१-(४+४ठ^{२}+ए^{२}-८ठ-४ए+४ठए)\right\}$$
$$=\left\{-३+८ठ-४ठ^{२}+३-४ठ+\frac{३}{२}ठ^{२}-\frac{१८३}{१६}ठ^{३}\right\}$$
$$=+४ठ-\frac{५}{२}ठ^{२}-\frac{१८३}{१६}ठ^{३}=४ठ\left(१-\frac{५}{८}ठ-\frac{१८३}{६४}ठ^{२}\right)$$
$$\left\{१-(२-२ठ-ए)^{२}\right\}^{-१}$$
$$=\frac{१}{४ठ}\left(१-\frac{५}{८}ठ-\frac{१८३}{६४}ठ^{२}\right)^{-१}$$
$$=\frac{१}{४ठ}\left(१+\frac{५}{८}ठ+\frac{१८३}{६४}ठ^{२}\right)$$

संकलन गुणक

$$=\frac{१}{४ठ}+\frac{५}{३२}+\frac{१८३}{२५६}ठ.$$

पुढचें संकलन गुणक करितांना ए आणि ण यांच्या किमतीं $१+\frac{३}{४}ठ^{२}$ आणि $१-\frac{३}{४}ठ^{२}$ अशा अनुक्रमें घ्याव्या.

$$\left\{१-(२-२ठ-ए-ड)^{२}\right\}$$
$$=\left\{१-(२-३ठ-१-\frac{३}{४}ठ^{२})^{२}\right\}$$
$$=\left\{१-(१-३ठ-\frac{३}{४}ठ^{२})^{२}\right\}$$
$$\left\{१-(२-२ठ-ए-ड)^{२}\right\}^{-१}$$
$$=\left\{१-(१-६ठ-\frac{१५}{२}ठ^{२})\right\}^{-१}$$
$$=\left\{+६ठ-\frac{१५}{२}ठ^{२}\right\}^{-१}$$
$$=\frac{१}{६ठ}+\frac{५}{२४}$$

याप्रमाणेंच

$$\left\{१-(ए-ड)^{२}\right\}^{-१} = \frac{१}{२ठ} + \frac{५}{८};$$

$$\left\{१-(२-२ठ-ए-ण)^{२}\right\}^{-१} = १;$$

$$\left\{१-(ए+ड)^{२}\right\}^{-१} = -\frac{१}{२ठ} + \frac{५}{८};$$

$$\left\{१-(२-२ठ+ए-ण)^{२}\right\}^{-१} = -\frac{१}{३};$$

$$\left\{१-(२-२ठ-ए+ड)^{२}\right\}^{-१} = \frac{१}{२ठ} - \frac{१}{८};$$

$$\left\{१-(२-२ठ-ए+ण)^{२}\right\}^{-१} = -\frac{१}{३};$$

$$\left\{१-(ए-ण)^{२}\right\}^{-१} = १$$

$$\left\{१-(२-२ठ+ए+ण)^{२}\right\}^{-१} = -\frac{१}{१५}$$

$$\left\{१-(ए+ण)^{२}\right\}^{-१} = -\frac{१}{३}$$

वरचे संकलन गुणक घेऊन ज्याच्या त्या पदाच्या गुणकाला गुणिलें म्हणजे शराची पदें होतात. हें शराचें समीकरण आपणाला चवथ्या पदवीपर्यंत न्यावयाचे आहे. शराचें समीकरण पांचव्या पदवीची १ संख्येसमीप केंद्रगुणाचीं पदें घेऊन त्यांत जीं पदें निघतील ती मागाहून तयार केली म्हणजे चवथी पदवी पूर्ण होईल.

$$श = \begin{cases} ल\,भु\,ए\,ब + \left(\frac{३}{८}ठल + \frac{३}{३२}ठ^{२}ल - \frac{४५}{५१२}ठ^{३}ल\right) \\ \qquad\qquad भु(२-२ठ-ए)\,ब \\ + \frac{७}{८}ठल\,इं\,भु(२-२ठ-ए-ड)\,ब \\ + \frac{३५}{३२}ठ^{२}ल\,इं\,भु(२-२ठ-ए-ड)\,ब \\ - \frac{३}{८}ठल\,इं\,भु(२-२ठ-ए+ड)\,ब \\ + \frac{३}{३२}ठ^{२}ल\,इं\,भु(२-२ठ-ए+ड)\,ब \\ - \frac{१}{८}ठल\,इं\,भु(ए-ड)\,ब - \frac{४५}{३२}ठ^{२}ल\,इं\,भु(ए-ड)\,ब \\ + \frac{१}{८}ठल\,इं\,भु(ए+ड)\,ब - \frac{४५}{३२}ठ^{२}ल\,इं\,भु(ए+ड)\,ब \\ - \frac{२७}{८}ठ^{२}ल\,इ\,भु(२-२ठ-ए-ण)\,ब \\ + \frac{७}{८}ठ^{२}ल\,इ\,भु(२-२ठ-ए+ण)\,ब \\ - \frac{१}{८}ठ^{२}ल\,इ\,भु(२-२ठ+ए-ण)\,ब \\ + \frac{१}{४०}ठ^{२}ल\,इ\,भु(२-२ठ+ए+ण)\,ब \\ + ३ठ^{२}ल\,इ\,भु(ए-ण)\,ब - ठ^{२}ल\,इ\,भु(ए+ण)\,ब \end{cases}$$

अपूर्ण चवथी पदवी.

४१७. चलत्रिज्येचें समीकरण आतां तिसऱ्या आणि अपूर्ण अशा चवथ्या पदवीपर्यंत सोडवितां येईल. याकरितां सर्व पदें चवथ्या पदवीपर्यंत निघतील ती काढून ठेवूं. परंतु, संकलन मात्र तिसऱ्या पदवीपर्यंत करूं. ह्या समीकरणांत दोन पदें आहेत. दुसरें पद तयार आहे. पहिल्या पदांत प्र प्रेरणेची सहा पदें आहेत. त्यापैकीं पहिल्या पदांत — ३ (श$_{३}$) ल भु ए ब हें पद तयार करावयाचे, आणि ६ वें पद सर्वच करावयाचे हीं कार्यें क्रमानें करूं.

— ३ (श$_{३}$) लभुएब = — $\frac{९}{६४}$ ठ^{२} ल^{२} कोभु (२ — २ ठ — २ ए) ब
+ $\frac{९}{६४}$ ठ^{२} ल^{२} कोभु (२ — २ ठ) ब
— $\frac{२१}{१६}$ ठ ल^{२} इं कोभु (२ — २ ठ — २ ए — ड) ब
+ $\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इं कोभु (२ — २ ठ — २ ए + ड) ब
+ $\frac{२१}{१६}$ ठ ल^{२} इं कोभु (२ — २ ठ — ड) ब
— $\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इं कोभु (२ — २ ठ + ड) ब
— $\frac{२७}{१६}$ ठ ल^{२} इं कोभु (२ ए — ड) ब
+ $\frac{२७}{१६}$ ठ ल^{२} इं कोभु (२ ए + ड) ब

४१८. प्र प्रेरणेतील सहावें पद — $\frac{त}{थ ज^{२} व^{२}} \frac{सू व}{सू ब}$ हें आहे. ह्यांतील पहिल्या अवयवाची किंमत ४०९ व्या लेखांत दिली आहे आणि दुसऱ्या अवयवाची किंमत ४१३ व्या लेखांत (ब) ह्या पदसंघांत दिली आहे. यांचा गुणाकार करावयाचा. गुणाकारांत चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें घ्यावयाची आहेत आणि आलेला गुणाकार ऋण लिहावयाचा आहे.

$$— \frac{त}{थ ज^{२} व^{२}} \frac{सू व}{सू ब} =$$

— $\frac{३}{४}$ ठ^{२} इ कोभु (२ — २ ठ — ण) ब + $\frac{३}{४}$ ठ^{२} इ कोभु (२ — २ ठ + ण) ब
+ $\frac{३}{२}$ ठ^{२} इ^{२} कोभु (२ — २ ठ — २ ण) ब — $\frac{३}{२}$ ठ^{२} इ^{२} कोभु (२ — २ ठ + २ ण) ब
— $\frac{२१}{८}$ ठ^{२} इ इं कोभु (२ — २ ठ — ण — ड) ब + $\frac{२१}{८}$ ठ^{२} इ इं कोभु (२ — २ ठ + ण — ड) ब
+ $\frac{३}{८}$ ठ^{२} इ इं कोभु (२ — २ ठ — ण + ड) ब — $\frac{३}{८}$ ठ^{२} इ इं कोभु (२ — २ ठ + ण + ड) ब
+ $\frac{३}{८}$ ठ^{२} ल^{२} कोभु (२ — २ ठ — २ ए) ब — $\frac{३}{८}$ ठ^{२} ल^{२} कोभु (२ — २ ठ + २ ए) ब
— $\frac{३}{२}$ ठ^{४} + $\frac{३}{२}$ ठ^{४} कोभु (४ — ४ ठ) ब
— $\frac{४५}{३२}$ ठ^{३} इ कोभु ण ब + $\frac{४५}{३२}$ ठ^{३} इ कोभु (४ — ४ ठ — ण) ब

४१९. चलत्रिज्येच्या समीकरणांत दुसरें पद

$$— २ ॐ \left(\frac{त}{थ ज^{२} व^{२}}\right) सू ब \times \left\{\frac{सू^{२} व}{सू ब^{२}} + व\right\}$$

हें आहे. ह्यातील पहिल्या अवयवाची किंमत ४१० व्या लेखांत आहे. आणि दुसरा अवयव चलत्रिज्येचें समीकरण हाच आहे. पण तें पूर्वीच्या ३८८ व्या लेखांतील जें समीकरण आहे, त्यांमधील पदें घ्यावयाची. आपणाला चवथ्या पदवीपर्यंत

पदें गोळा करावयाची आहेत. त्यापैकीं संकलनातील, म्हणजे पहिल्या अवयवात पहिलें पद दुसऱ्या पदवीचें आहे, तेव्हां दुसरा अवयव दुसऱ्या पदवीपर्यंत पुरे आहे. म्हणून—

$$-\text{२ ठँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{थ ज}^{२}\text{व}^{२}}\right)\text{सू ब}\times\text{अ}\left\{\text{१}-\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{२}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{ठ}^{२}\right.$$
$$\left.+\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{२}\text{ कोभु २ए ब}-\text{३ ठ}^{२}\text{ कोभु (२ − २ठ) ब}\right\}$$

ह्या गुणाकाराचे दोन भाग करू; त्यापैकीं पहिला भाग ४१० व्या लेखांतील पदसंघाची दुप्पट हा आहे आणि दुसरा भाग तो असा—

$$-\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ठ}^{२}\text{ भु (२ − २ठ) ब}\times(-\text{अ})\left\{\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{२}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{ड}^{२}\right.$$
$$\left.-\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{२}\text{ कोभु २ए ब}-\text{३ ठ}^{२}\text{ कोभु (२ − २ठ) ब}\right\}$$
$$=\text{अ}\begin{bmatrix}\left\{+\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}+\tfrac{\text{३}}{\text{८}}\text{ठ}^{४}\right\}\text{भु (२ − २ठ) ब}-\tfrac{\text{९}}{\text{८}}\text{ठ}^{४}\text{ भु (४ − ४ठ) ब}\\-\tfrac{\text{९}}{\text{३२}}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{ भु (२ − २ठ − २ए) ब}-\tfrac{\text{९}}{\text{३२}}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{ भु (२ − २ठ + २ए) ब}\end{bmatrix}$$

४२०. चलत्रिज्येच्या समीकरणाचीं पदें चवथ्या पदवीपर्यंत सर्वच काढिलीं आहेत. त्या सर्व पदांचें संकलन आतांच न करितां व ज्या तिसऱ्या पदवीची सर्व पदें तयार होतील अशीच पदें खालच्या समीकरणांत घेतली आहेत.

$$\left\{\frac{\text{सू २व}}{\text{सू ब}^{२}}+\text{व}\right\}=\text{अ}\left\{\begin{array}{l}\text{१}-\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{२}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{ठ}^{२}\\+\left(\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{२}\text{इ}+\tfrac{\text{२२५}}{\text{१६}}\text{ठ}^{३}\text{इ}\right)\text{ कोभु ण ब}\\-\left(\text{३ ठ}^{२}+\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{३}-\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\text{ठ ल}^{२}\right)\\\qquad\qquad\text{कोभु (२ − २ठ) ब}\\+\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{२}\text{ कोभु २ ए ब}\\+\text{५ ठ}^{२}\text{ इ कोभु (२ − २ठ + ण) ब}\\+\left(\tfrac{\text{१५}}{\text{२}}\text{ठ}^{२}\text{इ}+\tfrac{\text{३८१}}{\text{१६}}\text{ठ}^{३}\text{इ}\right)\\\qquad\qquad\text{कोभु (२ − २ठ − ण) ब}\\+\tfrac{\text{१५}}{\text{४}}\text{ठ इ}^{२}\text{ कोभु (२ − २ठ − २ण) ब}\\\quad+\tfrac{\text{३}}{\text{१६}}\text{ठ ल}^{२}\text{ कोभु (२ − २ठ − २ए) ब}\\-\tfrac{\text{२१}}{\text{२}}\text{ठ}^{२}\text{ इं कोभु (२ − २ठ − ड) ब}\\\quad+\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{२}\text{ इं कोभु (२ − २ठ + ड) ब}\\-\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{२}\text{ इ कोभु ड ब}\\-\tfrac{\text{१५}}{\text{४}}\text{ठ}^{२}\text{ इ इं कोभु (२ − २ठ − ण + ड) ब}\\-\tfrac{\text{१५}}{\text{८}}\text{ठ}^{२}\dfrac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ कोभु (१ − ठ) ब}\\+\tfrac{\text{१०५}}{\text{४}}\text{ठ}^{२}\text{ इ इं कोभु (२ − २ठ − ण − ड) ब}\\+\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ठ}^{२}\text{ इ इं कोभु (ण − ड) ब}\\+\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ठ}^{२}\text{ इ इं कोभु (ण + ड) ब}\end{array}\right.$$

४२१. सूर्याच्या आकर्षणानें, चंद्रकक्षेच्या बृहदक्षास गति प्राप्त होते. अर्थात त्या अक्षाचीं टोकें जी चंद्रोच्च आणि केंद्र संन्निधान यानांही गति उत्पन्न होते. लेख ३८९ पहा. चंद्राच्या केंद्र संन्निधानाची गति ह्या तिसऱ्या पदवीच्या समीकरणावरूनही साध्य होते. ती अशी--

$$इ = \left(\tfrac{३}{२} ठ^{२} इ + \tfrac{२२५}{१६} ठ^{३} इ\right) \div \left(१ - ण^{२}\right)$$

कोभुणब ह्या केंद्राचा केंद्रगुणक ण आहे. याचा वर्ग १ ह्या संख्येत वजा करून वजाबाकीनें पदगुणकाला भागिल्यानें त्या पदाचें संकलन होतें. कोभुणब ह्या पदाचें संकलन + इ कोभूणब असे आहे, हे भूमितीच्या सिद्धांतांनी सिद्ध झाले आहे. म्हणून---

$$इ = \left(\tfrac{३}{२} ठ^{२} इ + \tfrac{२२५}{१६} ठ^{३} इ\right) \div \left(१ - ण^{२}\right)$$
$$१ - ण^{२} = \tfrac{३}{२} ठ^{२} + \tfrac{२२५}{१६} ठ^{३}$$
$$ण^{२} = १ - \tfrac{३}{२} ठ^{२} - \tfrac{२२५}{१६} ठ^{३}$$
$$ण = १ - \tfrac{३}{४} ठ^{२} - \tfrac{२२५}{३२} ठ^{३}$$

४२२. समीकरणाचें संकलन करण्याकरितां प्रत्येक पदाच्या गुणकाला एक उणा केंद्रगुणाचा वर्ग याने भागावें लागतें. त्याकरिता त्या भाजकाला गुणकाचें रूप देऊन गुणक तयार केले आहे. त्याला संकलन गुणक असें म्हटलें आहे. ३८७ व्या लेखांत असा गुणक तयार केला आहे. तसेंच ३९० व्या लेखांत गुणक भाजक तयार केले आहेत. ते गुणक आपण तयार करूं. सामान्यत्वें---

$$\frac{१}{१ - (कें. गु.)^{२}} = \left\{१ - (कें. गु.)^{२}\right\}^{-१}$$

ह्या पद्धतीनें गुणक तयार केले ते असें---

$$\left\{१ - (२ - २ ठ)^{२}\right\}^{-१} = \left\{- ३\left(१ - \tfrac{८}{३} ठ + \tfrac{४}{३} ठ^{२}\right)\right\}^{-१}$$
$$= - \tfrac{१}{३}\left(१ + \tfrac{८}{३} ठ - \tfrac{४}{३} ठ^{२} + \tfrac{६४}{९} ठ^{२}\right)$$
$$= - \tfrac{१}{३} - \tfrac{८}{९} ठ + \tfrac{५२}{२७} ठ^{२}$$

$$\left\{१ - (२ ए)^{२}\right\}^{-१} = \left\{१ - ४\left(१ + \tfrac{३}{२} ठ^{२}\right)\right\}^{-१}$$
$$= \left\{- ३\left(१ + २ ठ^{२}\right)\right\}^{-१}$$
$$= - \tfrac{१}{३}\left(१ - २ ट^{२}\right) = - \tfrac{१}{३} + \tfrac{२}{३} ठ^{२}$$

$$\left\{१ - (२ - २ ठ - ण)^{२}\right\}^{-१} = \left\{१ - (फ - ण)^{२}\right\}^{-१}$$
$$= \left\{१ - फ^{२} + २ फण - ण^{२}\right\}^{-१}$$

$$फ^{२} = ४ - ८ ठ + ४ ठ^{२}; \qquad ण^{२} = १ - \tfrac{३}{२} ठ^{२} - \tfrac{२२५}{१६} ठ^{३}$$

$$२\,फण = (४ - ४ठ)\left(१ - \frac{३}{४}ठ^{२} - \frac{२२५}{३२}ठ^{३}\right)$$

$$= ४ - ३ठ^{२} - \frac{२२५}{८}ठ^{३} - ४ठ + ३ठ^{३}$$

$$= ४ - ४ठ - ३ठ^{२} - \frac{२०१}{८}ठ^{३}$$

$$\left\{१ - फ^{२} + २\,फण - ण^{२}\right\}^{-१} = \left\{+४ठ - \frac{११}{२}ठ^{२} - \frac{१७७}{१६}ठ^{३}\right\}^{-१}$$

$$= \left\{+४ठ\left(१ - \frac{११}{८}ठ - \frac{१७७}{६४}ठ^{२}\right)\right\}^{-१}$$

$$= \frac{१}{४ठ}\left(१ - \frac{११}{८}ठ - \frac{१७७}{६४}ठ^{२}\right)^{-१}$$

$$= \frac{१}{४ठ}\left(१ + \frac{११}{८}ठ + \frac{१७७}{८}ठ^{२}\right)$$

$$= \frac{१}{४ठ} + \frac{११}{३२} + \frac{१७७}{२५६}ठ$$

ह्याप्रमाणें सर्व केंद्रांचें केंद्र गुणक घेऊन संकलन गुणक काढून ते सर्व खालीं एकत्र लिहिले आहेत:—

$(२ - २ठ)$ याचा सं. गुणक $- \frac{१}{३} - \frac{८}{९}ठ + \frac{५२}{२७}ठ^{२}$;

$२ए$ „ „ $- \frac{१}{३} + \frac{२}{३}ठ^{२}$;

$(२ - २ठ + ण)$ „ „ $- \frac{१}{८} - \frac{३}{१६}ठ$;

$(२ - २ठ - ण)$ „ „ $+ \frac{१}{४ठ} + \frac{११}{३२} + \frac{१७७}{२५६}ठ$;

$(२ - २ठ - २ण)$ „ „ $+ १ + ४ठ^{२}$;

$(२ - २ठ - २ए)$ „ „ $+ १ + ४ठ^{२}$;

$(२ - २ठ - ड)$ „ „ $- \frac{१}{३} - \frac{४}{३}ठ$;

$(२ - २ठ + ड)$ „ „ $- \frac{१}{३} - \frac{४}{९}ठ$;

$(२ - २ठ - ण + ड)$ „ „ $+ \frac{१}{२ठ} + \frac{५}{८}$;

$$\begin{aligned}
&(\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण} - \text{ड}) \quad ,, \quad ,, \; + \frac{\text{१}}{\text{६ठ}} + \frac{\text{७}}{\text{२४}}\,;\\
&\text{ड} \quad ,, \quad ,, \; + \text{१} + \text{ठ}^{\text{२}}\,;\\
&\text{१} - \text{ठ} \quad ,, \quad ,, \; + \frac{\text{१}}{\text{२ठ}} + \frac{\text{१}}{\text{४}}\,;\\
&\text{ण} - \text{ड} \quad ,, \quad ,, \; + \frac{\text{१}}{\text{२ठ}} - \frac{\text{१}}{\text{८}}\,;\\
&\text{ण} + \text{ड} \quad ,, \quad ,, \; - \frac{\text{१}}{\text{२ठ}} - \frac{\text{१}}{\text{८}}.
\end{aligned}$$

४२३. वरचें संकलन गुणक घेऊन चलत्रिज्येच्या समीकरणातील पदांना गुणिले म्हणजे व च्या किमतीची पदें येतात. हीं पदें तिसऱ्या पदवीपर्यंत घ्यावयाची आहेत. याकरितां संकलन गुणक एक किंवा दोन घ्यावे.

$$\text{व} = \text{अ}\left\{\begin{aligned}
&\text{१} - \tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ल}^{\text{२}} + \tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}} + \text{इ कोभु ण ब}\\
&+ (\text{ठ}^{\text{२}} + \tfrac{\text{१९}}{\text{६}}\,\text{ठ}^{\text{३}} - \tfrac{\text{३}}{\text{१६}}\,\text{ठ ल}^{\text{२}})\ \text{कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ})\ \text{ब}\\
&- \tfrac{\text{१}}{\text{४}}\,\text{ल}^{\text{२}}\ \text{कोभु२ए ब} - \tfrac{\text{५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} + \text{ण})\ \text{ब}\\
&+ (\tfrac{\text{१५}}{\text{८}}\,\text{ठ इ} + \tfrac{\text{२७३}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ})\ \text{कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण})\ \text{ब}\\
&+ \tfrac{\text{१५}}{\text{४}}\,\text{ठ इ}^{\text{२}}\ \text{कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{२ण})\ \text{ब} - \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\text{इं कोभु ड ब}\\
&+ \tfrac{\text{३}}{\text{१६}}\,\text{ठ ल}^{\text{२}}\ \text{कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{२ए})\ \text{ब}\\
&\qquad\qquad - \tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\ \text{इं कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} + \text{ड})\ \text{ब}\\
&+ \tfrac{\text{७}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\ \text{इं कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{ड})\ \text{ब}\\
&\qquad\qquad - \tfrac{\text{१५}}{\text{८}}\,\text{ठ इ इं कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण} + \text{ड})\ \text{ब}\\
&+ \tfrac{\text{९}}{\text{८}}\,\text{ठ इ इं कोभु}\ (\text{ण} - \text{ड})\ \text{ब}\\
&\qquad\qquad + \tfrac{\text{३५}}{\text{८}}\,\text{ठ इ इं कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण} - \text{ड})\ \text{ब}\\
&- \tfrac{\text{९}}{\text{८}}\,\text{ठ इ इं कोभु}\ (\text{ण} + \text{ड})\ \text{ब} - \tfrac{\text{१५}}{\text{१६}}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ कोभु}\ (\text{१} - \text{ठ})\ \text{ब}
\end{aligned}\right.$$

[व तिसरी पदवी]

वरच्या संकलनांत ० समीप केंद्र गुणाच्या पदापासून पांचव्या पदवीचीं पदें उत्पन्न होतात. ती खालीं लिहिलीं आहेत:—

$$\begin{aligned}
&- \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\,\text{ठ}^{\text{४}}\ \text{इं कोभु ड ब} + \text{१५}\,\text{ठ}^{\text{३}}\text{इ}^{\text{२}}\ \text{कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{२ण})\ \text{ब}\\
&+ \tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\text{ल}^{\text{२}}\ \text{कोभु}\ (\text{२} - \text{२ठ} - \text{२ए})\ \text{ब}.
\end{aligned}$$

४२४. चंद्राचे मध्यम भोग साधनाचें समीकरण म्हणजे कम चें समीकरण आतां आपणास सोडवावयाचें आहे. हें समीकरण सोडविण्याची योजना अगदी सुलभ आहे. प्रथम समीकरणातील पदें शोधून एकत्र करावयाची आहेत. नंतर त्यांचे संकलन करावयाचें असते. पदें शोधण्याचे कार्य, ४०५ व्या लेखांत जें $\frac{सूक}{सूब}$ याचें सामान्य स्वरूप दिले आहे त्यावरून सहज करितां येतें. सामान्य स्वरूपातील एक एक पद घेऊन त्याची व्यक्त पदात्मक किंमत तयार करावी, त्याप्रमाणें खालीं कृति केली आहे. ह्या समीकरणांतील पदें तिसऱ्या पदवीची सर्वच तयार करूं. तीं अशी--

$$- २ (व_{१}) = - २ \; इ \; कोभुण \; ब$$

$$+ ३ (व_{१})^{२} = + ३ \; इ^{२} \; कोभु^{२}ण \; ब = + \tfrac{३}{२} इ^{२} + \tfrac{३}{२} इ^{२} \; कोभु२णब$$

$$- २ (व_{२}) = + \tfrac{३}{२} ल^{२} + ठ^{२} + \tfrac{१}{२} ल^{२} \; कोभु२एब$$
$$- २ \; ठ^{२} \; कोभु \; (२ - २ ठ) \; ब$$
$$- \tfrac{१५}{४} ठइ \; कोभु \; (२ - २ठ - ण) \; ब$$

$$+ (सं_{२}) = - \tfrac{३}{४} ठ^{२} \; कोभु \; (२ - २ ठ) \; ब$$

तिसऱ्या पदवीचीं पदें--

$$+ ६ (व_{१}) (व_{२}) = + ६ \; इ \; कोभुण \; ब \times (व_{२})$$
$$= - ३ \; ठ^{२} इ \; कोभुण \; ब - \tfrac{९}{२} ल^{२}इ \; कोभुण \; ब$$
$$- \tfrac{३}{४} ल^{२}इ \; कोभु \; (२ ए - ण) \; ब$$
$$- \tfrac{३}{४} ल^{२}इ \; कोभु \; (२ ए + ण) \; ब$$
$$+ ३ \; ठ^{२}इ \; कोभु \; (२ - २ ठ - ण) \; ब$$
$$+ ३ \; ठ^{२}इ \; कोभु \; (२ - २ठ + ण) \; ब$$
$$+ \tfrac{४५}{८} ठइ^{२} \; कोभु \; (२ - २ठ - २ण) \; ब$$
$$+ \tfrac{४५}{८} ठइ^{२} \; कोभु \; (२ - २ठ) \; ब$$

$$- ४ (व_{१})^{३} = - ४ \; इ^{३}कोभु^{३}णब = - ३ \; इ^{३}कोभुण \; ब - इ^{३}कोभु३ण \; ब$$

$$- २ (व_{१}) (सं_{२}) = (- २ \; इ \; कोभुण \; ब)$$
$$\times \left\{ - \tfrac{३}{४} ठ^{२}कोभु \; (२ - २ठ) \; ब \right\}$$
$$= + \tfrac{३}{४} ठ^{२}इ \; कोभु (२ - २ठ - ण) \; ब$$
$$+ \tfrac{३}{४} ठ^{२}इ \; कोभु \; (२ - २ठ + ण) \; ब$$

$- २ (व_{३}) =$ ४१६ व्या लेखांतील व च्या किंमतीतील तिसऱ्या पदवीच्या सर्व पदास २ नीं गुणून आलेली पदें ऋण घेणें.

$+ (सं_{३}) =$ ४१० व्या लेखांतील तिसऱ्या पदवीची सर्व पदें.

४२५. वरच्या लेखांत दाखविल्याप्रमाणें आलेली सर्व पदें खाली एकत्र केली आहेत:—

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \frac{१}{\text{जअ}^२}\left\{\begin{array}{l} १ + \frac{३}{२}\text{इ}^२ + \frac{३}{२}\text{ल}^२ + \text{ठ}^२ \\ - \left(२\text{इ} + ३\text{ठ}^२\text{इ} + \frac{३}{४}\text{ल}^२\text{इ} + ३\text{इ}^३\right) \text{कोभु णब} \\ + \frac{३}{२}\text{इ}^२ \text{ कोभु २णब} + \frac{१}{२}\text{ल}^२ \text{ कोभु २एब} \\ - \left(\frac{१५}{४}\text{ठ}^२ + \frac{६९३}{३२}\text{ठ}^३ - \frac{३}{८}\text{ठल}^२ - \frac{४५}{८}\text{ठइ}^२\right) \\ \hfill \text{कोभु } (२ - २\text{ठ})\text{ब} \\ - \left(\frac{१५}{४}\text{ठइ} + \frac{१६५}{१६}\text{ठ}^२\text{इ}\right) \text{ कोभु } (२ - २\text{ठ} - \text{ण})\text{ब} \\ + ३\text{ठ}^२\text{इ}' \text{ कोभु डब} + ६\text{ठ}^२\text{इ} \text{ कोभु}(२ - २\text{ठ} + \text{ण})\text{ब} \\ - \frac{७७}{८}\text{ठ}^२\text{इ}' \text{ कोभु } (२ - २\text{ठ} - \text{ड})\text{ब} \\ \hfill + \frac{११}{८}\text{ठ}^२\text{इ}' \text{ कोभु } (२ - २\text{ठ} + \text{ड})\text{ब} \\ - \frac{३५}{४}\text{ठइइ}' \text{ कोभु } (२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड})\text{ब} \\ \hfill - \frac{५}{४}\text{ठइइ}' \text{ कोभु } (\text{ण} - \text{ड})\text{ब} \\ + \frac{१५}{४}\text{ठइइ}' \text{ कोभु } (२ - २\text{ठ} - \text{ण} + \text{ड})\text{ब} \\ \hfill + \frac{५}{४}\text{ठइइ}' \text{ कोभु } (\text{ण} + \text{ड})\text{ब} \\ - \frac{३}{४}\text{ल}^२\text{इ} \text{ कोभु } (२\text{ए} - \text{ण})\text{ब} \\ \hfill - \frac{३}{४}\text{ल}^२\text{इ} \text{ कोभु } (२\text{ए} + \text{ण})\text{ब} \\ + \frac{१५}{८}\frac{\text{अ}'}{\text{अ}} \text{ ठकोभु } (१ - \text{ठ})\text{ब} - \text{इ}^३ \text{ कोभु ३णब} \end{array}\right.$$

ह्या समीकरणात $\frac{१}{\text{जअ}^२}\left(१ + \frac{३}{२}\text{इ}^२ + \frac{३}{२}\text{ल}^२ + \text{ठ}^२\right)$ ही स्थीर संख्या आहे. आणि इतर प्रत्येक पदाला $\frac{१}{\text{जअ}^२}$ हा गुणक आहे. तेव्हां ह्या पदाचें स्पष्टीकरण झालें पाहिजें. लेख ३०७ वरून आपणाला कळतें कीं,

$$\text{चंद्राची भोग मध्यम गति म} = \sqrt{\frac{\text{प}}{\text{बृ}^३}} = \sqrt{\frac{\text{अज}^२}{\text{बृ}^३}}$$

$$= \sqrt{\left\{\text{अज}^२ \times \text{अ}^३ \left(१ - \text{इ}^२\right)^३\right\}}$$

$$= \sqrt{\text{ज}^२\text{अ}^४\left(१ - ३\text{इ}^२\right)}$$

$$= \text{अज}^२\left(१ - \frac{३}{२}\text{इ}^२\right)$$

ह्यावरून $\frac{१}{\text{जअ}^२} = \frac{१}{\text{म}}\left(१ - \frac{३}{२}\text{इ}^२\right)$ .. .. .. (१)

किंवा $\frac{१}{\text{म}} = \frac{१}{\text{जअ}^२}\left(१ + \frac{३}{२}\text{इ}^२\right)$ .. .. .. (२)

पण, आपण जें गणित करित आहोत त्यांत जी चंद्राची कक्षा आहे, त्या कक्षेचें स्वरूप पूर्ण दिर्घवर्तुळात्मक नाहीं. सूर्याच्या आकर्षणानें आणि क्रांतिवृत्ताच्या भिन्नत्त्वामुळें चंद्रकक्षेच्या स्वरूपांत प्रतिक्षणीं बदल होत असतो. यामुळें प्रदक्षिणा कालांत आणि तदनुसारी मध्यम गतींत भिन्नत्त्व येतें. आणि हें भिन्नत्त्व न्यूनाधिक्य पावत असते म्हणून एथें म ह्या चंद्राच्या मध्यम गतीचे स्वरूप.

$$म = जअ^{२} \left(१ - \tfrac{३}{२} इ^{२} - \tfrac{३}{२} ल^{२} - ठ^{२}\right) \;\ldots\ldots\; (३)$$

असें आहे.

दुसरें सूक्ष्मांश गणिताच्या विचारानें पाहिलें असतां

$$\frac{१}{जअ^{२}} \left(१ + \tfrac{३}{२} इ^{२} + \tfrac{३}{२} ल^{२} + ठ^{२}\right)$$

ही स्थीर संख्या आहे, आणि हिला चल गुणक असा नाहीं, म्हणून ह्या संख्येबरोबरच चंद्र मध्यम गति असली पाहिजे. सूर्याचें आकर्षण ० असतें तर $ठ = ०$ असतें, तसेच क्रांतिवृत्त आणि चंद्रकक्षा ही दोन्ही एकाच पातळीत असली तर $ल = ०$ ही स्थीर संख्या वरच्या समीकरण (२) प्रमाणेंच असती, म्हणून समीकरण (३) बरोबर आहे.

म्हणून,—

$$\frac{१}{जअ^{२}} \left(१ + \tfrac{३}{२} इ^{२} + \tfrac{३}{२} ल^{२} + ठ^{२}\right) = \frac{१}{म}$$

$$\frac{१}{जअ^{२}} = \frac{१}{म} \left(१ - \tfrac{३}{२} इ^{२} - \tfrac{३}{२} ल^{२} - ठ^{२}\right)$$

४२६. ह्यावरून वरच्या सूक्ष्मांश समीकरणाला जो $\frac{१}{जअ^{२}}$ हा गुणक आहे त्या स्थानीं त्याच्या बरोबरीचा $\frac{१}{म} \left(१ - \tfrac{३}{२} इ^{२} - \tfrac{३}{२} ल^{२} - ठ^{२}\right)$ हा गुणक ठेऊ. असा गुणक ठेविल्यानें समीकरणांतील प्रत्येक पदाला $\left(१ - \tfrac{३}{२} इ^{२} - \tfrac{३}{२} ल^{२} - ठ^{२}\right)$ ह्या चार संख्यांपैकीं प्रत्येकीनें सर्व समीकरणांतील प्रत्येक पदाला गुणिलें पाहिजे. पण आपणाला गुणाकार तिसऱ्याच पदवीपर्यंत पाहिजे आहे, चवथ्या पदवीचा नको, यास्तव समीकरणांतील $१ - २$ इ कोभुणब यासच त्या गुणकानें गुणावे लागतें, तो गुणाकार असा—

$$\left(१ - \tfrac{३}{२} इ^{२} - \tfrac{३}{२} ल^{२} - ठ^{२}\right)\left(१ - २\, इ\, कोभुणब\right)$$
$$= १ - \tfrac{३}{२} इ^{२} - \tfrac{३}{२} ल^{२} - ठ^{२} - २\, इ\, कोभुणब + ३\, इ^{३}\, कोभुणब$$
$$+ ३\, ल^{२}\, इ\, कोभुणब + २\, ठ^{२}\, इ\, कोभुणब \;\ldots\ldots\ldots\; (४)$$

गुणकांतील चार पदांपैकीं पहिलें पद १ ही आहे हिनें गुणणें म्हणजे गुणाकार ते समीकरणच होय. तथापि, १—२ इ कोभुणब याचे जागीं वरचा गुणाकार घेणें. म्हणजे पद समूह (४) हा घेणें. ह्याप्रमाणें गुणाकार करून सर्व समीकरण पुन्हा लिहिलें. तें असें—

$$\frac{\text{सूक}}{\text{सूब}} = \frac{१}{\text{म}} \left\{ \begin{array}{l} १ - २\,\text{इ कोभुणब} + \frac{३}{२}\text{इ}^{२}\text{कोभु२णब} + \frac{१}{२}\text{ल}^{२}\text{कोभु२एब} \\ - \frac{११}{४}\text{ठ}^{२}\text{कोभु}\,(२ - २\text{ठ})\,\text{ब} \\ \qquad\qquad - \frac{१५}{४}\text{ठइ कोभु}\,(२ - २\text{ठ} - \text{ण})\,\text{ब} \\ - (\frac{३}{२}\text{ल}^{२}\text{इ} + \text{ठ}^{२}\text{इ})\,\text{कोभुणब} \\ \qquad\qquad - \frac{१६५}{३६}\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}\,(२ - २\text{ठ} - \text{ण})\,\text{ब} \\ - (\frac{६५}{३२}\text{ठ}^{३} - \frac{३}{८}\text{ठल}^{२} - \frac{४५}{८}\text{ठइ}^{२})\,\text{कोभु}\,(२ - २\text{ठ})\,\text{ब} \\ + ३\text{ठ}^{२}\text{इं कोभुडब} + ६\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}\,(२ - २\text{ठ} + \text{ण})\,\text{ब} \\ - \frac{७७}{८}\text{ठ}^{२}\text{इं कोभु}\,(२ - २\text{ठ} - \text{ड})\,\text{ब} \\ \qquad\qquad + \frac{११}{८}\text{ठ}^{२}\text{इं कोभु}\,(२ - २\text{ठ} + \text{ड})\,\text{ब} \\ - \frac{३५}{४}\text{ठइइं कोभु}\,(२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड})\,\text{ब} \\ \qquad\qquad - \frac{९}{४}\text{ठइइं कोभु}\,(\text{ण} - \text{ड})\,\text{ब} \\ + \frac{१५}{४}\text{ठइइं कोभु}\,(२ - २\text{ठ} - \text{ण} + \text{ड})\,\text{ब} \\ \qquad\qquad - \frac{९}{४}\text{ठइइं कोभु}\,(\text{ण} + \text{ड})\,\text{ब} \\ - \frac{३}{४}\text{ल}^{२}\text{इ कोभु}(२\text{ए} - \text{ण})\,\text{ब} - \frac{३}{४}\text{ल}^{२}\text{इ कोभु}(२\text{ए} + \text{ण})\,\text{ब} \\ + \frac{१५}{८}\frac{\text{अ}}{\text{अं}}\,\text{ठ कोभु}(१ - \text{ठ})\,\text{ब} - \text{इ}^{३}\,\text{कोभु३णब} \end{array} \right.$$

४२७. ह्या वरच्या समीकरणाचें संकलन करावयाचें आहे. ह्या संकलनांत चवथ्या पदवीपर्यंत निघणारी सर्व पदें पाहिजे आहेत. त्याकरितां संकलन गुणक तयार केलें पाहिजेत. त्यापैकीं कांहीं गुणक लेख ४०७ मध्यें केलें आहेत. त्यांचा एथें उपयोग करण्यास प्रतिबंध कांहीं नाहीं. कोभुजज्येचें संकलन भुजज्येनें होते व संकलनाचें चिन्ह संकलनीय पदाचें चिन्हाप्रमाणें संकलन गुणाकाराच्या चिन्हानुरूप होते. कांहीं संकलन गुणक ४१० व्या लेखांत नाहींत ते येथें करितों.

$$(\text{ण})^{-१} = (१ - \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२} - \tfrac{२२५}{३२}\text{ठ}^{३})^{-१} \qquad = १ + \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२} + \tfrac{२२५}{३२}\text{ठ}^{३}$$

$$(२\text{ण})^{-१} = \tfrac{१}{२}(१ - \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२})^{-१} \qquad = \tfrac{१}{२}(१ + \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}) = \tfrac{१}{२} + \tfrac{३}{८}\text{ठ}^{२}$$

$$(२\text{ए})^{-१} = \tfrac{१}{२}(१ + \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२})^{-१} \qquad = \tfrac{१}{२} - \tfrac{३}{८}\text{ठ}^{२}$$

$$(\text{ण} - \text{ड})^{-१} = (१ - \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२} - \text{ठ})^{-१} \qquad = १ + \text{ठ}$$

$$\begin{aligned}
(\text{ण}+\text{ड})^{-१} &= (१-\tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}+\text{ठ})^{-१} &&= १-\text{ठ} \\
(\text{२ए}-\text{ण})^{-१} &= (२+\tfrac{३}{२}\text{ठ}^{२}-१+\tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२})^{-१} &&= १+\tfrac{९}{४}\text{ठ}^{२} \\
(\text{२ए}+\text{ण})^{-१} &= (२+\tfrac{३}{२}\text{ठ}^{२}+१-\tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२})^{-१} &&= \tfrac{१}{३}+\tfrac{१}{१२}\text{ठ}^{२} \\
(१-\text{ठ})^{-१} & &&= १+\text{ठ}
\end{aligned}$$

प्रत्येक पदाचें संकलन करून तीं पदें खालीं लिहिली आहेत. १ याचे संकलन ब

$$\text{कम} = \left\{\begin{array}{l}
\text{ब} - \text{२इभुणब} + \tfrac{३}{४}\text{इ}^{२}\text{भु२णब} + \tfrac{१}{४}\text{ल}^{२}\text{भु२एब} \\
- \tfrac{११}{८}\text{ठ}^{२}\text{भु}(२-\text{२ठ})\text{ब} - \tfrac{१५}{४}\text{ठइ भु}(२-\text{२ठ}-\text{ण})\text{ब} \\
+ \text{३ठइं भुडब} - (\tfrac{३}{२}\text{ल}^{२}\text{इ} + \tfrac{५}{२}\text{ठ}^{२}\text{इ})\text{ भुणब} \\
- (\tfrac{५१}{३२}\text{ठ}^{३} - \tfrac{३}{१६}\text{ठल}^{२} - \tfrac{४५}{१६}\text{ठइ}^{२})\text{ भु}(२-\text{२ठ})\text{ब} \\
- \tfrac{१}{३}\text{इ}^{३}\text{भु३णब} - \tfrac{२८५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इ भु}(२-\text{२ठ}-\text{ण})\text{ब} \\
+ \text{२ठ}^{२}\text{इभु}(२-\text{२ठ}+\text{ण})\text{ब} + \tfrac{१५}{८}\dfrac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ठ भु}(१-\text{ठ})\text{ब} \\
- \tfrac{७७}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इं भु}(२-\text{२ठ}-\text{ड})\text{ब} \\
\qquad\qquad + \tfrac{११}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इं भु}(२-\text{२ठ}+\text{ड})\text{ब} \\
- \tfrac{३५}{४}\text{ठइइं भु}(२-\text{२ठ}-\text{ण}-\text{ड})\text{ब} \\
\qquad\qquad + \tfrac{१५}{४}\text{ठइइं भु}(२-\text{२ठ}-\text{ण}+\text{ड})\text{ब} \\
- \tfrac{१}{४}\text{ठइइं भु}(\text{ण}-\text{ड})\text{ब} \quad + \tfrac{१}{४}\text{ठइइं भु}(\text{ण}+\text{ड})\text{ब} \\
- \tfrac{३}{४}\text{ल}^{२}\text{इ भु}(\text{२ए}-\text{ण})\text{ब} \quad - \tfrac{१}{४}\text{ल}^{२}\text{इ भु}(\text{२ए}+\text{ण})\text{ब}
\end{array}\right.$$

[दुसरी आणि तिसरी पदवी]

[तिसऱ्या पदवीची कांहीं पदें कमी आहेत. तीं ४५९ ह्या लेखात दिली आहेत.]

प्रकरण पंधरावें

सूक्ष्मतेची चवथी पदवी

(श) ची किंमत

४२८. चंद्रकक्षेची सूक्ष्मांश समीकरणें आता आपणास चवथ्या पदवीनें सोडवावयाची आहेत. सूक्ष्मतेची मर्यादा ह्या ग्रंथात चवथ्या पदवीपर्यंत न्यावयाची अशा संकेतानेच आरंभापासून प्रतिपादनाची आखणी केलेली आहे. पाश्चात्य गणितकारांच्या दृष्टीने ही सूक्ष्मता कमीच म्हणता येईल पण भारतीय गणितकारांच्या दृष्टीनें ही सूक्ष्मता फारच फार आहे.

४२९. शराचें समीकरण चवथ्या पदवीपर्यंत सोडविले आहे पण त्यांत थोडें न्यूनत्व राहिले आहे. तें आतां घालवून समीकरण पूर्ण करू. तें न्यूनत्व हें आहे कीं, शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांत पांचव्या पदवीची १ ह्या संख्ये समीप केंद्रगुणाची पदें घेतलीं नाहींत. कारण ($श_१$) ची किंमत व्यक्त झाली नव्हती तशींच आणखीं कांहीं कारणें होती. ही पांचव्या पदवीची पदें आपणाला शोधावयाची आहेत. प्रथम $\frac{प्रश - ष}{ज^२ व^३}$ ह्या पदातील इष्टपदें शोधू. लेख ३७४ पहा त्यांत पदाची किंमत तीन पदांनी दाखविली आहे. ती पदें क्रमवार

$$(१) \quad - \tfrac{३}{२} श \frac{सवं^३}{ज^२ व^४} = - \tfrac{१}{२} \frac{सवं^३}{ज^२ व^३} \times ३ \times \frac{श}{व}.$$

$$\frac{श}{व} = श \times व^{-१} = श\, अ \left\{ १ + इकोभुणब - \tfrac{१}{२} ठ^२ - \tfrac{३}{४} ल^२ + \ldots + \ldots\ldots \right\}^{-१}$$

$$\frac{१}{व} = \frac{१}{अ} \left\{ \begin{array}{l} १ - इकोभुणब + \tfrac{१}{२} ट^२ + \tfrac{३}{४} ल^२ - ठ^२ कोभु (२ - २ठ) ब \\ + \tfrac{१}{२} इ^२ + \tfrac{१}{२} इ^२ कोभु २णब + \tfrac{१}{४} ल^२ कोभु २एब \\ - \tfrac{१५}{८} ठइ कोभु (२ - २ठ - ण) ब \qquad \ldots\ldots\ldots (अ) \end{array} \right.$$

$$श = \left\{ \begin{array}{l} + लभुएब + (\tfrac{३}{८} ठल + \tfrac{३}{३२} ठ^२ ल) भु (२ - २ठ - ए) ब \\ + \tfrac{७}{८} ठलइभु (२ - २ठ - ए - ड) ब - \tfrac{१}{८} ठलइभु (ए - ड) ब \\ - \tfrac{३}{८} ठलइभु (२ - २ठ - ए + ड) ब + \tfrac{१}{८} ठलइभु (ए + ड) ब \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots (ब) \end{array} \right.$$

(अ) आणि (ब) यांचा गुणाकार तिसऱ्या पदवीपर्यंत केला. तेव्हां

$$
\frac{श}{व}अ = \left\{ \begin{array}{l}
लभुएब + \frac{३}{८} ठल\, भु(२ - २ठ - ए)\, ब - \frac{१}{२} इल\, भु(ए - ण)\, ब \\
\qquad\qquad - \frac{१}{२} इल\, भु(ए + ण) ब \\
+ \frac{१}{८} ल^{३} भु ३एब + (\frac{१}{२} ठ^{२}ल + \frac{१}{२} इ^{२}ल + \frac{५}{८} ल^{३})\, भुएब \\
+ \frac{७}{८} ठलइं\, भु(२ - २ठ - ए - ड)\, ब - \frac{९}{८} ठलइं भु\, (ए - ड)\, ब \\
- \frac{३}{८} ठलइं\, भु(२ - २ठ - ए + ड)\, ब + \frac{९}{८} ठलइं\, भु(ए + ड)\, ब \\
+ \frac{३}{४} ठलइ\, भु(२ - २ठ - ए - ण)\, ब \\
\qquad\qquad - \frac{१५}{१६} ठलइंभु\, (२ - २ठ + ए - ण)\, ब \\
+ \frac{१९}{३२} ठ^{२}ल\, भु(२ - २ठ - ए)\, ब - \frac{१}{४} इ^{२}ल\, भु(२ण - ए)\, ब \\
\qquad\qquad + \frac{१}{४} इ^{२}ल\, भु(२ण + ए)\, ब \\
- \frac{३}{१६} ठलइ\, भु(२ - २ठ - ए + ण)\, ब \\
\qquad\qquad - \frac{१}{२} ठ^{२}लभु(२ - २ठ + ए)\, ब.
\end{array} \right.
$$

४३०. ह्यावर काढिलेल्या पदसंघाने, प्र(२) व प्र(३) ह्या दोन पदसंघास गुणावयाचे आहे. हे पदसंघ लेख ४०६ व ४०७ ह्यांमध्ये आहेत. ह्यांपैकीं प्र(२) पासून जो गुणाकार येईल त्याला ३ नीं गुणावयाचे आहे. ह्या गुणाकारांत पांचव्या पदवीची मात्र पदें घ्यावयाची आहे, आणि तीं अशी पाहिजेत कीं, ज्यांचा केंद्रगुणक १ ह्या संख्येसमीप आहे. ह्याप्रमाणे गुणाकार करून निघालेलीं पदें एकत्र लिहिली आहेत.

$$
\frac{प्रश - प}{ज^{२}व^{१}} = \left\{ \begin{array}{l}
+ (\frac{९}{१२८} ठ^{४}ल - ३ ठ^{२}इ^{२}ल - \frac{१५}{४} ठ^{२}ल^{३} \\
\qquad\qquad - \frac{९}{४} ठ^{२}इं^{२}ल)\, भुएब \\
- (\frac{१०५}{६४} ठ^{४}ल - \frac{१५}{१६} ठ^{२}इ^{२}ल - \frac{३९}{१६} ठ^{२}ल^{३} \\
\qquad\qquad - \frac{१५}{८} ठ^{२}इं^{२}ल)\, भु(२ - २ठ - ए)\, ब \\
- \frac{२१}{१६} ठ^{३}लइं\, भु(२ - २ठ - ए - ड)\, ब \\
\qquad\qquad + \frac{१५३}{६४} ठ^{३}लइं\, भु(ए - ड)\, ब \\
- \frac{९}{८} ठ^{३}लइं\, भु(२ - २ठ - ए + ड)\, ब \\
\qquad\qquad - \frac{७५}{६४} ठ^{३}लइं\, भु(ए + ड)\, ब \\
- \frac{१५}{८} ठ^{२}इ^{२}ल\, भु(२ - २ठ - २ण + ए)\, ब \\
\qquad\qquad + \frac{१५}{४} ठ^{२}इ^{२}ल\, भु(२ण - ए)\, ब \\
+ \frac{१५}{८} ठ^{२}इ^{२}ल\, भु(२ - २ठ - २ण - ए)\, ब \\
\qquad\qquad + \frac{३}{३२} ठ^{२}इ^{३}\, भु(२ - २ठ - ३ए)\, ब \\
+ \frac{५१}{८} ठ^{२}इं^{२}ल\, भु(२ - २ठ - ए - २ड)\, ब \\
\qquad - \frac{२७}{८} ठ^{२}इं^{२}ल\, भु(ए - २ड)\, ब \qquad ......(१)
\end{array} \right.
$$

४३१. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांत जें दुसरें पद आहे त्याला $\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{श}}{\text{ब}}\,\frac{\text{सूब}}{\text{सूब}}$ हा गुणक आहे ह्या गुणकाची किंमत प्रथम तयार करूं.

ह्या गुणकातील पदें तिसऱ्या पदवीपर्यंत पाहिजे आहेत. शून्यलब्धिगुण करितांना ण आणि ए यांच्या किंमती अनुक्रमे $\text{१} - \frac{३}{४}\text{ठ}^{२}$ आणि $\text{१} + \frac{३}{४}\text{ठ}^{२}$ ह्या घेतल्या पाहिजेत. प्रथम श चा सूक्ष्मांश गुण काढिला तो खालीं दिल्याप्रमाणें आला

$$\text{श} = \text{लभुएब}\ ; \qquad \frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} = \text{ल}(\text{१} + \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२})\,\text{कोभुएब}$$

$$\text{श} = \tfrac{३}{८}\,\text{ठल भु}(\text{२}-\text{२ट}-\text{ए})\text{ब};$$

$$\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} = \tfrac{३}{८}\text{ठल}\,(\text{१}-\text{२ठ})\ \text{कोभु}\ (\text{२}-\text{२ट}-\text{ए})\,\text{ब}$$

ह्याप्रमाणें प्रत्येक पदाचा सूक्ष्मांश गुण काढून खालीं एकत्र दिला आहे

$$\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} = \begin{cases} \text{ल कोभुए ब} + \tfrac{३}{८}\,\text{ठल कोभु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{ब} \\ + \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}\text{ल कोभुएब} - \tfrac{२१}{३२}\text{ठ}^{२}\text{ल कोभु}\ (\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{ब} \\ - \tfrac{३}{८}\text{ठलइ कोभु}\ (\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}+\text{ड})\text{ब} \\ \quad + \tfrac{९}{८}\text{ठलइ कोभु}(\text{ए}+\text{ड})\,\text{ब} \\ + \tfrac{७}{८}\,\text{ठलइ कोभु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}-\text{ड})\ \text{ब} \\ \quad - \tfrac{९}{८}\,\text{ठलइकोभु}(\text{ए}-\text{ड})\,\text{ब} \end{cases}$$

ह्या पद संघाला $-\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}$ ह्यानें गुणून आलेला गुणाकार खालीं लिहिला आहे.

$$-\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}\,\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} = \begin{cases} - \tfrac{६३}{५१२}\text{ठ}^{४}\text{लभुएब} + \tfrac{३}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३}\text{भु}\ (\text{२}-\text{२ठ}-\text{३ए})\text{ब} \\ + (\tfrac{३३}{६४}\text{ठ}^{४}\text{ल} + \tfrac{२१}{८}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{३} + \tfrac{३}{२}\text{ठ}^{२}\text{लइ}^{२} - \tfrac{१५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{ल}) \\ \qquad\qquad \text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{ब} \\ + \tfrac{२७}{३२}\text{ठ}^{३}\text{लइ भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}-\text{ड})\text{ब} \\ \qquad\qquad + \tfrac{४५}{६४}\text{ठ}^{३}\text{लइभु}(\text{ए}-\text{ड})\text{ब} \\ - \tfrac{२७}{३२}\text{ठ}^{३}\text{लइभु}\ (\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}+\text{ड})\text{ब} \\ \qquad\qquad + \tfrac{३३}{६४}\text{ठ}^{३}\text{लइभु}(\text{ए}+\text{ड})\,\text{ब} \\ + \tfrac{१५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{ल भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण}-\text{ए})\text{ब} \\ \qquad\qquad + \tfrac{१५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{लभु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण}+\text{ए})\text{ब} \\ + \tfrac{५१}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{ल भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}-\text{२ड})\text{ब} \end{cases}$$

४३२. व चा सूक्ष्मांश गुण दुसऱ्या पदवीपर्यंत तयार केला, तो असा

$$\text{व} = १ + \text{इकोभुणब} + \text{ठ}^{२}\text{कोभु}(२ - २\text{ठ})\text{ब}$$
$$- \frac{१}{४}\text{ल}^{२}\text{कोभ२एव} + \frac{१५}{८}\text{ठइ कोभु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण})\text{ब}$$

$$\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} = - \text{इभुणब} - २\text{ठ}^{२}\text{भु}(२ - २\text{ठ}) + \frac{१}{२}\text{ल}^{२}\text{भु}(२\text{एब})$$
$$- \frac{१५}{८}\text{ठइ भु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण})\text{ब}$$

ह्यानें $\frac{\text{श}}{\text{व}}$ ह्या ४२९ व्या लेखांतील पदसंघास गुणून त्या गुणाकारास $\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}$ या पदानें गुणिलें तेव्हां गुणाकार खालीं लिहिल्याप्रमाणें आला

$$\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}\,\frac{\text{श}}{\text{व}}\,\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}} = \begin{cases} + \frac{३}{२}\text{ठ}^{४}\text{ल भुएब} \quad - \frac{३}{१६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{३}\text{भु}(२ - २\text{ठ} - \text{ए})\text{ब} \\ + \frac{३}{१६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{३}\text{भु}(२ - २\text{ठ} - ३\text{ए})\text{ब} \\ \qquad + \frac{१५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{ल भु}(२ - २\text{ठ} - २\text{ण} - \text{ए})\text{ब} \\ - \frac{१५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{ल भु}(२ - २\text{ठ} - २\text{ण} + \text{ए})\text{ब} \end{cases}$$

तेव्हां

$$\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}}\left(\frac{\text{सूश}}{\text{सूब}} - \frac{\text{श}}{\text{व}}\,\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}\right) =$$

$$\begin{cases} + \frac{१२९}{३२८}\text{ठ}^{४}\text{ल भुए ब} \qquad + \frac{९}{१६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{३}\text{भु}(२ - २\text{ठ} - ३\text{ए})\text{ब} \\ + \left(\frac{३३}{१६}\text{ठ}^{४}\text{इ} + \frac{३९}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३} + \frac{३}{२}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{ल} - \frac{१५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ}'^{२}\text{ल}\right) \\ \qquad\qquad \text{भु}(२ - २\text{ठ} - \text{ए})\text{ब} \\ + \frac{२७}{३२}\text{ठ}^{३}\text{लइ}' \text{भु}(२ - २\text{ठ} - \text{ए} - \text{ड})\text{ब} \\ \qquad - \frac{२७}{३२}\text{ठ}^{३}\text{लइ}' \text{भु}(२ - २\text{ठ} - \text{ए} + \text{ड})\text{ब} \\ + \frac{४५}{६४}\text{ठ}^{२}\text{लइ}' \text{भु}(\text{ए} - \text{ड})\text{ब} \\ \qquad + \frac{१५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इभु}(२ - २\text{ठ} - २\text{ण} + \text{ए})\text{ब} \\ + \frac{३३}{६४}\text{ठ}^{३}\text{लइ}' \text{भु}(\text{ए} + \text{ड})\text{ब} \\ \qquad + \frac{४५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इंभु}(२ - २\text{ठ} - २\text{ण} - \text{ए})\text{ब} \\ + \frac{५१}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ}'^{२}\text{ल}^{२}\text{भु}(२ - २\text{ठ} - \text{ए} - २\text{ड})\text{ब} \quad \ldots\ldots(२) \end{cases}$$

४३३. शराच्या सूक्ष्मांश समीकरणांतील तिसरें पद आणि तेंच शेवटचें खालीं दिल्याप्रमाणें आहे. ह्या पदांच्या किंमती तयार केलेल्या आहेत त्या घेऊन त्यापासून निघणारी पदें काढितो

$$- २\,\text{उँ}\left(\frac{\text{त}}{\text{थ ज}^{२}\text{ व}^{२}}\right)\text{सू ब} \times \left\{\frac{\text{सू}^{२}\text{श}}{\text{सू ब}^{२}} + \text{श}\right\}$$

$$= \text{२} \times \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{कोभु}\,(\text{२}-\text{२ठ})\text{ब} \times \Big\{-\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल भु एब} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{ब}\Big\}$$

$$= -\tfrac{\text{९}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{४}}\text{ल भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{ब} + \tfrac{\text{९}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{४}}\text{ल भुएब} \quad .. \quad (\text{३})$$

सूक्ष्मांश समीकरणांत विकारी पदाशिवाय इतर संख्या स्थीर असाव्या लागतात. चल असल्यास त्यांचें चलन विकारी पदानें दाखवावें लागतें. चंद्राचें केंद्र संन्निध्यान आणि राहु यांच्या गति मागे दाखविल्या त्या मध्यमचंद्राच्या गतीनें दाखविल्या आहेत. पण समीकरणांत विकारी पद स्पष्टचंद्र आहे. त्या स्पष्टचंद्रानें दाखवूं गेल्यास अत्यंत सूक्ष्म पदें उत्पन्न होतात. म्हणून तशीं पदें शोधिलीं नाहींत. त्याप्रमाणें व आणि कम च्या समीकरणांत हीं असलीं पदें शोधिली नाहीं तरी सूक्ष्मतेला बाध येत नाहीं.

४३४. चंद्राच्या शराचें सूक्ष्मांश समीकरण पांचव्या पदवीपर्यंत सर्व तयार झालें आहे. त्याचे दोन भाग पाडिले आहेत. चवथ्या पदवीपर्यंत असा पहिला भाग तो ४१४ लेखांत दिला आहे. पांचव्या पदवीच्या भागाचे तीन पदसंघ ४३०, ४३२ व ४३३ ह्या लेखांत दिले आहेत. ते सर्व समीकरण एकत्र खालीं लिहिलें आहे

$$\left\{\frac{\text{सू}^{\text{२}}\text{श}}{\text{सूब}^{\text{२}}} + \text{श}\right\} =$$

$$\Big(-\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल} + \tfrac{\text{९}}{\text{३२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल} + \tfrac{\text{२१३}}{\text{६४}}\text{ठ}^{\text{४}}\text{ल} - \text{३ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}}\text{ल} - \tfrac{\text{१५}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{३}} - \tfrac{\text{९}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इं}^{\text{२}}\text{ल}\Big)\text{भु एब}$$

$$\Big(+\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल} - \tfrac{\text{९}}{\text{३२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल} - \tfrac{\text{११७}}{\text{६४}}\text{ठ}^{\text{४}}\text{ल} + \tfrac{\text{३९}}{\text{१६}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}}\text{ल} + \tfrac{\text{३९}}{\text{१६}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{३}}\Big)\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए})\text{ब}$$

$$\Big(+\tfrac{\text{२१}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइं} - \tfrac{\text{१५}}{\text{३२}}\text{ठ}^{\text{३}}\text{लइं}\Big)\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}-\text{ड})\text{ब} + \Big(-\tfrac{\text{९}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइं} + \tfrac{\text{९९}}{\text{३२}}\text{ठ}^{\text{३}}\text{लइं}\Big)\text{भु}(\text{ए}-\text{ड})\text{ब}$$

$$\Big(-\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइं} - \tfrac{\text{६३}}{\text{३२}}\text{ठ}^{\text{३}}\text{लइं}\Big)\text{भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}+\text{ड})\text{ब} + \Big(-\tfrac{\text{९}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइं} - \tfrac{\text{२१}}{\text{३२}}\text{ठ}^{\text{३}}\text{लइं}\Big)\text{भु}(\text{ए}+\text{ड})\text{ब}$$

$$-\tfrac{\text{२७}}{\text{८}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइभु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}-\text{ण})\text{ब} - \tfrac{\text{२१}}{\text{८}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइ भु}(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ए}+\text{ण})\text{ब}$$

$$+\tfrac{\text{३}}{\text{८}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइ भु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ए}-\text{ण})\text{ब} - \tfrac{\text{३}}{\text{८}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{लइ भु}(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ए}+\text{ण})\text{ब}$$

$$+\text{३ठ}^{\text{२}}\text{लइ भु}(\text{ए}-\text{ण})\text{ब} + \text{३ठ}^{\text{२}}\text{लइ भु}(\text{ए}+\text{ण})\text{ब}$$

$$+ \frac{५१}{१६} ठ^{२} इ^{२} ल\, भु(२ - २ठ - २ण - ए)\, ब$$
$$+ \frac{५१}{१६} ठ^{२} इ^{२} ल\, भु(२ - २ठ - २ण + ए)\, ब$$
$$+ \frac{२१}{३२} ठ^{२} ल^{३}\, भु(२ - २ठ - ३ए) ब - \frac{२७}{८} ठ^{२} इ^{२} ल\, भु(ए - २ड)\, ब$$
$$+ \frac{५१}{४} ट^{२}\,'^{२} ल\, भु(२ - २ठ - ए - २ड)\, ब$$
$$+ \frac{१५}{४} ठ^{२} इ^{२} ल\, भु(२ण - ए)\, ब$$

४३५. ह्या समीकरणांतील भू एब ह्या पदाचा गुणक भूमितीरीत्या ल हा होता. ह्या समीकरणांत भुएब ह्या पदाला ६ गुणक आहेत. ते सर्व मिळून अल आहे असें समजा. ह्या पदाचें संकलन $१\text{-}ए^{२}$ ह्या भाजकानें भागिल्यानें होतें. त्यावरून

$$\frac{अल}{१ - ए^{२}}\, भुएब = ल\, भु\, ए\, ब$$
$$अ = १ - ए^{२}$$
$$ए^{२} = १ - अ$$
$$ए^{२} = १ + \frac{३}{२} ठ^{२} - \frac{९}{१६} ठ^{३} - \frac{२१३}{६४} ठ^{४} + ३ठ^{२} इ^{२} + \frac{१५}{४} ठ^{२} ल^{२} + \frac{९}{४} ठ^{२} इ^{२}$$

४३६. वरच्या शराच्या समीकरणाचें संकलन करावयाचे आहे. त्याकरितां संकलन गुणक ४१६ व्या लेखांत केले आहेत तेंच घ्यावें. त्या समीकरणापेक्षां प्रस्तुत समीकरणांत कांहीं पदें जास्त आहेत त्यांचे संकलन गुणक तयार करून खालीं लिहिले आहेत

$$\left\{ १ - (२ - २ठ - २ण - ए)^{२} \right\}^{-१} = - \frac{१}{४ठ}\ ;$$
$$\left\{ १ - (२ण - ए)^{२} \right\}^{-१} = + \frac{२}{९ठ^{२}} - \frac{४९}{३६} - \frac{१}{ठ}$$
$$\left\{ १ - (२ - २ठ - २ण + ए)^{२} \right\}^{-१} = + \frac{१}{४ठ}\ ;$$
$$\left\{ १ - (२ - २ठ - ३ए)^{२} \right\}^{-१} = - \frac{१}{४ठ}$$
$$\left\{ १ - (२ - २ठ - ए - २ड)^{२} \right\}^{-१} = + \frac{१}{८ठ}\ ;$$
$$\left\{ १ - (ए - २ड)^{२} \right\}^{-१} = + \frac{१}{८ठ}$$

ह्याप्रमाणें संकलन गुणक घेऊन त्या प्रत्येक गुणकानें प्रत्येक पदाच्या गुणकास गुणून चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें एकत्र लिहिली आहेत

$$
श = \begin{cases}
+ लभुएब + (\frac{३}{८}ठल + \frac{३}{३२}ठ^{२}ल)\ भु(२ - २ठ - ए)\ ब \\
(- \frac{१३५}{२५६}ठ^{३}ल + \frac{३९}{६४}ठइ^{२}ल + \frac{३९}{६४}ठल^{३})\ भु(२ - २ठ - ए)\ ब \\
(+ \frac{७}{८}ठलइं + \frac{६५}{६४}ठ^{२}लइं)\ भु(२ - २ठ - ए - ड)\ ब \\
(- \frac{३}{८}ठलइं - \frac{५७}{६४}ठ^{२}लइं)\ भु(२ - २ठ - ए + ड)\ ब \\
(- \frac{९}{८}ठलइं + \frac{९}{६४}ठ^{२}लइं)\ भु(ए - ड)\ ब \\
(+ \frac{९}{८}ठलइं - \frac{६९}{६४}ठ^{२}लइं)\ भु(ए + ड)\ ब \\
(+ \frac{५}{६}इ^{२}ल - \frac{२४५}{४८}ठइ^{२}ल)\ भु(२ण - ए)\ ब \\
- \frac{२७}{८}ठ^{२}लइ\ भु(२ - २ठ - ए - ण)\ ब \\
\qquad + \frac{७}{८}ठ^{२}लइ\ भु(२ - २ठ - ए + ण)\ ब \\
- \frac{१}{८}ठ^{२}लइ\ भु(२ - २ठ + ए - ण)\ ब \\
\qquad + \frac{१}{४०}ठ^{२}लइ\ भु(२ - २ठ + ए + ण)\ ब \\
+ ३ठ^{२}लइ\ भु(ए - ण)\ ब - ठ^{२}लइभु\ (ए + ण)\ ब \\
- \frac{५१}{६४}ठइ^{२}ल\ भु(२ - २ठ - २ण - ए)\ ब \\
\qquad + \frac{१५}{६४}ठइ^{२}ल\ भु(२-२ठ-२ण+ए)ब \\
- \frac{२१}{१२८}ठल^{३}\ भु(२ - २ठ - ३ए)ब - \frac{२७}{६४}ठइं^{२}ल\ भु(ए - २ड)ब \\
+ \frac{५१}{३२}ठइं^{२}ल\ भु(२ - २ठ - ए - २ड)\ ब
\end{cases}
$$

(ब) ची किमत

४३७. चलत्रिज्येचें सूक्ष्मांश समीकरण आता आपणाला चवथ्या पदवीनें सोडवावयाचें आहे. ह्या समीकरणांत जीं दोन पदें आहेत (लेख ३७३ पहा.) त्यापैकीं पहिलें पद प्र प्रेरणेचें आहे आणि दुसरें पद २ × त प्रेरणेचें संकलन × ब चें सूक्ष्मांश समीकरण हें आहे. पहिल्या पदांत ६ पोट पदें आहेत त्यांस आपण अंक म्हणू. ह्या ६ अंकांपैकीं आपणाला इष्ट असलेली पदें बहुतेक तयार आहेत. पण प्रत्येक अंकामध्यें कांहीं कांहीं कमीपणा आहे. तो कमीपणा काढून एक एका अंकातील पदसंघ खालीं लिहिले आहेत. ते क्रमवार खालीं देतो.

४३८. प्र(१) हें पद लेख ४०५ मध्ये आहे. त्यांत — ३ ($श_{१}$) लभुएब — ३ ($श_{४}$) लभुएब आणि — $\frac{९}{८}$($श_{३}$) ठलभु (२–२ठ–ए)ब ह्या तीन अव्यक्त पदांच्या किंमती तयार करावयाच्या आहेत, असें दाखविलें आहे. त्यामधील — ३ ($श_{१}$) लभुएब याचीं व्यक्त अशीं आठ पदें ४१७ व्या लेखांत तयार केली आहेत. तीं आठ पदें आणि —३($श_{४}$) ल भु एब आणि — $\frac{९}{८}$($श_{३}$) ठलभु (२—२ठ—ए) ब

ह्या दोन पदांची निघतील ती पांचव्या पदवीची इष्ट पदें ही ४०५ व्या लेखांतील व्यक्त पदांत मिळवून होणारा पदसंघ हा प्र(१) ची व्यक्त किमत होय. तो खालीं दिला आहे

$$
ऊ(१ + ञ^{२})^{-३} = ऊ \times \left\{
\begin{array}{l}
-\frac{३}{४}ल^{२} + \frac{४५}{६४}ल^{४} - \frac{२७}{२५६}ठ^{२}ल^{२} - \frac{२७}{५१२}ठ^{३}ल^{२} + \frac{३}{४}ल^{२}कोभु२एब \\
+ \frac{९}{१६}ठल^{२} कोभु(२ - २ठ) ब - \frac{९}{१६}ठल^{२} कोभु(२-२ठ-२ए) ब \\
+ \frac{२७}{२५६}ठ^{२}ल^{२} कोभु(४ - ४ठ - २ए) ब - \frac{१५}{१६}ल^{४} कोभु२ए ब \\
+ \frac{१५}{६४}ल^{४}कोभु४ एब - \frac{९}{६४}ठ^{२}ल^{२} कोभु(२ - २ठ - २ए) ब \\
+ \frac{९}{६४}ठ^{२}ल^{२}कोभु(२-२ठ)ब - \frac{२१}{१६}ठल^{२}इं कोभु(२-२ठ-२ए-ड)ब \\
+ \frac{२१}{१६}ठल^{२}इं कोभु(२ - २ठ - ड) ब \\
\qquad\qquad + \frac{९}{१६}ठल^{२}इं कोभु(२ - २ठ - २ए + ड)ब \\
- \frac{९}{१६}ठल^{२}इं कोभु(२ - २ठ + ड)ब \\
\qquad\qquad - \frac{२७}{१६}ठल^{२}इं कोभु(२ए - ड) ब \\
+ \frac{२७}{१६}ठल^{२}इं कोभु(२ए + ड) ब \\
- \frac{३९}{८}ठ^{२}ल^{२}इ कोभु(२ - २ठ - ण) ब \\
\qquad\qquad + \frac{९}{२}ठ^{२}ल^{२}इ कोभु(२ए - ण) ब \\
+ \frac{८१}{१६}ठ^{२}ल^{२}इ कोभु(२-२ठ - २ए - ण) ब - ३ठ^{२}ल^{२}इ कोभुण ब \\
- \frac{२१}{१६}ठ^{२}ल^{२}इ कोभु(२ - २ठ - २ए + ण) ब
\end{array}
\right.
$$

४३९. वरच्या अंकांतील म्हणजे प्र(१) मधील पांचव्या पदवीची आणि ० समीप केंद्रगुणाची पदें वरच्याच गुणाकारात तयार केली आहेत. ही पदें कम समीकरणांत उपयोगी पडतील म्हणून तीं खालीं लिहिली आहेत

$$
ऊ(१ + ञ^{२})^{-\frac{३}{२}} = ऊ \times \left\{
\begin{array}{l}
(+ \frac{४०५}{५१२}ठ^{३}ल^{२} - \frac{११७}{१२८}ठइ^{२}ल^{२} - \frac{८३१}{१२८}ठल^{४}) \\
\qquad\qquad कोभु(२ - २ठ - २ए) ब \\
- \frac{६३}{२५६}ठल^{३}इ कोभु(२ - २ठ - २ए) ब \\
\qquad\qquad - २ठइ^{२}ल^{२} कोभु(२ - २ठ - २ण) ब \\
+ \frac{९}{८}ठ^{२}ल^{२}इं कोभुडब - \frac{६९}{३२}ठ^{२}ल^{२}इं कोभु(२ - २ठ - २ए - ड) ब \\
+ \frac{२४५}{३२}ठइ^{२}ल^{२} कोभु(२ण - २ए) ब \\
\qquad\qquad + \frac{६३}{३२}ठ^{२}ल^{२}इंकोभु(२ - २ठ - २ए + ड) ब \\
+ \frac{८१}{१२८}ठइं^{२}ल^{२} कोभु२डब \\
\qquad\qquad - \frac{१५१}{६४}ठइं^{२}ल^{२}कोभु(२ - २ठ - २ए - २ड) ब
\end{array}
\right.
$$

४४०. प्र(२) ह्याची किमत ४०६ व्या लेखांत सर्वच दिली आहे. शेवटचें $+\frac{३}{२}ठ^{२}$ (ब$_{१}$) हें पद मात्र अव्यक्त स्वरूपी आहे. त्याची व्यक्त स्वरूपी किमत

काढून ह्या अंकांचीं सर्व पदें खालीं लिहिली आहेत

$$-\frac{१}{२}\frac{\text{मवं}^३}{\text{क्र}^३\text{वं}^३} = \text{ऊ} \times \left\{ \begin{array}{l} -\frac{१}{२}\text{ठ}^२ - \frac{३}{२}\text{ठ}^२\text{इकोभुणव} \quad - \frac{३}{२}\text{ठ}^२\text{इं कोभु डव} \\ -\frac{३}{४}\text{ठ}^२\text{इं}^२ - \frac{३}{२}\text{ठ}^२\text{इ}^२\text{कोभु२णव} \quad - \frac{९}{४}\text{ठ}^२\text{इं}^२\text{कोभु२डव} \\ +\frac{९}{४}\text{ठ}^२\text{इइं कोभु}(\text{ण} + \text{ड})\text{व} + \frac{९}{४}\text{ठ}^२\text{इइं कोभु}(\text{ण} - \text{ड})\text{व} \\ -\frac{३}{४}\text{ठ}^४ - \frac{९}{८}\text{ठ}^२\text{ल}^२ \quad - \frac{३}{८}\text{ठ}^२\text{ल}^२\text{कोभु२एव} \\ +\frac{३}{२}\text{ठ}^४\text{कोभु}(२ - २\text{ठ})\text{व} + \frac{४५}{१६}\text{ठ}^३\text{इ कोभु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण})\text{व} \\ +(+\frac{३}{४}\text{ठ}^४\text{इ} + \frac{९}{२}\text{ठ}^२\text{ल}^२\text{इ} + \frac{२७}{४}\text{ठइं}^२\text{इ} - \frac{३}{४}\text{ठ}^२\text{इ}^३)\text{ कोभुण व} \\ +\frac{२७}{८}\text{ठइं}^२\text{इ कोभु}(\text{ण} + २\text{ड})\text{व} + \frac{२७}{८}\text{ठइं}^२\text{इ कोभु}(\text{ण} - २\text{ड})\text{व} \\ +\frac{३}{४}\text{ठ}^२\text{ल}^२\text{इ कोभु}(२\text{ए} - \text{ण})\text{व} + \frac{६२७}{६४}\text{ठ}^४\text{इ कोभु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण})\text{व} \\ +\frac{३४५}{३२}\text{ठ}^३\text{इइं कोभु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड})\text{व} \\ \qquad\qquad + \frac{३}{१६}\text{ठ}^३\text{इइं कोभु}(\text{ण} - \text{ड})\text{व} \\ +\frac{४५}{३२}\text{ठ}^३\text{इइं कोभु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण} + \text{ड})\text{व} \\ \qquad\qquad - \frac{३}{१६}\text{ठ}^३\text{इइं कोभु}(\text{ण} + \text{ड})\text{व} \\ -\frac{४५}{३२}\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ठ}^३\text{ कोभु}(१ - \text{ठ})\text{व} \end{array} \right.$$

वरच्या अंकांतील पांचव्या पदवीची ० समीप केंद्रगुणाची पदें कम समीकरणांत $(\text{व}_५)$ चीं किंमत उपयोगी आहे. म्हणून ती येथें लिहिली आहेत.

$$+\frac{९}{३२}\text{ठ}^३\text{ल}^२\text{ कोभु}(२ - २\text{ठ} - २\text{ए})\text{व} + (-\frac{९}{२}\text{ठ}^४\text{इं} - \frac{२७}{८}\text{ठ}^२\text{ल}^२\text{इं} - \frac{९}{२}\text{ठ}^२\text{इ}^२\text{इ})\text{ कोभुड व}$$

४४१. प्र(३) ह्या अंकांतील पदसंघ. ४०७ व्या लेखांत ह्याची ४ थ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें आणि पांचव्या पदवीची इष्ट पदें हीसुद्धां त्यांत आहेत. शेवटची दोन खेरीज करून सर्व पदसंघ सूक्ष्मांश समीकरणांत घेण्यायोग्य आहे म्हणून त्याचे एथे लेखन करीत नाहीं. शेवटच्या दोन पदापासून जीं इष्ट पदें सापडतील तेवढीच खाली लिहित आहे

$$\left. -\frac{३}{२}\frac{\text{मवं}^३}{\text{क्र}^३\text{वं}^३}\text{कोभु}२(\text{व} - \text{वं}) \right\} = \text{अ} \left\{ \begin{array}{l} +\frac{८१}{३२}\text{ठ}^३\text{इइं कोभु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण} + \text{ड})\text{व} \\ \qquad\qquad + \frac{३१५}{३२}\text{ठ}^३\text{इइं कोभु}(\text{ण} + \text{ड})\text{व} \\ -\frac{८१}{३२}\text{ठ}^३\text{इइंकोभु}(२ - २\text{ठ} - \text{ण} - \text{ड})\text{व} \\ \qquad\qquad - \frac{१३५}{३२}\text{ठ}^३\text{इइंकोभु}(\text{ण} - \text{ड})\text{व} \\ +\frac{२१८७}{१२८}\text{ठ}^४\text{इकोभुणव} - \frac{१३५}{६४}\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ठ}^३\text{कोभु}(१ - \text{ठ})\text{व} \\ -\frac{९}{८}\text{ठ}^३\text{इ}^२\text{ कोभु}(२ - २\text{ठ} - २\text{ण})\text{व} \\ \qquad\qquad - \frac{३}{२}\text{ठ}^३\text{ल}^२\text{कोभु}(२ - २\text{ठ} - २\text{ए})\text{व} \\ +\frac{२७}{४}\text{ठ}^४\text{इं कोभुडव.} \end{array} \right.$$

४४२. प्र(४) आणि प्र(५) यांच्या किंमती ४०८ व्या लेखांत तयार आहेत. ती पांच पदें आहेत ती जशीच्या तशीच समीकरणांत घेणें आहे. आतां प्र(६) ची किमत तयार करूं. ह्या पदांत दोन अवयव आहेत. म्हणजे ते पद —

$$-\frac{\text{त}}{\text{थ ज}^{2}\text{ व}^{2}} \times \frac{\text{सू व}}{\text{सू ब}}$$

असें आहे. ह्यातील पहिल्या अवयवाची किंमत ४०९ व्या लेखांत आहे. त्या पदसंघांत पहिले पद दुसऱ्या पदवीचे आहे म्हणून दुसऱ्या अवयवाची किमत ३ ऱ्या पदवीपर्यंत हवी आहे. ती तयार करूं.

$$\text{व}=\text{अ}\left(१-\tfrac{३}{४}\text{ल}^{२}-\tfrac{१}{२}\text{ठ}^{२}+\text{इ कोभु ण ब}+\cdots\cdots\text{इत्यादि.}\right)$$

४२३ लेख पहा. याचा सूक्ष्मांशगुण तयार करूं. सूक्ष्मांशगुण तयार करितांना पदाच्या गुणकाला केंद्रातील गुणकानें गुणावें लागते. हा गुणाकार करितांना ण , ए यांच्या किमती संकलनांत निघालेल्या घ्याव्या. जसें

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}(\text{इकोभुणब}) = -\text{इण भुण ब} = -\left(१-\tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}\right)\text{इ भुण ब}$$
$$= -\text{इ भुण ब} + \tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}\text{ इ भुण ब}$$

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left(-\tfrac{१}{४}\text{ल}^{२}\text{कोभु२एब}\right) = +\tfrac{१}{४}\text{ल}^{२}\times\text{२ए भु२एब}$$
$$= +\tfrac{१}{२}\text{ल}^{२}\left(१+\tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}\right)\text{भु२एब}$$
$$= +\tfrac{१}{२}\text{ल}^{२}\text{ भु२एब}$$

$$\frac{\text{सू}}{\text{सूब}}\left\{\text{ठ}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ})\text{ब}\right\} = -\text{ठ}^{२}(२-२\text{ठ})\text{ भु }(२-२\text{ठ})\text{ ब}$$
$$= -२\text{ठ}^{२}\text{ भु}(२-२\text{ठ})\text{ ब}+२\text{ठ}^{३}\text{ भु}(२-२\text{ठ})\text{ ब}$$

ह्याप्रमाणे सूक्ष्मांशगुण काढून तिसऱ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें खालीं लिहिली आहेत

$$\frac{\text{सूव}}{\text{सूब}}=\text{अ}\left\{\begin{array}{l}
-\text{इ भुणब}+\tfrac{१}{२}\text{ल}^{२}\text{ भु२एब}-२\text{ठ}^{२}\text{ भु}(२-२\text{ठ})\text{ ब}\\
-\tfrac{१५}{८}\text{ठइ भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})+\left(\tfrac{३}{८}\text{ठल}^{२}-\tfrac{१३}{३}\text{ठ}^{३}\right)\text{भु}(२-२\text{ठ})\text{ब}\\
+\tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}\text{इ भुणब}-\tfrac{१५३}{३२}\text{ठ}^{२}\text{इ भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\text{ ब}\\
+\tfrac{१५}{८}\text{ठइइं भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\text{ ब}+\text{ठ}^{२}\text{इं भु}(२-२\text{ठ}+\text{ड})\text{ ब}\\
-\tfrac{३५}{८}\text{ठइइं भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\text{ ब}-७\text{ठ}^{२}\text{इं भु}(२-२\text{ठ}-\text{ड})\text{ ब}\\
-\tfrac{५}{८}\text{ठइ भु }(\text{ण}-\text{ड})\text{ ब}+\tfrac{५}{८}\text{ठइइं भु}(\text{ण}+\text{ड})\text{ ब}\\
+\tfrac{१५}{१६}\tfrac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ठ भु}(१-\text{ठ})\text{ ब}+\tfrac{१५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ भु}(२-२\text{ठ}+\text{ण})\text{ ब}
\end{array}\right.$$

४४३. हचा वरच्या पदसंघानें त प्रेरणेच्या पदसंघास गुणून गुणाकार ऋण करणें म्हणजे प्र(६) ह्या पोटपदाची किंमत येईल. त प्रेरणेचा पदसंघ ४०९ व्या लेखांत आहे. हा गुणाकार करून सर्वच पदसंघ खालीं दिला आहे. सर्वच म्हणजे चवथ्या पदवीपर्यंतची सर्व पदें आणि पांचव्या पदवीचीं १ संख्ये समीप आणि ० संख्ये समीप केंद्रगुणाची पदें समजावी.

$$-\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\,\text{व}^{२}} \times \frac{\text{सूव}}{\text{सूव}}\,\frac{१}{\text{अ}} =$$

$-\frac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब} + \frac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{ब}$

$+\frac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब} - \frac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+२\text{ण})\,\text{ब}$

$-\frac{२१}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब} + \frac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{२१}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब} - \frac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{ब} - \frac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+२\text{ए})\,\text{ब}$

$+\frac{४५}{३२}\,\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु}(४-४\text{ठ}-\text{ण}) + \frac{३}{२}\,\text{ठ}^{४}\,\text{कोभु}(४-४\text{ठ})\,\text{ब}$

$-\frac{४५}{३२}\,\text{ठ}^{३}\text{इ कोभुण ब} + \frac{३}{२}\,\text{ठ}^{४}$

$+\frac{४५}{१६}\,\text{ठ}^{३}\text{इ}^{२} + \frac{९}{३२}\,\text{ठ}^{३}\text{ल}^{२} + \frac{४५}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३} - \frac{१३}{४}\,\text{ठ}^{५}$

$+\frac{४६९}{१२८}\,\text{ठ}^{४}\text{इ को भुण ब} - \frac{१५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-३\text{ण})\,\text{ब}$

$+\left(+\frac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३} - \frac{९}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इ} - \frac{१५}{१६}\,\text{ठ}^{४}\text{इ} + \frac{१५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}'^{२}\text{इ}\right)\text{को भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}$

$+\frac{२७}{३२}\,\text{ठ}^{३}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब} - \frac{२२५}{६४}\,\text{ठ}^{३}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}$

$-\frac{२७}{३२}\,\text{ठ}^{३}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब} - \frac{१६५}{६४}\,\text{ठ}^{३}\text{इइ}'\,\text{कोभु}(\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}$

$-\frac{९}{८}\,\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ण})\,\text{ब} - \frac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}+\text{ण})\,\text{ब}$

$+\frac{४५}{६४}\frac{\text{अ}'}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{३}\,\text{कोभु}(१-\text{ठ})\,\text{ब} - \frac{५१}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}'^{२}\,\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-२\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{२१}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{इ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब} - \frac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{इ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}.$

$+\frac{२१}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ड})\,\text{ब} - \frac{३}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इ}'\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}+\text{ड})\,\text{ब}$

$-९\text{ठ}^{४}\text{इ}'\,\text{कोभुडब} - \frac{३}{१६}\,\frac{\text{अ}'}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}(१-\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}$

४४४. चलत्रिज्येच्या सूक्ष्मांश समीकरणांतील दुसरें पद, त प्रेरणेचें संकलन आणि चलत्रिज्येचेंच सूक्ष्मांश समीकरण यांच्या गुणाकाराची दुप्पट ह्याबरोबर आहे. हे सूक्ष्मांश समीकरण पूर्वीच्या पदवीकरितां जें सिद्ध केलें आहे तेंच गुणाकाराकरितां घ्यावें. त प्रेरणेच्या संकलनांतील पदें चवथ्या पदवीची सर्व आणि पांचव्या पदवीची १ संख्ये समीप केंद्रगुणांची अशी पाहिजे आहेत. आणि पांचव्या पदवीचीं ० समीप केंद्रगुणाचीं पदें हीसुद्धां काढिली पाहिजेत, कारण त्यांचा उपयोग कम च्या समीकरणांत

होतो. त प्रेरणेची पदें ४०३ व्या लेखाप्रमाणें घ्यावयाची. त्या लेखांत पहा, आठ पदें व्यक्त आहेत आणि सहा पदें अव्यक्त आहेत. ह्या अव्यक्त पदामध्ये (व) आणि (क) च्या व्यक्त संख्या ठेवून येणाऱ्या पदातील इष्ट पदें वेचून घेऊन खालचा पदसंघ लिहिला आहे

$$\frac{\text{त}}{\text{थज}^{२}\text{व}^{२}} = \left\{ \begin{array}{l}
+\frac{१०५}{३२}\,\text{ठ}^{४}\,\text{इ भुणव} \quad + \frac{१५}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३}\,\text{भु}\,(२-२\text{ठ}-३\text{ण})\text{व} \\
+\left(+\frac{९}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३} + \frac{१५}{२}\,\text{ठ}^{४}\text{इ} + \frac{४५}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इ} - \frac{१५}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}\text{इ}\right) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\ \text{व} \\
+\frac{९९}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{इइं}\ \text{भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\,\text{व} + \frac{२२५}{१६}\,\text{ठ}^{३}\text{इइं}\ \text{भु}(\text{ण}-\text{ड})\ \text{व} \\
+\frac{२१}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{इइं}\ \text{भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{व} + \frac{१६५}{१६}\,\text{ठ}^{३}\text{इइं}\ \text{भु}(\text{ण}+\text{ड})\text{व} \\
+\frac{१५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इ}\ \text{भु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ण})\ \text{व} \\
\qquad\qquad + \frac{१५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\ \text{इ भु}\,(२-२\text{ठ}-२\text{ए}+\text{ण})\ \text{व} \\
-\frac{४५}{१६}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{३}\ \text{भु}\ (१-\text{ठ})\ \text{व} - \frac{९}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}\,\text{भु}\ (१-\text{ठ}-\text{ड})\ \text{व} \\
\qquad -\frac{३}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}\ \text{भु}\ (१-\text{ठ}+\text{ड})\ \text{व} \\
+\frac{१५}{१६}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}\ \text{भु}\ (१-\text{ठ}-\text{ण})\ \text{व} \\
-\frac{२१}{८}\,\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२}\text{इं}\ \text{भु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ड})\ \text{व} \\
\qquad + \frac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इं}\ \text{भु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}+\text{ड})\ \text{व}. \\
-\frac{१०५}{८}\,\text{ठ}^{२}\ \text{इ}^{२}\text{इं}\ \text{भु}\ (२-२\text{ठ}-२\text{ण}-\text{ड})\ \text{व} \\
\qquad + \frac{१५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{इं}\ \text{भु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}+\text{ड})\ \text{व}. \\
-\frac{५७}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{इ}^{२}\,\text{भु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{व} - \frac{३}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{ल}^{२}\,\text{भु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{व}
\end{array} \right.$$

[पांचवी पदवी]

४४५. वरचा पदसंघ हा ४०९ व्या लेखांतील पदसंघाच्या पुढचा भाग आहे. दोन्हीं मिळून एकच पदसंघ आहे असे समजा. आणि ह्या एकाच पदसंघाचें संकलन करावयाचे आहे. एकाच पदाच्या संकलनापासून संकलन गुणकातील पदाप्रमाणें अनेक पदें उत्पन्न होतात. दशांश भागाकाराप्रमाणें आपणास इष्ट असतील तितकी ठेवून पुढची सोडावी लागतात. त्याप्रमाणेंच येथेही कार्य तसेंच करावे लागत आहे. संकलनाकरितां संकलनगुणक ४१० व्या लेखांतील घ्यावे. त्यांत कांहीं पदें नसून वरच्या पदांत आहेत आणि कांहीं पदांना संकलनगुणक जास्त हवे आहेत असें गुणक तयार करून खालीं दिले आहेत

$$(२-२\text{ठ}-२\text{ण})^{-१} = \frac{१}{२\text{ठ}} - \frac{३}{८} - \frac{२४३}{६४}\,\text{ठ};\quad (२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ड})^{-१} = -\frac{१}{३\text{ठ}} + \frac{१}{६};$$

$$(२-२\text{ठ}-२\text{ए})^{-१} = -\frac{१}{२\text{ठ}} + \frac{३}{८} - \frac{२७}{६४}\,\text{ठ};\quad (२-२\text{ठ}\ \ २\text{ए}+\text{ड})^{-१} = -\frac{१}{\text{ठ}} + \frac{३}{२};$$

$(२-२ठ-२ण-ड)^{-१} = -\frac{१}{३ठ} - \frac{१}{६}$; $(२-२ठ-२ण+ड)^{-१} = -\frac{१}{ठ} - \frac{३}{२}$;

$(१-ठ-ण)^{-१} = \frac{१}{ठ} - \frac{३}{४}$.

तिसऱ्या पदवीच्या पदापासून व चवथ्या पदवीच्या पदांपासून कांहीं पांचव्या पदवीची पदें उत्पन्न होतात. ४०९ व्या लेखांतील पदसंघाचे संकलनांत ५ व्या पदवीची इष्ट पदें निघालीं आहेत ती ६ पदें खालीं लिहिली आहेत. ही पदें खालच्या संकलनांत मिळवून घेतली आहेत

$$+\frac{६३}{४} ठ^४ इ \text{ कोभु}(२-२ठ-ण) व - \frac{३}{८}\frac{अ}{अ} ठ^३ \text{ कोभु}(१-ठ) व$$

$$+\frac{८१}{२५६} ठ^३ ल^२ \text{ कोभु}(२-२ठ-२ए) व + \frac{३६४५}{२५६} ठ^३ इ^२ \text{ कोभु}(२-२ठ-२ण) व$$

$$+\frac{६३}{२} ठ^३ इइं \text{ कोभु}(२-२ठ-ण-ड) व - \frac{३}{२} ठ^३ इइं \text{ कोभु}(२-२ठ-ण+ड) व$$

४४६. त प्रेरणेच्या पदांचे संकलन

$$-ठ^४\left(\frac{त}{अ ज^२ व^२}\right)^{खल} = \left\{\begin{array}{l}
+\frac{५७}{१६} ठ^२ इ^२ \text{ कोभु}(२-२ठ-२ण) व \\
\qquad +\frac{३}{१६} ठ^२ ल^२ \text{ कोभु}(२-२ठ-२ए) व \\
+\frac{७}{८} ठल^२ इं \text{ कोभु}(२-२ठ-२ए-ड) व \\
\qquad -\frac{३}{८} ठल^२ इं \text{ कोभु}(२-२ठ-२ए+ड) व \\
+\frac{३५}{८} ठइ^२ इं \text{ कोभु}(२-२ठ-२ण-ड) व \\
\qquad -\frac{१५}{८} ठइ^२ इं \text{ कोभु}(२-२ठ-२ण+ड) व. \\
-\frac{१५}{१६}\frac{अ}{अ} ठइ \text{ कोभु}(१-ठ-ण) व \\
+\frac{१०५३}{३२} ठ^४ इ \text{ कोभु}ण\ व - \frac{१५}{४} ठ^२ इ^३ \text{ कोभु}(२-२ठ-३ण) व \\
\left(+\frac{३}{४} ठ^२ इ^३ + \frac{६३}{४} ठ^४ इ + \frac{४५}{४} ठ^२ ल^२ इ - \frac{१५}{२} ठ^२ इं^२ इ\right) \\
\hfill \text{कोभु}(२-२ठ-ण) व \\
\frac{३५१}{८} ठ^३ इइं \text{ कोभु}(२-२ठ-ण-ड) व + \frac{२२५}{१५} ठ^३ इइं \text{ कोभु}(ण-ड) व \\
+\frac{३}{८} ठ^३ इइं \text{ कोभु}(२-२ठ-ण+ड) व \\
\qquad +\frac{१६५}{१६} ठ^३ इइं \text{ कोभु}(ण+ड) व \\
-\frac{१५}{८} ठ^२ ल^२ इ \text{ कोभु}(२-२ठ-२ए-ण) व \\
\qquad +\frac{१५}{८} ठ^२ ल^२ इ \text{ कोभु}(२-२ठ-२ए+ण) व \\
-\frac{९}{८}\frac{अं}{अ} ठ^२ इं \text{ कोभु}(१-ठ-ड) व - \frac{३}{८}\frac{अं}{अ} ठ^२ इं \text{ कोभु}(१-ठ+ड) व
\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{५१}{१६}\ \frac{अं}{अ}\ ठ^{३}\ कोभु(१-ठ)\ ब \\ -\frac{४५}{६४}\ \frac{अं}{अ}\ ठ^{२}इ\ कोभु(१-ठ-ण)\ ब \\ +\frac{४३२९}{२५६}\ ठ^{३}इ^{२}\ कोभु(२-२ठ-२ण)\ ब \\ \quad +\frac{४५}{२५६}\ ठ^{३}ल^{२}\ कोभु(२-२ठ-२ए)\ ब. \\ -\frac{७}{१६}\ ठ^{२}ल^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ए-ड)\ ब \\ \quad +\frac{१}{१६}\ ठ^{२}ल^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ए+ड)\ ब. \\ +\frac{३५}{१६}\ ठ^{२}इ^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ण-ड)\ ब \\ \quad -\frac{४५}{१६}\ ठ^{२}इ^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ण-ड)\ ब. \end{array}\right.$$

४४७. चलत्रिज्येच्या सूक्ष्मांश समीकरणातील दुसरें पद.

$$-२ठँ\left(\frac{त}{थ\ ज^{२}व^{२}}\right)\ सूब\ \times\left\{\frac{सू^{२}\ व}{सू\ ब^{२}}\ +व\right\}\frac{१}{अ}$$

हे आहे. ह्यात जे दोन अवयव आहेत, त्या दोहींच्या किंमती तयार आहेत, त्यांचा गुणाकार करावयाचा आहे. हा गुणाकार पांचव्या पदवींपर्यंत करावयाचा आहे. गुणाकाराच्या सोईसाठी पहिला अवयव –(सं) ह्या अक्षर चिन्हानें व दुसरा अवयव (प) ह्या चिन्हानें दाखवितो तेव्हां वरचा गुणाकार सर्व पद $-२(सं)\times(प)\times\frac{१}{अ}$ असा होतो. तसेंच असेंहि घेऊं कीं,

$$-(सं) = (सं_{२}) + (सं_{३}) + (सं_{४}) + (सं_{५})$$

आणि $$(प)\ \frac{१}{अ} = १ + (प_{२}) + (प_{३})$$

तेव्हां

$$-२\ (सं)\ \times\ (प)\ \frac{१}{अ} = -२\ (सं) + २(प_{२})\ (सं_{२}) + २(प_{२})\ (सं_{३}) + २\ (प_{३})\ (सं_{२})$$

ह्या उल्लेखावरून कळतें कीं, आपणाला तीन गुणाकार करावे लागतील. कारण वरच्या ४ पदांपैकीं पहिलें पद— २ (सं) हे तयारच आहे. मात्र प्रत्येक पदाची दुप्पट घ्यावयाची आहे. ते ३ गुणाकार क्रमानें करूं (सं$_{२}$) यांत एकच पद $-\frac{३}{४}ठ^{२}$ कोभु (२–२ठ) ब हे आहे. आणि (प$_{२}$) मध्ये चार पदें आहेत. ४२० व्या लेखांतील समीकरण पहा. तेव्हां

$$+२\ (प_{२})\ (सं_{२}) = +(\tfrac{१}{२}ठ^{२}ल^{२} + \tfrac{३}{४}ठ^{४})\ कोभु(२-२ठ)\ ब + \tfrac{१}{४}\ ठ^{४} + \tfrac{१}{४}\ ठ^{४}\ कोभु\ (४-४ठ)\ ब$$

$-\frac{१}{१६}ठ^२ल^२$ कोभु(२−२ठ−२ए) ब $-\frac{१}{१६}ठ^२ल^२$ कोभु(२−२ठ+२ए) ब

$+२(प_३)(सं_२) = -\frac{१}{८}ठ^४इ$ कोभु(२−२ठ−ण) ब $-\frac{१५}{४}ठ^४इ$ कोभुण ब

$-\frac{४५}{८}ठ^४इ$ कोभुण ब $+\frac{६३}{८}ठ^४इं$ कोभु ड ब

$-\frac{१}{८}ठ^४इं$ कोभु ड ब $+\frac{१}{८}ठ^५-\frac{२७}{६४}ठ^३ल^२$

$+२(प_२)(सं_३) = +\frac{१}{४}ठ^५-\frac{१}{१६}ठ^३ल^२$ कोभु(२−२ठ−२ए) ब

$-(\frac{१}{३}ठ^२ल^२इ+३ठ^४इ)$ कोभु(२−२ठ−ण) ब

$-९ठ^४इ$ कोभुण ब $-३ठ^४इ$ कोभुण ब

$+\frac{६३}{८}ठ^४इं$ कोभु ड ब $-\frac{१}{८}ठ^४इं$ कोभु ड ब

$+\frac{१}{४}ठ^२ल^२इ$ कोभु(२−२ठ−२ए−ण) ब $+\frac{३}{४}ठ^२ल^२इ$ कोभु (२−२ठ−२ए+ण) ब

$-\frac{६३}{३२}ठ^२ल^२इं$ कोभु (२−२ठ−२ए−ड) ब $+\frac{१}{३२}ठ^२ल^२इं$ कोभु(२−२ठ−ए+ड) ब

$-(\frac{१}{१६}ठल^४+\frac{३}{८}ठ^३ल^२)$ कोभु (२−२ठ−२ए) ब

$-(\frac{४५}{१६}ठइ^२ल^२+\frac{१५}{८}ठ^३इ)$ कोभु(२−२ठ−२ण) ब.

वर काढिलेली सर्व पदें खालीं एकत्र लिहिलीं आहेत.

$$-२ऊ\left(\frac{न}{ध्रुज^२ब^२}\right)स्फुल \times \left\{\frac{स्फु^२ब}{स्फुल^२}+ब\right\}\frac{१}{ऊ} =$$

—त प्रेरणेच्या संकलनाचीं दुप्पट लेख ४१० व ४४६.

$+\frac{१}{४}ठ^४+\frac{१}{४}ठ^४$ कोभु (४−४ठ) ब

$+(\frac{१}{८}ठ^२ल^२+\frac{३}{४}ठ^४)$ कोभु (२−२ठ) ब

$-\frac{१}{१६}ठ^२ल^२$ कोभु(२−२ठ−२ए) ब

$-\frac{१}{१६}ठ^२ल^२$ कोभु(२−२ठ+२ए) ब

$-\frac{१७१}{८}ठ^४इ$ कोभुण ब

$-(\frac{३३}{८}ठ^४इ+\frac{१}{२}ठ^२ल^२इ)$ कोभु (२−२ठ−ण) ब

$+\frac{१}{४}ठ^२ल^२इ$ कोभु(२−२ठ−२ए−ण) ब

$+\frac{३}{४}ठ^२ल^२इ$ कोभु (२−२ठ−२ए+ण) ब

$+\frac{२७}{८}ठ^५-\frac{२७}{६४}ठ^३ल^२+\frac{२७}{२}ठ^४इं$ कोभु डब

$-(\frac{४५}{१६}ठल^२इ^२+\frac{१५}{८}ठ^३इ^२)$ कोभु (२−२ठ−२ण) ब

$+\frac{१}{३२}ठ^२ल^२इं$ कोभु(२−२ठ−२ए+ड) ब

$-(\frac{१}{१६}ठल^४+\frac{१५}{८}ठ^३ल^२)$ कोभु(२−२ठ−२ए) ब

$-\frac{६३}{३२}ठ^२ल^२इं$ कोभु(२−२ठ−२ए−ड) ब.

४४८. चलत्रिज्येच्या म्हणजेच (व) च्या सूक्ष्मांश समीकरणामध्यें जीं पदें येतात तीं ४३८ व्या लेखापासून दहा लेखामध्यें तयार केलीं आहेत. तीं सर्व पदें एकत्र करून खालीं लिहिलीं आहेत. हीं पदें पदवीच्या क्रमानें लिहिली आहेत. त्यांत चवथ्या पदवीपर्यंत सर्व पदें आणि पांचव्या पदवीचीं १ संख्ये समीप केंद्रगुणाचीं

पदें आहेत. पांचव्या पदवीची ० समीप केंद्रगुणाची पदें शेवटीं निराळी लिहिली आहेत.

$$\left\{\frac{\text{सू}^{२}\,\text{व}}{\text{सू}\,\text{ब}^{२}} + \text{व}\right\}\frac{१}{\text{अ}} =$$

$$१ - \tfrac{३}{४}\,\text{ल}^{२} - \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२} + \tfrac{२१}{४}\,\text{ठ}^{४} + \tfrac{४५}{६४}\,\text{ल}^{४} - \tfrac{३१५}{२५६}\,\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२} - \tfrac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं}^{२}$$

$$+ \tfrac{४५}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२} + \tfrac{४५}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२} - \tfrac{९९}{५१२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२} + \tfrac{१}{८}\,\text{ठ}^{५}$$

$$\left[\begin{matrix} + \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इ} + \tfrac{२२५}{१६}\,\text{ठ}^{३}\text{इ} + \tfrac{४०८३}{६४}\,\text{ठ}^{४}\text{इ} \\ + \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२}\,\text{इ} - \tfrac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{३} + \tfrac{२७}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं}^{२}\,\text{इ} \end{matrix}\right] \text{कोभुण ब}$$

$$+ \tfrac{३}{४}\,\text{ल}^{२}\,\text{कोभु२ एब} - (३\text{ठ}^{२} + \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{३} - \tfrac{९}{१६}\,\text{ठल}^{२})\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ})\,\text{ब}$$

$$+ \tfrac{१५}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब} + ५\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{ब}$$

$$+ \tfrac{१५}{४}\,\text{ठइ}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब} + \tfrac{३}{१६}\,\text{ठल}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{२१}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ड})\,\text{ब} + \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ड})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं कोभु ड ब} + \tfrac{३८१}{१६}\,\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}$$

$$+ \tfrac{१०५}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इ इं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब} - \tfrac{१५}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इ इं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}$$

$$+ \tfrac{३}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इइं कोभु}(\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब} + \tfrac{९}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इइं कोभु}(\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{१५}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\,\text{कोभु}(१-\text{ठ})\,\text{ब}$$

$$+ (\tfrac{१५}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२} - \tfrac{९}{२}\,\text{ठ}^{४} - ३\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२} - \tfrac{४२३}{६४}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२})\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{३}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोभु२ ण ब} - (\tfrac{३}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२} + \tfrac{१५}{१६}\,\text{ल}^{४})\,\text{कोभु२एब}$$

$$- \tfrac{११}{३}\,\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{ब} + \tfrac{७५}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{इ कोभु}(४-४\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{२५}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\,\text{कोभु}(३-३\text{ठ})\,\text{ब} + \tfrac{३५}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इइं कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}$$

$$+ \tfrac{१५}{२}\,\text{ठ}^{४}\,\text{कोभु}(४-४\text{ठ})\,\text{ब} - \tfrac{५}{२}\,\text{ठ}^{२}\text{इइं कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}$$

$$+ \tfrac{१४७}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब} - \tfrac{४५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+२\text{ण})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{६९}{६४}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{ब} - \tfrac{१५}{८}\,\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+२\text{ए})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{२७}{१६}\,\text{ठल}^{२}\text{इंकोभु}(२\text{ए}-\text{ड})\,\text{ब} + (\tfrac{२१}{१६}\,\text{ठल}^{२}\text{इं} - \tfrac{६३}{८}\,\text{ठ}^{३}\,\text{इं})\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ड})\,\text{ब}$$

$$+ \tfrac{२७}{१६}\,\text{ठल}^{२}\,\text{इं कोभु}(२\text{ए}+\text{ड})\,\text{ब} + (\tfrac{३}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{इ} - \tfrac{९}{१६}\,\text{ठल}^{२}\,\text{इं})\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ड})\text{ब}$$

$$+ \tfrac{३५}{४}\,\text{ठइ}^{२}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब} + \tfrac{२७}{८}\,\text{ठ इं}^{२}\text{इ कोभु}(\text{ण}+२\text{ड})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{१५}{४}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब} + \tfrac{२७}{८}\,\text{ठ इं}^{२}\text{इ कोभु}(\text{ण}-२\text{ड})\,\text{ब}$$

$$- \tfrac{५१}{२}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं}^{२}\,\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ड})\,\text{ब} - \tfrac{९}{४}\,\text{ठ}^{२}\,\text{इं}^{२}\,\text{कोभु२ड}$$

$$+\frac{७}{१६}ठल^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ए-ड)\ ब-\frac{३}{१६}ठल^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ए+ड)\ ब$$
$$+\frac{१५}{६४}ल^{४}\ कोभु४ए\ ब+\frac{२७}{२५६}ठ^{२}ल^{२}\ कोभु(४-४ठ-२ए)\ ब$$
$$+\left(\frac{१४१}{८}ठ^{२}ल^{२}इ+\frac{२९६१}{६४}ठ^{४}इ+\frac{१५}{४}ठ^{२}इं^{२}-१२ठ^{२}इं^{२}इ\right)कोभु(२-२ठ-ण)\ ब$$
$$-\frac{७५}{१६}ठ^{२}इं^{२}इ\ कोभु(२-२ठ-ण-२ड)\ ब-\frac{१८९}{१६}ठ^{२}इं^{२}इ\ कोभु(२-२ठ-ण+२ड)\ ब$$
$$+\frac{२१}{४}ठ^{२}ल^{२}इ\ कोभु(२ए-ण)\ ब-\frac{१५}{२}ठ^{२}इ^{३}\ कोभु(२-२ठ-३ण)\ ब$$
$$+\frac{११३१}{३२}ठ^{३}इइं\ कोभु(ण-ड)\ ब+\frac{३६०३}{३२}ठ^{३}इइं\ कोभु(२-२ठ-ण-ड)\ ब$$
$$+\frac{८१९}{३२}ठ^{३}इइं\ कोभु(ण+ड)\ ब+\frac{१४७}{३२}ठ^{३}इइं\ कोभु(२-२ठ-ण+ड)\ ब$$
$$+\frac{१५}{१६}ठ^{२}ल^{२}इ\ कोभु(२-२ठ-२ए-ण)\ ब-\frac{४५}{८}\frac{अं}{अ}ठ^{२}इं\ कोभु(१-ठ-ड)\ ब$$
$$+\frac{६३}{१६}ठ^{२}ल^{२}इ\ कोभु(२-२ठ-२ए+ण)\ ब-\frac{१५}{८}\frac{अं}{अ}ठ^{२}इं\ कोभु(१-ठ+ड)\ ब$$
$$-\left(\frac{४२३}{५१२}ठ^{३}ल^{२}+\frac{११७}{१२८}ठल^{२}इ^{२}-\frac{९०३}{१२८}ठल^{४}-\frac{६३}{२५६}ठल^{३}इ\right)\ कोभु(२-२ठ-२ए)\ ब$$
$$+\frac{२४५}{३२}ठल^{२}इ^{२}\ कोभु(२ए-२ण)\ ब$$
$$+\left(\frac{३३६९}{१२८}ठ^{३}इ^{२}-\frac{७७}{१६}ठल^{२}इ^{२}\right)\ कोभु(२-२ठ-२ए)\ ब$$
$$-\frac{२२३}{३२}ठ^{२}ल^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ए-ड)\ ब+\frac{११७}{३२}ठ^{२}ल^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ए+ड)\ ब$$
$$+\frac{७}{२}ठ^{२}इ^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ण-ड)\ ब-\frac{९}{२}ठ^{२}इ^{२}इं\ कोभु(२-२ठ-२ण-ड)\ ब$$
$$+\frac{८१}{१२८}ठइं^{२}ल^{२}\ कोभु२ड\ ब-\frac{१५१}{६४}ठइं^{२}ल^{२}\ कोभु(२-२ठ-२ए-२ड)\ ब$$
$$+\frac{२१}{३२}\frac{अं}{अ}ठ^{२}इ\ कोभु(१-ठ-ण)\ ब\quad-\frac{१४७}{१६}\frac{अं}{अ}ठ^{३}\ कोभु(१-ठ)\ ब$$
$$+\left(\frac{२७}{२}ठ^{४}इ-\frac{९}{४}ठ^{२}ल^{२}इं-\frac{९}{२}ठ^{२}इ^{२}इं\right)कोभु\ डब$$

ह्या पद संवांत त प्रेरणेच्या संकलनाची दुप्पट घ्यावी लागते त्याप्रमाणें पांचव्या पदवी संकलनाची दुप्पट सर्व घेतली गेली नाहीं. त प्रेरणेच्या ६ व्या पदवींच्या पदापासून जें पांचव्या पदवीचें संकल होईल त्याची दुप्पट घेतली पाहिजे. तीं पदें पुढे तयार होतील.

४४९. वरच्या समीकरणांत स्थीर पदें निघालीं आहेत ती अ ह्या (१÷ केंद्रग भुजार्ध) स्थीर संख्येचें अस्थीरत्व दाखवितात. आणि हें अस्थीरत्व चंद्र कक्षेवर सूर्याच्या आकर्षणानें भिन्नत्व उत्पन्न झाल्यामुळें होतें. ह्या स्थीर संख्यापैकीं ल ह्या पदाचा संबंध क्रांतिवृत आणि चंद्राचे कक्षावृत्त यांमधील तिर्यगत्वाशी आहे आणि ठ ह्या पदाचा संबंध सूर्याच्या चंद्रकक्षेवरील आकर्षणाशीं आहे.

४५०. चलत्रिज्येच्या सूक्ष्मांश समीकरणांतील कोभुणब ह्या पदात अनेक गुणक आहेत आणि त्या गुणकांचा संबंध चंद्राच्या केंद्र संन्निधानाच्या गतीशीं

आहे. मागें दोन वेळां ह्या संबंधाविषयीं विवेचन केले आहे. ३८९ वा लेख आणि ४२१ वा लेख पहा. त्याप्रमाणें एथेंही ण ह्या गुणकाची किमत प्राप्त होते. कोमुणब ह्या पदाचें संकलन करावयाचे आहे. ह्या पदाला धइ हा गुणक आहे असे घेऊं. आतां संकलन करावयाचे म्हणजे धइ ह्या गुणकाला $१-ण^२$ ह्यानें भागावयाचें आहे. पण बैज्यभूमितीवरून ठरते कीं,

$$इ = \frac{धइ}{१-ण^२} \quad ; \quad १-ण^२ = ध$$

$$ण = (१-ध)^{\frac{१}{२}}$$

किंवा

$$ण = १ - \frac{१}{२}ध - \frac{१}{८}ध^२$$

वरच्या सूक्ष्मांश समीकरणांत कोमुणब ह्या पदाला असलेला गुणक धइ नें दाखविलेला आहे. त्यावरून ण ची किमत चवथ्या पदवीपर्यंत खालीं लिहिल्याप्रमाणें येते

$$ण = १ - \frac{३}{४}ठ^२ - \frac{२२५}{३२}ठ^३ - \frac{४११९}{५१२८}ठ^४ - \frac{३}{४}ठ^२ल^२ + \frac{३}{८}ठ^२इ^२ - \frac{२७}{८}ठ^२इ^२$$

४५१. वरच्या सूक्ष्मांश समीकरणाचें संकलन करण्याकरिता संकलनगुणक लेख ४२२ मध्यें तयार केलेले आहेत. चवथ्या पदवीच्या गणितात पुष्कळ नवीन केंद्रांची पदें उत्पन्न झालीं आहेत. त्यापैकीं ज्या पदांचें केंद्रगुणक एक ह्या संख्ये समीप आहेत त्यांचें संकलनगुणक खालीं लिहिले आहेत. ज्या पदांचे केंद्रगुणक ० ह्या संख्ये समीप आहेत त्यांचा संकलनगुणक $+१$ हा आहे असें समजावें. ज्या पदाचा केंद्रगुणक ० किंवा १ ह्या संख्ये समीप नसून २ किंवा त्यापेक्षां जास्त असणाऱ्या संख्ये समीप असेल तर त्या पदाचा संकलनगुणक मुख गणनेनें करावा. मुखगणनेनें गुणक करिताना $ण=१$, $ए=१$ आणि ठ किंवा $ड=०$ समजावें. म्हणजे केंद्रगुणक पूर्णांक असाच होईल. त्या पूर्ण संख्येचा वर्ग १ ह्या संख्येत वजा करून जी ऋण संख्या येईल, त्या संख्येनें १ ह्या संख्येस भागिल्यानें जो अपूर्णांक होईल तो संकलनगुणक होय. जसें $(२-२ठ+ण)$ ह्यातील पूर्णांक संख्या ३ हिचा वर्ग $+९$ आहे तो १ ह्या संख्येंत वजा केला तेव्हां बाकी -८ म्हणून $-\frac{१}{८}$ हा संकलनगुणक होय. ह्याप्रमाणें संकलनगुणक करावे.

$(१-ठ+ड)$ ह्या केंद्राचा संकलनगुणक दिला नाहीं. मुखगणनेनें तो $\frac{१}{०}$ असा येतो. पण $\frac{१}{०}$ ही अनंत अशी संख्या आहे. म्हणून हा संकलनगुणक असंभवनीय ठरतो. पण हे पद असंभवनीय नाहीं. $डब=ठब+ध-द्र.$ हीं दोन्हीं रवीची मंदकेंद्रें आहेत. रवीच्या मंदकेंद्रातील द्र ही संख्या स्थीर नाहीं ती चल आहे. हिला वार्षिक ११ विकला धनगति आहे हे ह्याच संकलनगुणकानें

सिद्ध होते. पण तो विचार यथास्थानीं करिता येईल. खालीं संकलनगुणक दिले आहेत

(२ − २ठ − ण − २ड)	याचा संकलनगुणक	$+\frac{१}{८\text{ठ}}$;
(२ − २ठ − ण + २ड)	,,	$+\frac{२}{३\text{ठ}^{२}}-\frac{२५}{४\text{ठ}}$;
(२ए − ण)	,,	$-\frac{२}{९\text{ठ}^{२}}+\frac{२३}{३६\text{ठ}}$;
(२ − २ठ − ३ण)	,,	$-\frac{१}{४\text{ठ}}$;
(१ − ठ − ड)	,,	$+\frac{१}{४\text{ठ}}$;
(२ − २ठ − २ए − ण)	,,	$-\frac{१}{४\text{ठ}}$;
(२ − २ठ − २ए + ण)	,,	$+\frac{१}{४\text{ठ}}$;
(२ए − २ण)	,,	$१+९\text{ठ}^{४}$.

$$\frac{\text{व}}{\text{अ}} =$$

$$१-\tfrac{३}{४}\text{ल}^{२}-\tfrac{१}{२}\text{ठ}^{२}+\tfrac{२१}{४}\text{ठ}^{४}+\tfrac{४५}{६४}\text{ल}^{४}-\tfrac{३१५}{२५६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}$$
$$-\tfrac{३}{४}\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}+\tfrac{४५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}+\tfrac{४५}{१६}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}-\tfrac{९९}{५१२}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}+\tfrac{१}{८}\text{ठ}^{४}$$
$$+\text{इ कोभुणब}+\text{ठ}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ})\text{ब}-\tfrac{१}{४}\text{ल}^{२}\text{कोभु२एब}$$
$$+\tfrac{१५}{८}\text{ठइ कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\text{ब}-\tfrac{५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ण})\text{ब}$$
$$+(\tfrac{१९}{६}\text{ठ}^{३}-\tfrac{३}{१६}\text{ठल}^{२})\text{कोभु}(२-२\text{ठ})\text{ब}+\tfrac{२७३}{३२}\text{ठ}^{२}\text{इकोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण})\text{ब}$$
$$+\tfrac{१५}{४}\text{ठइ}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\text{ब}+\tfrac{३}{१६}\text{ठल}^{२}\text{कोभु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\text{ब}$$
$$+\tfrac{७}{२}\text{ठ}^{२}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ड})\text{ब}-\tfrac{१}{२}\text{ठ}^{२}\text{इं कोभु}(२-२\text{ठ}+\text{ड})\text{ब}$$
$$+\tfrac{३५}{८}\text{ठइइं कोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\text{ब}$$
$$-\tfrac{१५}{८}\text{ठइइंकोभु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\text{ब}$$
$$+\tfrac{९}{८}\text{ठइइं कोभु}(\text{ण}-\text{ड})\text{ब}-\tfrac{९}{८}\text{ठइइं कोभु}(\text{ण}+\text{ड})\text{ब}$$
$$+\tfrac{२७}{३२}\text{इं}^{२}\text{इ कोभु}(\text{ण}-२\text{ड})\text{ब}-\tfrac{२७}{३२}\text{इं}^{२}\text{इ कोभु}(\text{ण}+२\text{ड})\text{ब}.$$
$$-\tfrac{३}{२}\text{ठ}^{२}\text{इंकोभु ड ब}-\tfrac{१५}{१६}\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\text{ठ कोभु}(१-\text{ठ})\text{ब}$$

$-\frac{६३}{८}ई^{२}इ\,कोभु(२-२ठ-ण+२ड)ब-\frac{७}{६}ल^{२}इ\,कोभु(२ए-ण)ब$

$+\left(\frac{१०९}{६४}ठ^{२}ल^{२}+ठ^{२}इ^{२}+\frac{१५५}{१८}ठ^{४}-\frac{५}{२}ठ^{२}इ^{२}\right)कोभु(२-२ठ)ब$

$+\frac{१}{२}ठ^{२}इ^{२}\,कोभु२णब+\left(\frac{५}{८}ठ^{२}ल^{२}+\frac{५}{१६}ल^{४}\right)कोभु२एब$

$+\left(\frac{३९९}{१६}ठ^{३}इ+\frac{१४१}{३२}ठल^{२}इ+\frac{१५}{१६}ठइ^{३}-३ठई^{२}इ\right)$

$कोभु(२-२ठ-ण)ब$

$+\frac{१४७}{१६}ठ^{२}इ^{२}\,कोभु(२-२ठ-२ण)ब-\frac{६९}{६४}ठ^{२}ल^{२}\,कोभु(२-२ठ-२ए)ब$

$+\left(\frac{१३३}{८}ठ^{३}ई-\frac{७}{१६}ठल^{२}ई\right)कोभु(२-२ठ-ड)ब$

$+\frac{९}{१६}ठल^{२}ई\,कोभु(२ए-ड)ब$

$-\left(\frac{१९}{२४}ठ^{३}ई-\frac{३}{१६}ठल^{२}ई\right)कोभु(२-२ठ+ड)ब$

$-\frac{९}{१६}ठल^{२}ई\,कोभु(२ए+ड)ब$

$-\frac{२३}{४८}ठ^{३}इ\,कोभु(२-२ठ+ण)ब-\frac{७५}{६४}ठ^{३}इ\,कोभु(४-४ठ-ण)ब$

$+\frac{२५}{६४}\,\frac{अं}{अ}\,ठ^{२}\,कोभु(३-३ठ)ब\quad-\frac{१}{२}ठ^{४}\,कोभु(४-४ठ)ब$

$+\frac{१६९१}{६४}ठ^{२}इई\,कोभु(२-२ठ-ण-ड)ब$

$+\frac{११९३}{६४}ठ^{२}इई\,कोभु(ण-ड)ब$

$-\frac{३}{६४}ठ^{२}इई\,कोभु(२-२ठ-ण+ड)ब-\frac{८३७}{६४}ठ^{२}इई\,कोभु(ण+ड)ब$

$-\frac{८१}{१६}\,\frac{अं}{अ}\,ठ^{२}\,कोभु(१-ठ)ब+\frac{१५}{८}ठइ^{३}\,कोभु(२-२ठ-३ण)ब$

$+\frac{३}{८}ठ^{२}इ^{२}\,कोभु(२-२ठ+२ण)ब+\frac{१}{८}ठ^{२}ल^{२}\,कोभु(२-२ठ+२ए)ब$

$+\frac{५}{१६}ठ^{२}इई\,कोभु(२-२ठ+ण+ड)ब$

$-\frac{३५}{१६}ठ^{२}इई\,कोभु(२-२ठ+ण-ड)ब.$

$+\frac{३५}{४}ठइ^{२}ई\,कोभु(२-२ठ-२ण-ड)ब$

$-\frac{१५}{४}ठइ^{२}ई\,कोभु(२-२ठ-२ण+ड)ब.$

$+\frac{७}{१६}ठल^{२}ई\,कोभु(२-२ठ-२ए-ड)ब$

$-\frac{३}{१६}ठल^{२}ई\,कोभु(२-२ठ-२ए+ड)ब.$

$-\frac{१}{६४}ल^{४}\,कोभु४एब-\frac{९}{२५६}ठ^{२}ल^{२}\,कोभु(४-४ठ-२ए)ब.$

$-\frac{९}{४}ठ^{२}ई^{२}\,कोभु२डब+\frac{१७}{२}ठ^{२}ई^{२}\,कोभु(२-२ठ-२ड)ब.$

$+\frac{६३}{६४}ठल^{२}इ\,कोभु(२-२ठ-२ए+ण)ब$

$-\frac{१५}{६४}ठल^{२}इ\,कोभु(२-२ठ-२ए-ण)ब$

$+\frac{४७२५}{६४}ठई^{२}इ\,कोभु(२-२ठ-ण-२ड)ब$

$-\frac{७५}{१२८}ठई^{२}इ\,कोभु(२-२ठ-ण+२ड)ब$

$$+ \frac{१६१}{४८} \text{ठ} \text{ल}^{२} \text{इ} \text{कोभु} (२\text{ए} - \text{ण}) \text{ब} - \frac{४५}{३२} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ठ} \text{इं} \text{कोभु} (१ - \text{ठ} - \text{ड}) \text{ब}$$

$$- \frac{१४७}{३२} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ठ}^{२} \text{कोभु} (१ - \text{ठ}) \text{ब}$$

४२३ व्या लेखांत व ची पांचव्या पदवीचीं तीन पदें खालच्या पदामध्यें धनर्ण केलो आहेत.

$$+ \left(\tfrac{९०३}{१२८} \text{ठ} \text{ल}^{४} + \tfrac{६३}{२५६} \text{ठ} \text{ल}^{३} \text{इ} - \tfrac{११७}{१२८} \text{ठ} \text{ल}^{२} \text{इ}^{२} - \tfrac{३९}{५१२} \text{ठ}^{३} \text{ल}^{२}\right)$$
$$\text{कोभु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ए}) \text{ब}.$$

$$+ \left(\tfrac{५२८९}{१२८} \text{ठ}^{३} \text{इ}^{२} - \tfrac{७७}{१६} \text{ठ} \text{ल}^{२} \text{इ}^{२}\right) \text{कोभु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण}) \text{ब}.$$

$$- \tfrac{२२३}{३२} \text{ठ}^{२} \text{ल}^{२} \text{इं} \text{कोभु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ए} - \text{ड}) \text{ब}$$
$$+ \tfrac{११५}{३२} \text{ठ}^{२} \text{ल}^{२} \text{इं} \text{कोभु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ए} + \text{ड}) \text{ब}.$$

$$+ \tfrac{७}{२} \text{ठ}^{२} \text{इ}^{२} \text{इं} \text{कोभु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण} - \text{ड}) \text{ब}$$
$$- \tfrac{९}{२} \text{ठ}^{२} \text{इ}^{२} \text{इं} \text{कोभु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ण} + \text{ड}) \text{ब}.$$

$$+ \tfrac{२४५}{३२} \text{ठ} \text{ल}^{२} \text{इ}^{२} \text{कोभु} (२\text{ए} - २\text{ण}) \text{ब} + \frac{२१}{३२} \frac{\text{अं}}{\text{अ}} \text{ठ}^{२} \text{इ} \text{कोभु} (१ - \text{ठ} - \text{ण}) \text{ब}$$

$$+ \tfrac{८१}{१२८} \text{ठ} \text{इं}^{२} \text{ल}^{२} \text{कोभु} २\text{ड} \text{ब} - \tfrac{१५१}{६४} \text{ठ} \text{इं}^{२} \text{ल}^{२} \text{कोभु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ए} - २\text{ड}) \text{ब}.$$

$$+ \left(१२ \text{ठ}^{४} \text{इं} - \tfrac{९}{४} \text{ठ}^{२} \text{ल}^{२} \text{इं} - \tfrac{९}{२} \text{ठ}^{२} \text{इ}^{२} \text{इं}\right) \text{कोभु} \text{ड} \text{ब}.$$

(ह्या पांचव्या पदवीच्या पदामध्ये 'त' प्रेरणेच्या संकलनाची शून्य केंद्रगुणाची पांचव्या पदवीच्या पदाची दुप्पट घ्यावो तेव्हां (व५) चो पांचव्या पदवीची 'कम' करिता आवश्यक असलेली पदें प्राप्त होतील.)

(कम) ची किंमत

४५२. कम चें सूक्ष्मांश समीकरण आतां आपण चवथ्या पदवीनें सोडवू. ४११ व्या लेखांत जे कम चे सामान्य स्वरूपाचें सूक्ष्मांश समीकरण आहे, त्यांतील एक एक पद घेऊन त्याची व्यक्त किंमत तयार करून हें समीकरण लिहिले पाहिजे. ह्या सामान्य पदामध्ये व ची आणि त प्रेरणेच्या संकलनाचीं पदें आहेत. कम च्या चवथ्या पदवींकरितां चवथ्या पदवीची सर्व पदें आणि पांचव्या पदवीची ० समीप केंद्रगुणाची पदें गोळा करावीं लागतील. त चे संकलन पांचव्या पदवीचें खेरीजकरून बाकी सर्व पदे तयार झालीं आहेत. संकलनाच्या पांचव्या पदवीकरितां त प्रेरणेचीं ६ व्या पदवीचीं पदें जमा केली पाहिजेत. हें कार्य आतां आपणास करणें आहे. कम च्या सामान्य स्वरूपांत आणि त च्या सामान्य स्वरूपात कांहीं अवयव दोहोंत साधारण

आहेत, त्यामुळें एक कार्य करितांना दुसरें सुलभ होतें. म्हणून हीं दोन्हीं कार्यें सुरू करूं. त्यासाठी कम च्या आणि त च्या पदांना क्रमांक देऊं. कम च्या चवथ्या पदवीच्या ५ $(व_{१})^{४}$ ह्या पदाला प्रथम पद म्हणूं. सामान्य स्वरूपांत चवथ्या आणि पांचव्या पदवीची मिळून २६ पदें आहेत. त प्रेरणेचें पद तयार करितांना कम चें हीं पद तयार करू.

४५३. त प्रेरणेचें सामान्य स्वरूप मागे दिलेलें नाहीं. ते स्वरूप ३९९ व्या लेखांतील (१५) [२] ह्या अंकी जो पदसंघ दिला आहे त्याला ३९६ व्या लेखांतील (७) ह्या अंकीच्या पद समूहानें गुणिल्यानें येईल. ३९९ व्या लेखांतील पदसंघास $ठ^{३}स्थ$ हा गुणक आहे. त्याची व्यवत किमत $ठ^{३} - ३ ठ^{३}इ^{२} + ३ ठ^{३}इ^{४}$ हीं आहे तरी प्रथम $ठ^{३}$ एवढाच गुणक घेऊन पदें काढितो. आणि ३९६ व्या लेखातील पहिलें पद मु (२—२ठ)ब हे गुणावयास घेतो. म्हणजे $+ठ^{३}$ मु (२—२ठ) ब या पदानें गुणावयास आरंभ करितों.

(१) $+ ६ ठ^{३}$ मु (२ — २ ठ) ब $(व_{४})$ या पासून निघालेलीं पदें.

$+ (\frac{३}{२} ठ^{४} इ^{२})$ मु (२ — २ ठ — २ ण) ब $+ (\frac{१५}{३६} ठ^{२} ल^{४} + \frac{१०८३}{२५६} ठ^{४} ल^{२})$
मु (२ — २ ठ — २ ए) ब.

$+ (\frac{२०९}{४} ठ^{५} इं - \frac{१५}{८} ठ^{३} ल^{२} इं)$ मु ड ब $+ \frac{५१}{२} ठ^{४} इं^{२}$ मु२ ड ब.

$- \frac{२७}{३६} ठ^{३} ल^{२} इं$ मु (२ — २ ठ — २ ए — ड) ब
$+ \frac{२७}{३६} ठ^{३} ल^{२} इं$ मु (२ — २ ठ — २ ए + ड) ब.

(२) $- \frac{१०५}{२} ठ^{३}$ मु (२ — २ ठ) $(व_{१})^{४}$ ....त १

$(व_{१})^{४} = \frac{३}{८} इ^{४} + \frac{१}{२} इ^{४}$ कोमु२ ण ब $+ \frac{१}{८} इ^{४}$ कोमु४ ण ब

ह्याला $- \frac{१०५}{२} ठ^{३}$ मु (२ — २ ठ) ब यानें गुणिल्यानें
$- \frac{१०५}{८} ठ^{३} इ^{४}$ मु (२ — २ ठ — २ ण) ब ....त २

आणि + ५ नीं गुणिल्यानें, क म चीं पदें होतात.

$+ \frac{१५}{८} इ^{४} + \frac{५}{२} इ^{४}$ कोमु २ ण ब $+ \frac{५}{८} इ^{४}$ कोमु ४ ण ब ....कम १

(३) $- १८ ठ^{३} इं$ मु (२ — २ ठ) ब मु ड ब $(क_{१}) (व_{१})$
$+ \frac{९}{२} ठ^{३} इ^{२} इं$ मु (२ — २ ठ — २ ण — ड) ब.
$- \frac{९}{२} ठ^{३} इ^{२} इं$ मु (२ — २ ठ — २ ण + ड) ब. ....त ३

(४) $९० ठ^{३} इं$ मु (२ — २ ठ) ब कोमु ड ब $(व_{१})^{३}$ इष्ट पद नाहीं.

(५) $-$ १५ $ठ^{२}$ भु (२ $-$ २ ठ) ब $(व_{२})(व_{२})$.

$+\ ३\ (व_{२})(व_{२}) =$

$+ \frac{५७}{३२}ल^{४} + \frac{१}{४}ठ^{४} + \frac{३}{४}ठ^{२}ल^{२} + \frac{६७५}{१२८}ठ^{२}इ^{२}$

$+ \frac{३}{२}ठ^{४}$ कोभु (४ $-$ ४ ठ) ब $+ \frac{३}{३२}ल^{४}$ कोभु ४ एब.

$+ \frac{६७५}{१२८}ठ^{२}इ^{२}$ कोभु (४ $-$ ४ ठ $-$ २ ण) ब $+ \frac{४५}{८}ठ^{३}$ इ कोभु ब

$+ (\frac{१}{८}ल^{४} + \frac{३}{४}ठ^{२}ल^{२})$ कोभु २ ए ब

$+ \frac{४५}{८}ठ^{३}$ इ कोभु (४ $-$ ४ ठ $-$ ण) ब

$- (\frac{१}{२}ठ^{२}ल^{२} + ३ठ^{४})$ कोभु (२ $-$ २ ठ) ब

$- \frac{३}{४}ठ^{२}ल^{२}$ कोभु (२ $-$ २ ठ $-$ २ ए) ब

$- (\frac{१३५}{१६}ठल^{२}इ + \frac{४५}{८}ठ^{३}इ)$ कोभु (२ $-$ २ ठ $-$ ण) ब

$- \frac{३}{४}ठ^{२}ल^{२}$ कोभु (२ $-$ २ ठ $+$ २ ए) ब.

$- \frac{४५}{३२}ठल^{२}इ$ कोभु (२ $-$ २ ठ $-$ २ ए $-$ ण) ब

$- \frac{४५}{३२}ठल^{२}इ$ कोभु (२ $-$ २ ठ $+$ २ ए $-$ ण) ब.

$+ \frac{१३५}{३२}ठल^{२}इ$ कोभु (२ $-$ २ ठ $-$ २ ए $+$ ण) ब ....कम ३

ह्या पदसंघाला $-$ ५ $ठ^{२}$ भु (२ $-$ २ठ) ब ह्या पदानें गुणिलें म्हणजे त प्रेरणेचीं ६ व्या पदवीचीं पदें मिळतील.

$+ \frac{३३७५}{२५६}ठ^{४}इ^{२}$ भु (२ $-$ २ ठ $-$ २ ण) ब

$- (\frac{४५}{१६}ठ^{२}ल^{४} + \frac{१५}{८}ठ^{४}ल^{२})$ कोभु (२ $-$ २ ठ $-$ २ ए) ब .. त ५

(६) $-$ ३० $ठ^{२}$ भु (२$-$२ ठ) ब $(व_{१})(व_{३})$

$+\ ६\ (व_{१})(व_{३}) ==$

$+ (\frac{१९}{२}ठ^{३}इ - \frac{१}{१६}ठल^{२}इ)$ कोभु (२$-$२ ठ$-$ण) ब

$+ \frac{७५९}{३२}ठ^{२}इ^{२}$ कोभु (२$-$२ठ) ब

$+ (\frac{१९}{२}ठ^{३}इ - \frac{१}{१६}ठल^{२}इ)$ कोभु (२$-$२ ठ$+$ण) ब

$- \frac{१५}{८}ठ^{२}इ^{२}$ कोभु (२$-$२ ठ$+$२ण) ब

$+ (\frac{८१९}{३२}ठ^{२}इ^{२}$ कोभु (२$-$२ ठ$-$ण) ब

$+ \frac{४५}{४}ठइ^{३}$ कोभु (२$-$२ठ$-$३ण) ब

$+ \frac{४५}{४}ठइ^{३}$ कोभु (२$-$२ठ$-$ण) ब $+ \frac{८}{३२}इ'^{२}इ^{२}$ कोभु (२ ण$-$२ड) ब

$+ \frac{१७}{२}ल^{२}इ^{२}$ कोभु २ एब $- \frac{१७}{२}ल^{२}इ^{२}$ कोभु (२ ए$-$२ ण) ब

$- \frac{८१}{३२}इ^{२}इ'^{२}$ कोभु (२ण $+$ २ड) ब

$+ \frac{१}{१६}ठल^{२}इ$ कोभु (२$-$२ ठ$-$२ए$-$ण) ब

$+ \frac{१}{१६}ठल^{२}इ$ कोभु (२$-$२ ठ$-$२ ए $+$ ण) ब

$+ \frac{२१}{२}ठ^{२}इइ'$ कोभु (२$-$२ठ$-$ण$-$ड) ब

$+ \frac{२७}{२}ठइ^{२}इ'$ कोभु (२ण$-$ड) ब

$$
\left.\begin{array}{l}
+\frac{२१}{२} ठ^{२}इइं\ कोभु\ (२-२ण+ण-ड)\ ब \\
\qquad\qquad -\frac{२७}{८} ठइ^{२}इं\ कोभु\ (२ण+ड)\ ब \\
-\frac{३}{२} ठ^{२}इइं\ कोभु\ (२-२ठ-ण+ड)\ ब \\
\qquad\qquad -\frac{४५}{८} ठइ^{२}इं\ कोभु\ (२-२ठ+ड)\ ब \\
-\frac{३}{२} ठइ^{२}इं\ कोभु\ (२-२ठ+ण+ड)\ ब \\
\qquad\qquad +\frac{१०५}{८} ठइ^{२}इं\ कोभु\ (२-२ठ-ड)\ ब \\
+\frac{१०५}{८} ठइ^{२}इं\ कोभु\ (२-२ठ-२ण-ड)\ ब \\
\qquad\qquad -\frac{४५}{१६}\frac{अं}{अ} ठइ\ कोभु\ (१-ठ-ण)\ ब \\
-\frac{४५}{८} ठइ^{२}इं\ कोभु\ (२-२ठ-२ण+ड)\ ब \\
\qquad\qquad -\frac{४५}{१६}\frac{अं}{अ} ठइ\ कोभु\ (१-ठ+ण)\ ब\ \ldots\ कल\ ५
\end{array}\right.
$$

वरच्या पदसंघाला — ५ $ठ^{२}$ भु (२–२ ठ) ह्यानें गुणिल्यानें.

$$
\begin{array}{l}
+\frac{८५}{४} ठ^{२}ल^{२}इ^{२}\ भु\ (२-२ठ-२ए)\ ब - \frac{३७५}{८} ठ^{३}इ^{२}\ इं.भुडब \\
-\frac{१३५}{१६} ठ^{३}इ^{२}\ इं\ भु\ (२-२ठ-२ण+ड)\ ब \\
\qquad\qquad +\frac{२२५}{३२}\frac{अं}{अ} ठ^{३}\ इंभु\ (१-ठ-ण)\ ब \\
+\frac{१३५}{१६} ठ^{३}इ^{२}\ इं\ भु\ (२-२ठ-२ण-ड)\ ब \\
-\frac{४०५}{६४} ठ^{२}इ^{२}इं^{२}\ भु\ (२-२ठ-२ण+२ड)\ ब \\
\qquad\qquad +\frac{४०५}{६४} ठ^{२}इ^{२}इं^{२}\ भु\ (२-२ठ-२ण-२ड)\ ब\ \ldots\ त\ ६
\end{array}
$$

(७) + १८ $ठ^{२}$ इं भु (२–२ ठ) कोभुडब ($व_{३}$).

$$+ १८ ठ^{४}\ इं^{२}भु\ २डब \qquad \ldots\ त\ ७$$

(८) +९० $ठ^{२}$ भु (२–२ ठ) ब $(व_{१})^{२}$ $(व_{२})$. ह्या पदांत दोन अवयव आहेत ते असे— १२ $(व_{१})^{२}$ $(व_{२})$ हा एक आणि दुसरा–$\frac{१५}{२}$ $ठ^{२}$ भु(२–२ठ)ब. पहिला अवयव कम चें दुसरें पद आहे तो प्रथम तयार करूं.

$$—१२\ (व_{१})^{२}\ (व_{२}) = —६\ इ^{२}\ (व_{२}) — ६\ इ^{२}\ (व_{२})\ कोभु\ २\ ण\ ब.$$

$$
= \left\{\begin{array}{l}
+\frac{१}{२}ल^{२}इ^{२} + ३ठ^{२}इ^{२} — ६ठ^{२}इ^{२}\ कोभु\ (२—२ठ)\ ब \\
+\frac{३}{२}ल^{२}इ^{२}\ कोभु२एव + (\frac{१}{२}ल^{२}इ^{२} + ३ठ^{२}इ^{२})\ कोभु\ २णब \\
—३\ ठ^{२}\ इ^{२}\ कोभु\ (२—२ठ—२ण)\ ब \\
\qquad\qquad —३\ ठ^{२}\ इ^{२}\ कोभु\ (२—२ठ+२ण)\ ब \\
+\frac{३}{४}ल^{२}इ^{२}\ कोभु\ (२ए—२ण)\ ब \\
\qquad\qquad +\frac{३}{४}ल^{२}इ^{२}\ कोभु\ (२ए+२ण)\ ब
\end{array}\right.
$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{४५}{८} ठइ^{३} कोभु\ (२-२ठ+ण)\ ब \\ \qquad\qquad -\frac{४५}{८} ठइ^{३} कोभु (२-२ठ-३ण)\ ब \\ -\frac{४५}{४} ठइ^{३} कोभु\ (२-२ठ-ण)\ ब \qquad कम_{२} \end{array}\right.$$

ह्या पदसंघाला $-\frac{१५}{२}ठ^{२}$ भु (२—२ठ) ब नें गुणिलें तेव्हां

$$-\frac{४५}{८}ठ^{२}ल^{२}इ^{२}मु\ (२-२ठ-२ए)\ ब$$
$$-\left(\frac{१३५}{८}ठ^{२}ल^{२}इ^{२}+\frac{४५}{४}ठ^{४}इ^{२}\right) भु\ (२-२ठ-२ण)\ ब \qquad \ldots\ त८$$

$$(९) + \frac{९}{२}ठ^{३}ई भु\ (२-२ठ)\ ब भुडब\ (क_{२})$$
$$+\frac{३७}{३२}ठ^{३}इ^{२}ई भु\ (२-२ठ-२ण+ड)\ ब$$
$$-\frac{३७}{३२}ठ^{३}इ^{२}ई भु\ (२-२ठ-२ण-ड)\ ब$$
$$+\frac{९}{३२}ठ^{३}ल^{२}ई भु\ (२-२ठ-२ए+ड)\ ब$$
$$-\frac{९}{३२}ठ^{३}ल^{२}ई भु\ (२-२ठ-२ए-ड)\ ब$$
$$-\frac{९९}{३२}ठ^{५}ई भु डब \qquad \ldots\ त९$$

(१०) $-९०ठ^{२}$ई भु (२—२ठ) ब कोभुडब $(व_{१})$ $(व_{२})$ पद नाहीं.

$$(११)\ -९ठ^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ)\ ब\ (व_{२})$$
$$+\frac{९}{८}ठ^{२}ल^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ-२ए)ब \qquad \ldots\ त११$$

$$(१२)\ +\frac{४५}{२}ठ^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ)\ ब \times \left(\frac{१}{२}इ^{२}+\frac{१}{२}इ^{२}कोभु२णब\right)$$
$$+\frac{४५}{८}ठ^{२}इ^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ-२ण)\ ब \qquad \ldots\ त१२$$

$$(१३)\ +\frac{२७}{१}ठ^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ)\ ब \times (व_{२})\ कोभु२ डब$$
$$-\frac{३७}{३२}ठ^{२}ल^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ-२ए-२ड)\ ब$$
$$-\frac{३७}{३२}ठ^{२}ल^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ-२ए+२ड)\ ब \qquad त१३$$

$$(१४)\ -\frac{१०५}{२}ठ^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ)\ ब को भु२ डब \times$$
$$\left(\frac{१}{२}इ^{२}+\frac{१}{२}इ^{२} को भु२ण ब\right)$$
$$-\frac{१०५}{१६}ठ^{२}इ^{२}ई^{२}भु (२-२ठ-२ण-२ड)\ ब$$
$$-\frac{१०५}{१६}ठ^{२}इ^{२}ई^{२}भु\ (२-२ठ-२ण-२ड)\ ब \qquad त१४$$

४५४. त प्रेरणेच्या ६ व्या पदवीची पदें ज्या दोन पदसंघाच्या गुणाकारानें प्राप्त व्हावयाचीं त्यांपैकीं भु (२ ब—२ बं) ह्याच्या विस्तारांतील पदांपैकीं पहिलें पद भु (२—२ठ) ब यानें ३९९ व्या लेखांतील (१५) [२] यास गुणून वरच्या लेखांत इष्ट पदें काढिली. आता भु (२ ब‒ २ बं) ह्याच्या विस्तारांतील दुसरें

आणि तिसरें पद अनुक्रमें—२ ई भु (२—२ठ+ड) ब आणि +२ ई भु (२—२ठ—ड) ब ह्या पदांनी गुणून इष्ट पदें काढूं. तीं क्रमवार.

(१) अ − १२ ठ² ई भु (२ − २ ठ + ड) ब × (व₃)
  + २१ ठ⁴ ई² भु २ डब ... त १५

(१) ब + १२ ठ² ई भु (२−२ ठ − ड) ब × (व₃)
  + ३ ठ⁴ ई² भु २ डब ... त १६

(२) (३) + ३०(व₁)³ आणि—९(व₁) ई² यापासून पद प्राप्त होत नाहीं.

(४) अ + ३६ ठ² ई² भु (२—२ठ + ड) ब × (व₂) को भु ड ब
  = − १८ (व₂) ठ² ई² { भु (२—२ठ)
   − भु (२—२ ठ + २ड) ब }
− ९ ठ⁴ ई² भु२ ड ब + $\frac{3}{4}$ ठ² ल² ई² भु (२—२ ठ — २ए) ब
+ $\frac{3}{4}$ ठ² ल² ई² भु (२—२ ठ — २ए + २ ड) ब ... त १७

(४) ब + ३६ ठ² ई² भु (२—२ ठ — ड) ब × (व₂) को भु ड ब
  = + १८ ठ² ई² (व₂) {भु (२—२ ठ) ब
   + भु (२—२ ठ — २ड) ब}
— ९ ठ⁴ ई² भु२ ड ब — $\frac{3}{4}$ ठ² ल² ई² भु (२—२ ठ — २ए) ब
— $\frac{3}{4}$ ठ² ल² ई² भु (२—२ ठ — २ए — २ड) ब ... त १८

(५) + $\frac{3}{2}$ ठ (क₁) ई भु ड ब   पद नाहीं

(६) अ + ९० ठ² ई² भु (२—२ ठ + ड) को भु ड ब (व₁)²
  + $\frac{४५}{४}$ ठ² इ² ई² भु (२—२ ठ — २ण) ब
   + $\frac{४५}{४}$ ठ² ई² इ² भु (२—२ ठ — २ण + २ ड) ब

(६) ब — $\frac{४५}{४}$ ठ² इ² ई भु (२—२ ठ — २ण) ब
  — $\frac{४५}{४}$ ठ² इ² ई² भु (२—२ ठ — २ ण — २ ड) ब त १९-२०

(७) + २७ (व₁) इ² को भु२ ड ब   पद नाहीं.

(८) अ + ६० ठ² ई भु (२—२ ठ + ड) ब (व₁) (व₂)
  + $\frac{२२५}{८}$ ठ³ इ² ई भु ड ब

(८) ब + $\frac{२२५}{८}$ ठ³ इ² ई भु ड ब   त २१—२२

आतां—४ इं^{२} भु (२—२ ठ) ब ह्या पदानें, ले. ३९९ (१५) [२] ह्या पद संघास गुणावयाचे.

(९) — २४ ठ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ) ब (व$_{२}$)
+ ३ ठ^{२} ल^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ — २ए) ब त २३

(१०) + ६० ठ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ) ब × ($\frac{१}{२}$ इ^{२} + $\frac{३}{२}$ इ^{२} को भु२ णब)
+ १५ ठ^{२} इ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ — २ ण) त २४

(११) अ + $\frac{३}{२}$ ठ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ + २ ड) ब × (व$_{२}$)
+ $\frac{३}{४}$ ठ^{४} इं^{२} भु२ ड ब — $\frac{९}{१६}$ ठ^{२} ल^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ — २ए + २ड) ब

(११) ब + $\frac{३९}{२}$ ठ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ — २ड) ब × (व$_{२}$)
— $\frac{३९}{४}$ ठ^{४} इं^{२} भु२ डब — $\frac{३९}{१६}$ ठ^{२} ल^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ — २ए — २ड) ब
त २५–२६

(१२) अ — $\frac{४५}{४}$ ठ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ + २ ड) ब
($\frac{१}{२}$ इं^{२} + $\frac{१}{२}$ इ^{२} को भु२ ण ब)
— $\frac{४५}{१६}$ ठ^{२} इं^{२} इ^{२} भु (२ — २ ठ — २ण + २ ड) ब

(१२) ब — $\frac{१९५}{४}$ ठ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ — ड) ब ($\frac{१}{२}$ इ^{२} + $\frac{१}{२}$ इ^{२} को भु२ ण ब)
— $\frac{१९५}{१६}$ ठ^{२} इ^{२} इं^{२} भु (२ — २ ठ — २ ण — २ ड) ब
त २७–२८

(१३) — ३६ ठ^{३} इं को (२ — २ ठ) ब को भु ड ब (क$_{१}$) (व$_{१}$)
+ ३६ ठ^{३} इ^{२} इं को भु (२ — २ ठ) ब को भु ड ब भु२ ण ब
= — ९ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२ — २ ठ — २ ण + ड) ब
— ९ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२ — २ ठ — २ ण — ड) ब त २९

४५५. वरच्या गुणाकारांत, भु (२ब—२बं) च्या दुसऱ्या पदर्वापर्यंतच्या सर्व पदांनीं ३९९ (१५) [२] च्या पदांनी गुणिलें. आता राहिलेल्या ३ पदांनीं म्हणजे — $\frac{३}{२}$ ठ^{२} + ६ ठ^{२} (व$_{१}$) — $\frac{९}{२}$ ठ^{२} इं को भु ड ब ह्या पदांनी भु२ (ब — बं) याच्या पदविस्तारातील पदाना गुणू.

(१४) + ९ ठ^{३} इं को भु (२ — २ ठ) को भु ड ब (क$_{२}$)
— $\frac{२७}{८}$ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२ — २ ठ — २ ण) ब × को भु ड ब
— $\frac{९}{८}$ ठ^{३} ल^{२} इं भु (२ — २ ठ — २ ए) ब × को भु ड ब
— $\frac{२७}{१६}$ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२ — २ ठ — २ ण — ड) ब
— $\frac{२७}{१६}$ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२ — २ ठ — २ ण + ड) ब

— $\frac{९}{१६}$ ठ^{२} ल^{२} इं भु (२ — २ठ — २ए — ड) ब

— $\frac{९}{१६}$ ठ^{३} ल^{२} इं भु (२ — २ठ — २ए + ड) ब त ३०

(१५) — ९ ठ^{३} इं^{२} को भु (२—२ठ + ड) ब को भु ड ब (क$_{१}$) पद नाहीं.

(१६) + २७ ठ^{३} इ^{२} कोभु (२—२ठ —ड) ब कोभुडब (क$_{१}$) पद नाहीं.

(१७) — १२ ठ^{३} को भु (२—२ठ) ब (व$_{१}$) (क$_{२}$) पद नाहीं

(१८) + १२ ठ^{३} इं को भु (२—२ठ + ड) ब × (क$_{१}$) (व$_{१}$)

+ ६ ठ^{३} इं इ^{२} भु (२—२ठ — २ण + ड) ब त ३१

(१९) — ३६ ठ^{३} इं को भु (२—२ठ —ड) ब × (क$_{१}$) (व$_{१}$)

— १८ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२ — २ठ — २ण — ड) ब त ३२

(२०) + ३ ठ^{३} को भु (२—२ठ) ब × (क$_{३}$)

+ $\frac{२३१}{३२}$ ठ^{५} इ भु ड ब + $\frac{३३}{३२}$ ठ^{५} इं भु ड ब त ३३

(२१) + ३ ठ^{४} भु (२—२ठ) × ४ इ^{२} भु^{२} ण ब

— ३ ठ^{४} इ^{२} भु (२—२ठ — २ण) ब त ३४

(२२) —३ ठ^{३} इं को भु (२—२ठ + ड) ब (क$_{२}$)

+ $\frac{९}{८}$ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२—२ठ — २ण + ड) ब

+ $\frac{३}{८}$ ठ^{२} ल^{२} इं भु (२—२ठ — २ए + ड) ब

— $\frac{३३}{१६}$ ठ^{५} इं भु ड ब त ३५

(२३) + ६ ठ^{३} इं को भु (२—२ठ — ड) ब (क$_{२}$)

— $\frac{९}{४}$ ठ^{३} इ^{२} इं भु (२—२ठ — २ण — ड) ब

— $\frac{३}{४}$ ठ^{३} ल^{२} इं भु (२—२ठ — २ए — ड) ब

+ $\frac{३३}{८}$ ठ^{५} इं भु ड ब त ३६

पुढच्या दोन पदांत इष्ट पद नाहीं.

४५६. लेखांक ३९९ मध्यें जो स्थ हा गुणक आहे, त्याचें व्यक्त स्वरूप (ठ^{३}—३ ठ^{२} इ^{२} + ३ ठ^{२} इं^{२}) असें आहे. ह्यात ज्या तीन संख्या आहेत त्यापैकीं ठ^{३} घेऊन वरच्या लेखांमधील पदें काढिली. आतां —३ ठ^{२}इ^{२} आणि + ३ ठ^{२}इं^{२} हे गुणक घेऊन पदें काढूं.

(२४) —१८ ठ^{२} इ^{२} भु (२—२ठ) ब (व$_{२}$)

+ $\frac{९}{४}$ ठ^{२} ल^{२} इ^{२} भु (२—२ठ — २ए) ब त ३७

(२५) + ४५ ठ^{२} इ^{२} भु (२—२ठ) ब (व$_{१}$)^{२}

+ $\frac{४५}{४}$ ठ^{२} इं^{४} भु (२—२ठ — २ण) ब त ३८

$$(\text{२६})\ +\ \text{१८}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ})\,\text{ब}\,(\text{व}_{\text{२}})$$

$$-\ \frac{\text{३}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए})\,\text{ब} \qquad \text{त ३९}$$

$$(\text{२७})\ -\ \text{४५}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ})\,\text{ब}\,(\text{व}_{\text{१}})^{\text{२}}$$

$$-\ \frac{\text{४५}}{\text{४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण})\,\text{ब} \qquad \text{त ४०}$$

ह्यापुढे पद प्राप्त होत नाहीं. एथपर्यंत निघालेली त प्रेरणेची पदें खालीं एकत्र लिहिलीं आहेत. ह्यामध्यें त च्या २ ऱ्या पदांत सहाव्या पदवीची ३ पदें निघतात (लेख ४०४ पहा) तीं यामध्यें घेतलीं आहेत.

$$\frac{\text{त}}{\text{थ}\,\text{ज}^{\text{२}}\,\text{व}^{\text{२}}} = \left\{\begin{array}{l}
+\left(\frac{\text{३११}}{\text{२५६}}\,\text{ठ}^{\text{४}}\,\text{इ}^{\text{२}} - \frac{\text{१५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{४}} - \frac{\text{१३५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\right. \\
\qquad\qquad \left. +\ \frac{\text{७५}}{\text{१६}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\right)\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण})\,\text{ब} \\
+\left(\frac{\text{६०३}}{\text{२५६}}\,\text{ठ}^{\text{४}}\,\text{ल}^{\text{२}} - \frac{\text{१५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{४}} + \frac{\text{२७}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}\right. \\
\qquad\qquad \left. +\ \frac{\text{१५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\right)\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए})\,\text{ब} \\
+\ \frac{\text{१५}}{\text{१६}}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}\,\text{इं}\,\text{भु}\,(\text{१}-\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब} \\
\qquad +\ \frac{\text{४५}}{\text{१६}}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}\,\text{इं}\,\text{भु}\,(\text{१}-\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब} \\
+\ \frac{\text{७२३}}{\text{१२८}}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{इ}\,\text{भु}\,(\text{१}-\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब} \\
\qquad\qquad\qquad +\ \text{४२}\,\text{ठ}^{\text{४}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,\text{२ड}\,\text{ब} \\
-\ \frac{\text{६०३}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण}-\text{ड})\,\text{ब} \\
-\ \frac{\text{५०१}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण}+\text{ड})\,\text{ब} \\
-\ \frac{\text{५१}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इं}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए}-\text{ड})\,\text{ब} \\
\qquad -\ \frac{\text{१५}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इं}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए}+\text{ड})\,\text{ब} \\
-\ \frac{\text{११२५}}{\text{६४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण}-\text{२ड})\,\text{ब} \\
\qquad -\ \frac{\text{२८५}}{\text{६४}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ण}+\text{२ड})\,\text{ब} \\
-\ \frac{\text{१७७}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए}-\text{२ड})\,\text{ब} \\
\qquad +\ \frac{\text{२७}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इं}^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए}+\text{२ड})\,\text{ब} \\
+\left(\frac{\text{४२३}}{\text{३२}}\,\text{ठ}^{\text{५}}\,\text{इं} + \frac{\text{२१}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इं} + \frac{\text{७५}}{\text{८}}\,\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}\right)\text{भु}\,\text{ड}\,\text{ब} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{सहावी पदवी}]
\end{array}\right.$$

४५७. वरच्या त प्रेरणेच्या पदसंघाचें संकलन करावयाचें, म्हणजे पदगुणकाला केंद्रगुणकानें भागावयाचें. ह्या संकलनांत भुजज्येच्या स्थानीं ऋण कोभुजज्या येतें. त्यापक्षीं पदांचीं चिन्हें जशीच्या तशी ठेवून सर्व संकलन ऋण म्हणूं. संकलन

गुणक मुख गणनेनें तयार करावा. त्यांत ए=ण=१ आणि ड=ठ घ्यावा. या-प्रमाणें कृती करून आलेले संकलन खालीं लिहिले आहे. ४६८ व्या लेखांत जे त प्रेरणेचें संकलन आहे त्यांतील शेवटचीं सात पदें पांचव्या पदवीचीं हीं खालच्या पदांत मिळवा-वयाची आहेत. त्या पदासुद्धां वरच्या पदसंघाचें संकलन खालीं लिहिले आहे.

$$
\begin{aligned}
-\underline{\text{ऊँ}}\left(\frac{त}{(थ\, ज^{२} व^{२})}\right) सू\, ब =\; & \\
+\left(\tfrac{१५}{१६} ठ\, इ^{४} + \tfrac{१३५}{१६} ठ\, इ^{२} ल^{२} - \tfrac{८५४७}{५१२} ठ^{३} इ^{२} - \tfrac{७५}{१६} ठ\, इ^{२} इं^{२}\right) & \\
(२ - २ठ - २ण)\, ब & \\
+\left(\tfrac{१५}{१६} ठ\, ल^{४} - \tfrac{५१३}{५१२} ठ^{३} ल^{२} + \tfrac{२७}{१६} ठ\, ल^{२} इ^{२} - \tfrac{१५}{१६} ठ\, ल^{२} इं^{२}\right) & \\
को\, भु\, (२ - २ठ - २ए)\, ब & \\
+\left(\tfrac{४२३}{३२} ठ^{४} इं + \tfrac{२१}{८} ठ^{२} ल^{२} इं + \tfrac{७५}{८} ठ^{२} इ^{२} इं\right) को\, भु\, ड\, ब & \\
-\tfrac{६१३}{१२८} \frac{अं}{अ} ठ^{२} इ\, को\, भु\, (१ - ठ - ण)\, ब & \\
+ २१ ठ^{३} इं^{२} को\, भु\, २ड\, ब & \\
+\tfrac{२७१}{३२} ठ^{२} इ^{२} इं\, को\, भु\, (२ - २ठ - २ण - ड)\, ब & \\
+\tfrac{४४१}{३२} ठ^{२} इ^{२} इं\, को\, भु\, (२ - २ठ - २ण + ड)\, ब & \\
+\tfrac{३}{३२} ठ^{२} ल^{२} इं\, को\, भु\, (२ - २ठ - २ए - ड)\, ब & \\
+\tfrac{३३}{३२} ठ^{२} ल^{२} इं\, को\, भु\, (२ - २ठ - २ए + ड)\, ब & \\
+\tfrac{११२५}{२५६} ठ\, इ^{२} इं^{२} को\, भु\, (२ - २ठ - २ण - २ड)\, ब & \\
+\tfrac{१७७}{१२८} ठ\, ल^{२} इं^{२} को\, भु\, (२ - २ठ - २ए - २ड)\, ब & \\
+\tfrac{४५}{३२} \frac{अं}{अ} ठ\, इ\, इं\, को\, भु\, (१ - ठ - ण - ड)\, ब &
\end{aligned}
$$

[पांचवी पदवी]

४४८ व्या लेखांतील (व) च्या सूक्ष्मांश समीकरणांत वरच्या पदसंघाची दुप्पट घेणें. आणि तीच दुप्पट (व) च्या किंमतीत म्हणजे ४५१ व्या लेखांत शेवटीं घेणें म्हणजे व ची पांचवी पदवी ० केंद्रगुणाची तयार होईल.

वरच्या संकलनांतील तीन पदांचें संकलन करितां येत नाहीं कारण हीं पदें ६ व्या पदवींतील वेचून घेतलेली आहेत. शिवाय त्यांचे केंद्रगुणक शून्याच्या अति-सन्निध आहेत. ठ—ड यांची किंमत शून्य नाहीं ए —ण= १—१ नाहीं अनेक पदांच्या वजाबाक्या आहेत. म्हणून २—२ ठ—२ ण+२ ड ; २—२ ठ—२ ए+२ ड ; १—ठ—ण+ड ह्या केंद्रगुणाची पदें गाळली.

४५८. ४२४ व्या लेखांत कम ची तिसऱ्या पदवीचीं पदें तयार केलीं आहेत. त्यांत कम च्या सामान्य स्वरूपाचीं जीं पदमाला आहे त्यांतील —२ (व_3) ह्यापासून पदें घेतांना तीं ४१६ लेखांतील घेतलीं पण ४५१ ह्या लेखांत (व_3) चीं पदें कांहीं जास्त निघालीं आहेत. तीं कम च्या समीकरणांत घेतलीं पाहिजेत त्यास कम (अ) म्हणूं.

$$-\tfrac{२७}{१६}\,\text{ई}^2\,\text{इ}\,\text{कोभु}\,(\text{ण}-२\text{ड})\,\text{ब}+\tfrac{२७}{१६}\,\text{इ}\,\text{ई}^2\,\text{कोभु}\,(\text{ण}+२\text{ड})\,\text{ब}$$
$$+\tfrac{६३}{४}\,\text{इ}\,\text{ई}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण}+२\text{ड})\,\text{ब}$$
$$+\tfrac{७}{३}\,\text{ल}^2\,\text{इ}\,\text{कोभु}\,(२\text{ए}-\text{ण})\,\text{ब}\quad\ldots\ \text{कम अ.}$$

४५९. कम चीं १, २, ३ आणि ५ ह्या अंकाचीं पदें निघालीं आहेत. ४ ह्या अंकी —२ (व_4) हीं पदें आहेत. हीं ४५१ ह्या लेखांत आहेत. त्यांतील चवथ्या पदवीला — २नीं गुणून येतील तीं समजावी. कम च्या ६ व्या अंकी $+(\text{सं}_4)$ हीं पदें आहेत. हीं ४१० व्या लेखांत आहेत. तेव्हां ४ व ६ या अंकाची एथे लिहिण्यांत विशेष नाहीं एकुणांत करिताना वरच्या स्थानची घेऊं. आतां ७ व्या अंकापासून कम चीं पदें घेऊं.

$$(७)\ +\tfrac{३}{२}(\text{सं}_2)(\text{सं}_2)=+\tfrac{२७}{६४}\,\text{ठ}^4+\tfrac{२७}{६४}\,\text{ठ}^4\,\text{कोभु}\,(४-४\text{ठ})\,\text{ब}\quad\ldots\ \text{कम ७}$$

$$(८)\ +३(\text{व}_1)^2(\text{सं}_2)=-\tfrac{९}{४}\,\text{ठ}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ})\,\text{ब}\times\text{इ}^2\,\text{कोभु}^2\,\text{ण}\,\text{ब}$$

$$=\begin{cases}-\tfrac{९}{८}\,\text{ठ}^2\,\text{इ}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ})\,\text{ब}\\ \qquad-\tfrac{९}{१६}\,\text{ठ}^2\,\text{इ}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब}\\ -\tfrac{९}{१६}\,\text{ठ}^2\,\text{इ}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+२\text{ण})\,\text{ब}\quad\ldots\ \text{कम ८}\end{cases}$$

$$(९)\ -२(\text{व}_1)(\text{सं}_3)=१-२\,\text{इ}\,\text{कोभु}\,\text{ण}\,\text{ब}\,(\text{सं}_3)=$$

$$=\begin{cases}+\tfrac{३}{४}\,\text{ठ}^3\,\text{इ}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}\\ \qquad+\tfrac{३}{४}\,\text{ठ}^3\,\text{इ}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{ब}\\ -३\,\text{ठ}^2\,\text{इ}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब}\\ \qquad-\text{ठ}^2\,\text{इ}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+२\text{ण})\,\text{ब}\\ -४\,\text{ठ}^2\,\text{इ}^2\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ})\,\text{ब}\\ \qquad-\tfrac{१५}{८}\,\text{ठ}\,\text{इ}^3\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-३\text{ण})\,\text{ब}\\ +\tfrac{२१}{८}\,\text{ठ}^2\,\text{इ}\,\text{ई}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}\\ \qquad-\tfrac{३}{८}\,\text{ठ}^2\,\text{इ}\,\text{ई}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}\\ +\tfrac{२१}{८}\,\text{ठ}^2\,\text{इ}\,\text{ई}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}\\ \qquad-\tfrac{३}{८}\,\text{ठ}^2\,\text{इ}\,\text{ई}\,\text{कोभु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}\end{cases}$$

$-\frac{३}{८}$ ठ ल^{२} इ कोभु (२ — २ठ — २ए — ण) ब
$-\frac{३}{८}$ ठ ल^{२} इ कोभु (२ — २ठ — २ए + ण) ब
$-\frac{१५}{८}$ ठ इ^{३} कोभु (२ — २ठ — ण) ब

.. कम ९

(१०) — २ (व$_{२}$) (सं$_{२}$) = + $\frac{३}{२}$ ठ^{२} कोभु (२ — २ठ) ब (व$_{२}$) =

= { — ($\frac{९}{८}$ ठ^{२} ल^{२} + $\frac{३}{४}$ ठ^{४}) कोभु (२ — २ठ) ब
+ $\frac{४५}{३२}$ ठ^{३} इ कोभु ण ब
— $\frac{३}{१६}$ ठ^{२} ल^{२} कोभु (२ — २ठ — २ए) ब
— $\frac{३}{१६}$ ठ^{२} ल^{२} कोभु (२ — २ठ + २ए) ब
+ $\frac{३}{४}$ ठ^{४} + $\frac{३}{४}$ ठ^{४} कोभु (४—४ठ) ब
+ $\frac{४५}{३२}$ ठ^{३} इ कोभु (४ — ४ठ — ण) ब

.. कम १०

४६०. एथून पुढे कम चीं पदें पांचव्या पदवीचीं पदें काढावयाचीं आहेत आणि तीं ० समीप केंद्रगुणाचीं घ्यावयाचीं आहेत.

(१) + ६ (व$_{१}$) (व$_{४}$) यापासून निघालेली पदें—

+ ($\frac{११९७}{१६}$ ठ^{२} इ^{२} + $\frac{१३५}{१६}$ ठ इ^{४} + $\frac{४२३}{३२}$ ठ ल^{२} इ^{२} — ९ ठ इ^{२} ई^{२})
कोभु (२ — २ठ — २ण) ब
+ $\frac{५०७३}{६४}$ ठ^{२} इ^{२} ई कोभु (२ — २ठ — २ण — ड) ब
+ $\frac{९}{४}$ ठ ल^{२} इ^{२} कोभु (२ — २ठ — २ए) ब
— $\frac{९}{६४}$ ठ^{२} इ^{२} ई कोभु (२ — २ठ — २ण + ड) ब
+ $\frac{२०७}{१६}$ ठ^{२} इ^{२} ई कोभु ड ब
— $\frac{१३५}{३२}$ $\frac{अं}{अ}$ ठ इ ई कोभु (१ — ठ — ण — ड) ब
— $\frac{२४३}{१६}$ $\frac{अं}{अ}$ ठ^{२} इ कोभु (१ — ठ — ण) ब
+ $\frac{१४१७५}{६४}$ ठ इ^{२} ई^{२} कोभु (२ — २ठ — २ण — २ड) ब
+ $\frac{३९१}{३२}$ ठ ल^{२} इ^{२} कोभु (२ए — २ण) ब
— $\frac{२२२५}{१२८}$ ठ इ^{२} ई^{२} कोभु (२ — २ठ — २ण + २ड) ब .. कम ११

(२) —२(व$_{५}$). ४५१ ह्या लेखांत 'व' च्या पांचव्या पदवीचीं पदें दिलीं आहेत पण तीं अपूर्ण आहेत, म्हणजे त्यांत सगळीं पदें आलीं नाहींत. त प्रेरणेची ६ व्या पदवीचीं पदें ४५६ व्या लेखांत एकत्र दिलीं आहेत. त्यांचे संकलन ४५७ व्या

लेखांत दिले आहे. ह्या संकलनाची दुप्पट ऋण केलेली व च्या सूक्ष्मांश समीकरणामध्यें घेतली पाहिजे ती घेणें राहिली आहेत. (व) च्या समीकरणाचें संकलन ० केंद्रगुणाचें करितांना संकलन गुणक १ असतो म्हणून समीकरणाप्रमाणेच संकलन असतें. याप्रमाणे कृति करून $-२(व_{५})$ चीं संपूर्ण पदें खालीं एकत्र लिहिली आहेत.

$$-२(व_{५}) =$$

$$+\left(\frac{१३४५}{२५६}ठ^{३}ल^{२} + \frac{२८०५}{६४}ठ\,ल^{३}इ^{२} - \frac{११४३}{६४}ठ\,ल^{४} - \frac{६३}{१२८}ठ\,ल^{३}इ + \frac{९५}{४}ठ\,ल^{२}इं^{२}\right)को\,भु\,(२ - २ठ - २ए)\,ब.$$

$$+\left(\frac{७५}{४}ठ\,इ^{२}इं^{२} - \frac{१०४६७}{१२८}ठ^{३}इ^{२} - \frac{१९३}{८}ठ\,इ^{२}ल^{२} - \frac{१५}{४}ठ\,इ^{४}\right)को\,भु\,(२ - २ठ - २ण)\,ब.$$

$$-\left(\frac{६१५}{८}ठ^{४}इं + ६\,ठ^{२}ल^{२}इं + \frac{५७}{२}ठ^{२}इ^{२}इं\right)को\,भु\,ड\,ब$$

$$-\frac{२४५}{१६}ठ\,ल^{२}इ^{२}\,को\,भु\,(२ए - २ण)\,ब$$

$$+\frac{७७१}{३२}ठ^{२}इ\,\frac{अं}{अ}\,को\,भु\,(१ - ठ - ण)\,ब.$$

$$-\frac{२५७}{८}ठ^{२}इ^{२}इं\,कोभु\,(२ - २ठ - २ण - ड)\,ब$$

$$-\frac{४२९}{८}ठ^{२}इ^{२}इं\,कोभु(२ - २ठ - २ण + ड)\,ब.$$

$$+\frac{१८९}{१६}ठ^{२}ल^{२}इं\,को\,भु\,(२ - २ठ - २ए - ड)\,ब$$

$$-\frac{१४७}{१६}ठ^{२}ल^{२}इं\,को\,भु\,(२ - २ठ - २ए + ड)\,ब.$$

$$-\frac{११२५}{६४}ठ\,इ^{२}इं^{२}\,को\,भु\,(२ - २ठ - २ण - २ड)\,ब$$

$$-\frac{७१२५}{६४}ठ\,इ^{२}इं^{२}\,को\,भु\,(२ - २ठ - २ण + २ड)\,ब$$

$$+\frac{१७७}{३२}ठ\,ल^{२}इं^{२}\,को\,भु\,(२ - २ठ - २ए - २ड)\,ब$$

$$-\frac{६३}{६४}ठ\,ल^{२}इं^{२}\,को\,भु\,(२ - २ठ - २ए + २ड)\,ब$$

$$-\frac{४५}{१६}\,\frac{अं}{अ}\,ठ\,इ\,इं\,को\,भु\,(१ - ठ - ण - ड)\,ब$$

$$-\frac{३७५}{८}\,\frac{अं}{अ}\,ठ\,इ\,इं\,को\,भु\,(१ - ठ - ण + ड)\,ब$$

$$-\left(\frac{६३}{६४}ठ\,ल^{२}इं^{२} + ४२\,ठ^{३}इं^{२}\right)को\,भु\,२ड\,ब \quad \ldots \quad कम\ १२$$

(३) $-१२(व_{१})(व_{२})(व_{२})$ कम ३ ह्या पद संघास $-४(व_{१})$ ने गुणणें

$$+\left(\frac{१३५}{८}ठ\,ल^{२}इ^{२} + \frac{४५}{४}ठ^{३}इ^{२}\right)कोभु\,(२ - २ठ - २ण)\,ब$$

$$+\frac{४५}{१६}ठ\,ल^{२}इ^{२}\,कोभु\,(२ - २ठ - २ए)\,ब. \quad कम\ १३$$

(४) + २० (व$_{१}$)^{३} (व$_{२}$)

+ $\frac{२२५}{१६}$ ठ इ^{४} कोभु (२—२ठ—२ण) ब ... कम १४

(५) — १२ (व$_{१}$)^{२} (व$_{३}$) कम ५ ह्या पदसंघास —२(व$_{१}$) नें गुणणें.

+ ($\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इ^{२} — $\frac{४५}{२}$ ठइ^{४} — $\frac{१९}{२}$ ठ^{३} इ^{२}) कोभु (२—२ठ—२ण)ब

— $\frac{२१}{२}$ ठ^{२} इ^{२} ई कोभु (२ — २ठ — २ण — ड) ब

—$\frac{९}{८}$ ठल^{२} इ^{२} कोभु(२ — २ ठ — २ ए) ब.

+ $\frac{३}{२}$ ठ^{२}इ^{२} ई कोमु (२ — २ठ — २ ण + ड) ब + ९ ठ^{२}इ^{२} ई कोमु डब

(६) + ६ (व$_{२}$) (व$_{३}$) ह्यापासून ... कम १५

— ($\frac{१३५}{८}$ ठल^{२} इ^{२} + $\frac{४५}{४}$ ठ^{३} इ^{२}) कोमु (२ — २ ठ — २ ण) ब

— ($\frac{४५}{६४}$ठल^{४} + $\frac{८५}{१६}$ ठ^{३} ल^{२} + $\frac{१०५}{१६}$ठल^{२}इ^{२}) कोमु (२ — २ ठ — २ए) ब

+ ($\frac{७५}{३२}$ ठ^{२} इ^{२} ई — $\frac{२७}{४}$ ठ^{२} ल^{२} ई + $\frac{२७}{२}$ ठ^{४} ई) कोमुडब

— $\frac{२१}{८}$ ठ^{२} ल^{२} ई कोमु (२ — २ठ — २ए — ड) ब

+ $\frac{३}{८}$ ठ^{२} ल^{२} ई कोमु (२ — २ठ — २ ए + ड) ब.

— $\frac{४०५}{६४}$ ठ^{२} इ^{२} ' कोमु (२ — २ठ — २ण — ड) ब

+ $\frac{४०५}{६४}$ ठ^{२}इ^{२} ई कोमु (२ — २ ठ — २ ण + ड) ब.

— $\frac{१२१५}{२५६}$ ठइ^{२} ई^{२} कोमु (२ — २ठ — २ण — २ड) ब

+ $\frac{१२१५}{२५६}$ ठइ^{२}ई^{२}कोमु (२ — २ठ — २ण — २ड) ब.

— $\frac{६७५}{१२८}$ $\frac{अ}{अ}$ ठ^{२}इ कोमु (१—ठ—ण) ब—$\frac{९४५}{१२८}$ ठइ^{२} ई^{२} कोमु२डब कम १६

(७) + ३ (सं$_{२}$) (सं$_{३}$) यांत + $\frac{८१}{३२}$ ठ^{४} ई कोभुडब ... कम १७

(८) — २ (सं$_{२}$) (व$_{३}$) यांत + $\frac{९}{४}$ ठ^{४} ई कोमुडब ... कम १८

(९) — ६ (व$_{१}$)^{५} यात पद नाहीं.

(१०) + ३ (व$_{१}$)^{२} (सं$_{३}$) = + $\frac{३}{२}$ इ^{२} (सं$_{३}$) + $\frac{३}{२}$ इ^{२} (सं$_{३}$) कोभु२ ण ब

— $\frac{६३}{३२}$ ठ^{२}इ^{२}ई कोमु (२ — २ठ — २ण — ड) ब

+ $\frac{९}{३२}$ ठ^{२} इ^{२} ई कोमु (२ — २ठ — २ण + ड) ब.

+ ($\frac{४५}{१६}$ ठ इ^{४} — $\frac{९}{१६}$ ठ^{३} इ^{२}) कोमु (२ — २ठ — २ण) ब

+ $\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इ^{२} कोभु (२ — २ठ — २ए) ब ... कम २०

(११) —२(व$_{१}$) (सं$_{४}$) यापासून

+ $\frac{२१}{२}$ ठ^{२} इ^{२} ई कोमु (२ — २ठ — २ण — ड) ब

+ $\frac{३}{२}$ ठ^{२} इ^{२} ई कोमु (२ — २ठ — २ण + ड) ब.

$$— ९ ठ^{३} इ^{२} \text{ कोभु } (२ — २ठ — २ण) ब + \frac{३}{८}\frac{अ}{अ} ठ^{२} इ \text{ कोभु } (१ — ठ — ण) ब$$

... कम २१

(१२) — ३ ($व_{१}$) ($सं_{२}$) ($सं_{२}$) हृयात पद नाहीं.

(१३) + ($सं_{५}$) ४४६ व्या लेखांतील शेवटचीं सात पदें आणि ४५७ ह्या लेखांतील सर्व पदें घेणें. तीं येथे दिलीं नाहीत. कम २३

(१४) — ४ $(व_{१})^{३}$ ($सं_{२}$) हृचांत पद नाहीं.

(१५) — २ ($व_{२}$) ($सं_{३}$)

$$— \frac{२१}{३२} ठ^{२} ल^{२} इं \text{ कोभु } (२ — २ठ — २ए — ड) ब$$

$$+ \frac{९}{३२} ठ^{२} ल^{२} इं \text{ कोभु } (२ — २ठ — २ए + ड) ब.$$

$$+ \left(\frac{१५}{८} ठ^{३} इ^{२} + \frac{४५}{१६} ठ ल^{२} इ^{२}\right) \text{ कोभु } (२ — २ठ — २ण) ब$$

$$+ \left(\frac{३}{१६} ठ^{३} ल^{२} + \frac{९}{१६} ठ ल^{४}\right) \text{ कोभु } (२ — २ठ — २ए) ब$$

$$+ \frac{९}{४} ठ^{४} इ \text{ कोभुडब}$$

... कम २५

(१६) + ६ ($व_{१}$) ($व_{२}$) ($सं_{२}$) इष्ट पद नाहीं.

४६१. कम च्या २६ सामान्य पदापासून येणाऱ्या सर्व पदांची एकंदरी केली म्हणजे $\frac{सू\ क}{सू\ ब}$ ह्या शून्यलब्धिगुणाची किमत येईल. याचें संकलन केलें असता क ची किमत ब च्या संचयानें येईल. ह्या शून्यलब्धिगुणाचें संकलन करण्यापूर्वी समीकरणांत जे $\frac{१}{ज\ अ^{२}}$ हें पद आहे, ह्या अव्यक्त पदाची व्यक्त किमत तयार करून ती समीकरणांत ठेविली पाहिजे. ह्या विषयीं ४२५ व्या लेखांमध्यें $\frac{१}{ज\ अ^{२}}$ ह्या पदाची व्यक्त किमत तयार केली आहे, ती पुन्हा पहा. तेथील स्थिर पदांपेक्षां आतां जास्त पदें समीकरणांत आली आहेत. (ब च्या किमतीला स्थिर पदाची — २ पट ही कम च्या समीकरणातील स्थिर पदें होत.) त्या प्रमाणें पाहिले तरी खालील स्वरूप सिद्ध होते. ते असें.

$$\frac{१}{ज\ अ^{२}} \times \left\{ १ + \frac{३}{२} इ^{२} + \frac{३}{२} ल^{२} + ठ^{२} + स्थ \right\} = \frac{१}{म}$$

किंवा

$$\frac{१}{ज\ अ^{२}} = \left\{ १ + \frac{३}{२} इ^{२} + \frac{३}{२} ल^{२} + ठ^{२} + स्थ \right\}^{-१} \times \frac{१}{म}$$

$$= \left\{ १ — \frac{३}{२} इ^{२} — \frac{३}{२} ल^{२} — ठ^{२} — स्थ \right\} \times \frac{१}{म}$$

४६२. वरच्या लेखांत दाखविल्याप्रमाणें कम च्या समोकरणांतील प्रत्येक पदाला

$$\frac{\text{१}}{\text{म}}\left\{\text{१} - \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}} - \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}} - \text{ठ}^{\text{२}} - \text{स्थ}\right\}$$

ह्या पदानें गुणिले पाहिजे. हा गुणाकार करतांना सर्व स्थिरपदें लुप्त होऊन $\frac{\text{१}}{\text{ज अ}^{\text{२}}}$ याच्या जागीं $\frac{\text{१}}{\text{म}}$ हें पद येतें, आणि इतर सर्व पदांना $(\text{१} - \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}} - \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}} - \text{ठ}^{\text{२}})$ ह्या गुणकानें गुणावें लागतें, व त्यानें गुणून उत्पन्न होणारीं नवीन पदें समीकरणांत घ्यावीं लागतात. ती नवीन पदें खालीं लिहिल्याप्रमाणें ; ह्या पदसंघाला कम २७ म्हणू.

$$\text{गुणक} \times \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}}\text{कोभु २णब} = -(\tfrac{\text{९}}{\text{४}}\text{इ}^{\text{४}} + \tfrac{\text{९}}{\text{४}}\text{इ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}})\text{कोभु २णब}$$

$$\text{गुणक} \times \tfrac{\text{११}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{कोभु }(\text{२} - \text{२ठ})\text{ब}$$
$$= +(\tfrac{\text{३३}}{\text{८}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}} + \tfrac{\text{३३}}{\text{८}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}} + \tfrac{\text{११}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{४}})\text{ कोभु }(\text{२} - \text{२ठ})\text{ ब.}$$

$$\text{गुणक} \times \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}\text{ कोभु २एब} = -(\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}} + \tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{\text{४}} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}})\text{ कोभु २एब}$$

$$\text{गु.} \times \tfrac{\text{१५}}{\text{४}}\text{ठइ कोभु}(\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण})\text{ब}$$
$$= +(\tfrac{\text{४५}}{\text{८}}\text{ठइ}^{\text{३}} + \tfrac{\text{४५}}{\text{८}}\text{ठल}^{\text{२}}\text{इ} + \tfrac{\text{१५}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{३}}\text{इ})\text{ कोभु }(\text{२} - \text{२ठ} - \text{ण})\text{ ब.}$$

$$\text{गु.} \times \text{३ठ}^{\text{२}}\text{इं कोभु डब} = -(\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}\text{इं} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ}^{\text{२}}\text{इं} + \text{३ठ}^{\text{४}}\text{इं})\text{ कोभु डब.}$$

... कम २७

४६३. चंद्राच्या केंद्रसन्निधानाची गति आपण न गुणकानें साधिली आहे लेख ३७९ पहा. तेथें

$$\text{चंद्रोच्च गति} = (\text{१} - \text{ण})\text{ चंद्रमध्यम गति} = (\text{१} - \text{ण})\text{ कम}$$

$$\text{ब} - \text{चंद्र कें. सं.} = \text{ब} - (\text{उ} + \text{चंद्रोच्चगति}) = \text{ब} - \text{उ} - (\text{१}-\text{ण})\text{ कम}$$
$$= \text{ब} - \text{उ} - (\text{१} - \text{ण})(\text{ब} - \text{२इभुण ब})$$
$$= \text{ब} - \text{ब} + \text{णब} - \text{उ} + \text{२इ भुणब} - \text{२णइ भुणब}$$
$$= \text{णब} - \text{उ} + \text{२इ भुण ब} - \text{२}(\text{१} - \tfrac{\text{३}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{२}})\text{इ भुण ब}$$
$$= \text{णब} - \text{उ} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ भुण ब}$$

$$-\text{२इकोभु }(\text{ब} - \text{कें.सं.}) = -\text{२इ}[\text{कोभु }(\text{णब} - \text{उ})\text{ कोभु }(\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इभुणब})$$
$$- \text{भु }(\text{णब} - \text{ड})\text{ भु }(\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इभुण ब})]$$

[$\text{कोभु }(\text{अ} + \text{ब}) = \text{कोभु अ कोभु ब} - \text{भु अ भु ब}$] ह्या आधारें.

पण $\text{कोभु अ} = \text{१} - \tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ}^{\text{२}}$ आणि $\text{भुअ} = \text{अ} - \tfrac{\text{१}}{\text{६}}\text{अ}^{\text{३}}$

तेव्हां $\text{कोभु }(\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ भुणब}) = \text{१}$; आणि $\text{भु }(\tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ भुणब}) = \tfrac{\text{३}}{\text{२}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{इ भुणब}$

म्हणून

$$— २इ\,कोभु\,(ब — कें.\,सं) = — २इ\,कोभुणब — ३ठ^{२}इ^{२}भु^{२}\,णब$$
$$= — २इ\,कोभुणब — \tfrac{३}{२}ठ^{२}इ^{२} + \tfrac{३}{२}ठ^{२}इ^{२}\,कोभु२णब$$

हचापैकीं — २कोभुणब हें पद समीकरणांत आहे. परंतु — $\tfrac{३}{२}ठ^{२}इ^{२}$ आणि + $\tfrac{३}{२}ठ^{२}इ^{२}$ कोभु२णब हीं पदें समीकरणांत घेणें आहेत. कम २८

४६४. कम च्या वर तयार केलेल्या २८ पद संघांतील पदें एकत्र केलीं म्हणजे कम चें सूक्ष्मांश समीकरण तयार होईल. तें खालीं लिहिल्याप्रमाणें

$$\frac{सूक}{सूब}\cdot म = (\text{खालीं दिलेला पदसमूह})$$

$$१ — २इ\,कोभुणब + (\tfrac{३}{२}इ^{२} + \tfrac{१}{४}इ^{४} + \tfrac{९}{४}इ^{२}ल^{२} + २ठ^{२}इ^{२})\,कोभु२णब$$
$$— इ^{३}\,कोभु३णब + \tfrac{५}{८}इ^{४}\,कोभु४णब$$
$$+ (\tfrac{१}{२}ल^{२} + \tfrac{३}{४}ल^{२}इ^{२} — \tfrac{१}{४}ल^{४} — ठ^{२}ल^{२})\,कोभु\,(२ए)\,ब$$
$$— (\tfrac{११}{४}ठ^{२} + \tfrac{६५}{१२}ठ^{३} — \tfrac{३}{८}ठल^{२} — \tfrac{४५}{८}ठइ^{२})\,कोभु\,(२ — २ठ)\,ब$$
$$+ (\tfrac{४२३}{३२}ठ^{२}इ^{२} — \tfrac{२२९}{३२}ठ^{२}ल^{२} + \tfrac{५३}{६}ठ^{४} + \tfrac{५५}{८}ठ^{२}इ^{२})\,कोभु\,(२ — २ठ)\,ब$$
$$— (\tfrac{१५}{४}ठइ + \tfrac{१६५}{१६}ठ^{२}इ + \tfrac{१५}{८}ठइ^{३})\,कोभु\,(२ — २ठ — ण)\,ब$$
$$— (\tfrac{१३५}{१६}ठल^{२}इ + \tfrac{६५}{२}ठ^{३}इ — ६ठइ̍^{२}इ)\,कोभु\,(२ — २ठ — ण)\,ब$$
$$+ (३ठ^{२}इ̍ — \tfrac{३४५}{८}ठ^{४}इ̍ — \tfrac{८१}{८}ठ^{२}ल^{२}इ̍ — \tfrac{५३७}{३२}ठ^{२}इ^{२}इ̍)\,कोभुडब$$
$$+ (६ठ^{२}इ — \tfrac{४५}{८}ठइ^{३} + \tfrac{८७}{८}ठ^{३}इ — \tfrac{९}{१६}ठल^{२}इ)\,कोभु\,(२ — २ठ + ण)\,ब$$
$$— (\tfrac{७७}{८}ठ^{२}इ̍ — \tfrac{५९५}{१६}ठ^{३}इ̍ + \tfrac{७}{८}ठल^{२}इ̍ + \tfrac{३०५}{८}ठइ^{२}इ̍)\,कोभु\,(२ — २ठ — ड)\,ब$$
$$+ (\tfrac{११}{८}ठ^{२}इ̍ + \tfrac{६४५}{८}ठ^{३}इ̍ — \tfrac{३}{८}ठल^{२}इ̍ — \tfrac{४५}{८}ठइ^{२}इ̍)\,कोभु\,(२ — २ठ + ड)\,ब$$
$$— (\tfrac{३५}{४}ठइइ̍ + \tfrac{९३५}{३२}ठ^{२}इइ̍)\,कोभु\,(२ — २ठ — ण — ड)\,ब$$
$$+ \tfrac{२७}{८}ठइ^{२}इ̍\,कोभु\,(२ण — ड)\,ब$$
$$+ (\tfrac{१५}{४}ठइइ̍ — \tfrac{४५}{३२}ठ^{२}इइ̍)\,कोभु\,(२ — २ठ — ण + ड)\,ब$$
$$— \tfrac{२७}{८}ठइ^{२}इ̍\,कोभु\,(२ण + ड)\,ब$$
$$— (\tfrac{९}{४}ठइइ̍ + \tfrac{११९३}{३२}ठ^{२}इइ̍)\,कोभु\,(ण — ड)\,ब$$
$$— \tfrac{९}{८}ठल^{२}इ̍\,कोभु\,(२ए — ड)\,ब$$
$$+ (\tfrac{९}{४}ठइइ̍ + \tfrac{८३७}{३२}ठ^{२}इइ̍)\,कोभु\,(ण + ड)\,ब$$
$$+ \tfrac{९}{८}ठल^{२}इ̍\,कोभु\,(२ए + ड)$$

$+\left(\frac{१९}{३२}\,\text{ल}^{२}\text{इ}-\frac{१६९}{४४}\,\text{ठल}^{२}\text{इ}\right)\text{कोमु}(२\text{ए}-\text{ण})\,\text{ब}-\frac{३}{४}\,\text{ल}^{२}\text{इ}\,\text{कोमु}(२\text{ए}+\text{ण})\,\text{ब}$

$+\left(\frac{१५}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}+\frac{३०३}{१६}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\right)\text{कोमु}(१-\text{ठ})\,\text{ब}+\frac{३}{४}\,\text{ल}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोमु}(२\text{ए}+२\text{ण})\,\text{ब}$

$-\left(\frac{११०७}{१२८}\,\text{ठइ}^{२}\text{इं}^{२}+६३\,\text{ठ}^{३}\text{इ}^{२}\right)\text{कोमु}\,२\text{ड}\,\text{ब}-\frac{४५}{१६}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}\,\text{इ}\,\text{कोमु}(१-\text{ठ}+\text{ण})\,\text{ब}$

$-\left(\frac{१५}{४}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठइ}+\frac{१२९}{८}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}\right)\text{कोमु}(१-\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}+\frac{१}{८}\,\text{ल}^{४}\,\text{कोमु}(४\text{ए})\,\text{ब}$

$+\left(\frac{६३}{४}\,\text{इं}^{२}\text{इ}+\frac{७५}{६४}\,\text{ठइं}^{२}\text{इ}\right)\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+२\text{ड})\,\text{ब}+\frac{९}{३२}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}\,२\text{ड}\,\text{ब}$

$+\left(\frac{४५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}+\frac{४६१}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{इ}^{२}+\frac{३९}{३२}\,\text{ठल}^{२}\text{इ}^{२}+\frac{२५५}{१६}\,\text{ठइ}^{२}\text{इं}^{२}\right)\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब}$

$+\left(\frac{९}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}+\frac{११०३}{५१२}\,\text{ठ}^{३}\text{ल}^{२}-\frac{४५}{६४}\,\text{ठल}^{२}\text{इ}^{२}+\frac{४५}{१६}\,\text{ठल}^{२}\text{इ}^{२}\right)\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{ब}$

$-\left(\frac{१९१}{८}\,\text{ठ}\,\text{ल}^{४}-\frac{६३}{१२८}\,\text{ठ}\,\text{ल}^{२}\text{इ}\right)\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{ब}$

$+\frac{४५}{१६}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठइं}\,\text{कोमु}(१-\text{ठ}-\text{ड})\,\text{ब}.$

$+\frac{६१७}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{इं}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{३११}{१६}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{इं}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}.$

$+\frac{८३}{८}\,\text{ठल}^{२}\text{इं}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{१८३}{३२}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{इं}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}+\text{ड})\,\text{ब}.$

$-३\text{ठ}^{२}\text{इइं}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}+\text{ड})\,\text{ब}+२१\,\text{ठ}^{२}\text{इइं}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}+\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{७५}{८}\,\text{ठ}^{३}\text{इ}\,\text{कोमु}(४-४\text{ठ}-\text{ण})\,\text{ब}+\frac{६७५}{१२८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोमु}(४-४\text{ठ}-२\text{ण})\,\text{ब}$

$-\frac{३}{४}\,\text{ठ}\,\text{ल}^{२}\text{इ}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ण})\,\text{ब}$

$-\frac{४५}{३२}\,\text{ठल}^{२}\text{इ}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}+२\text{ए}-\text{ण})\,\text{ब}.$

$-\frac{६५}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}+२\text{ण})\,\text{ब}-\frac{११}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}+२\text{ए})\,\text{ब}$

$-\frac{६५}{६४}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}^{२}\,\text{कोमु}(३-३\text{ठ})\,\text{ब}+\frac{२८३}{६४}\,\text{ठ}^{४}\,\text{कोमु}(४-४\text{ठ})\,\text{ब}$

$+\frac{९}{१२८}\,\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\,\text{कोमु}(४-४\text{ठ}-२\text{ए})\,\text{ब}-\frac{११९}{८}\,\text{ठ}^{२}\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{८१}{३२}\,\text{इ}^{२}\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}(२\text{ण}-२\text{ड})\,\text{ब}+\frac{८१}{३२}\,\text{इ}^{२}\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}(२\text{ण}+२\text{ड})\,\text{ब}$

$-\frac{२७}{१६}\,\text{इ}\,\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}(\text{ण}-२\text{ड})\,\text{ब}+\frac{२७}{१६}\,\text{इ}\,\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}(\text{ण}+२\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{१३५}{१६}\,\frac{\text{अं}}{\text{अ}}\,\text{ठ}\,\text{इ}\,\text{इं}\,\text{कोमु}(१-\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{१५}{३२}\,\text{ठ}\,\text{ल}^{२}\text{इ}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}+\text{ण})\,\text{ब}.$

$+\frac{२६०५५}{१२८}\,\text{ठइ}^{२}\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ण}-२\text{ड})\,\text{ब}$

$+\frac{७३}{१२८}\,\text{ठल}^{२}\text{इं}^{२}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-२\text{ड})\,\text{ब}$

$-\frac{४७२५}{३२}\,\text{ठ}\,\text{इं}^{२}\text{इ}\,\text{कोमु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}-२\text{ड})\,\text{ब}$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेट्याचे संकलन केलें म्हणजे कम ची किंमत येईल. डावीकडच्या पेट्याचे म्हणजे $\frac{\text{सू क}}{\text{सू ब}}$. म याचें संकलन कम हें आहे. उजवीकडच्या पेट्याचे संकलन ४२७ व्या लेखाप्रमाणें करून त्याचें समीकरण खालीं लिहिलें आहे.

४६५. वरच्या सूक्ष्मांश समीकरणाचें संकलन,

कम = खालचा पदसमूह.

ब − २ इभुणब + ($\frac{३}{४}$ इ^{२} + $\frac{१}{८}$ इ^{४} + $\frac{९}{८}$ इ^{२} ल^{२} + $\frac{२५}{१६}$ ड^{२} इ^{२}) भु२णब
− $\frac{१}{३}$ इ^{३} भु ३ णब + $\frac{५}{३२}$ इ^{४} भु ४ णब
+ ($\frac{१}{४}$ ल^{२} + $\frac{३}{८}$ ल^{२} इ^{२} − $\frac{१}{८}$ ल^{४} − $\frac{११}{१६}$. ठ^{२} ल^{२}) भु२एब
− ($\frac{११}{८}$ ठ^{२} + $\frac{५९}{११}$ ठ^{३} + $\frac{१०९१}{७२}$ ठ^{४} − $\frac{३}{१६}$ ठ ल^{२}) भु (२ − २ठ) ब
+ ($\frac{४५}{१६}$ ठइ^{२} + $\frac{६०३}{६४}$ ठ^{२} इ^{२} − $\frac{३}{८}$ ठ^{२} ल^{२} + $\frac{५५}{१६}$ ठ^{२} ई^{२}) भु (२ − २ठ) ब
− ($\frac{१५}{४}$ ठइ + $\frac{२८५}{१६}$ ठ^{२} इ + $\frac{१५}{८}$ ठइ^{३}) भु (२ − २ठ − ण) ब
− ($\frac{१९५}{१६}$ ठल^{२} इ + $\frac{१०४५}{१६}$ ठ^{३} इ + ६ठ ई^{२} इ) भु (२ − २ठ − ण) ब
+ (३ठ ई − $\frac{३४५}{८}$ ठ^{३} ई − $\frac{८१}{८}$ ठल^{२} ई − $\frac{५३७}{३२}$ ठइ^{२} ई) भु डब
+ (२ठ^{२} इ − $\frac{१५}{८}$ ठइ^{३} + $\frac{११९}{२४}$ ठ^{३} इ − $\frac{३}{१६}$ ठल^{२} इ) भु (२ − २ठ + ण) ब
− ($\frac{७७}{१६}$ ठ^{२} ई + $\frac{४१३}{१६}$ ठ^{३} ई − $\frac{७}{१६}$ ठल^{२} ई − $\frac{१०५}{८}$ ठइ^{२} ई) भु (२ − २ठ − ड) ब
+ ($\frac{११}{१६}$ ठ^{२} ई + $\frac{५९}{४८}$ ठ^{३} ई − $\frac{३}{१६}$ ठल^{२} ई − $\frac{४५}{१६}$ ठइ^{२} ई) भु (२ − २ठ + ड) ब
− ($\frac{३५}{४}$ ठइई + $\frac{१७७५}{३२}$ ठ^{२} इई) भु (२ − २ठ − ण − ड) ब
+ ($\frac{१५}{४}$ ठइई + $\frac{७५}{३२}$ ठ^{२} इई) भु (२ − २ठ − ण + ड) ब
− ($\frac{९}{४}$ ठइई + $\frac{१३८५}{३२}$ ठ^{२} इई) भु (ण − ड) ब + $\frac{२८३}{२५६}$ ठ^{४} भु (४ − ४ठ) ब
+ ($\frac{९}{४}$ ठइई + $\frac{९०९}{३२}$ ठ^{२} इई) भु (ण + ड) ब + $\frac{१}{३२}$ ल^{४} भु ४एब
+ ($\frac{११}{१२}$ ल^{२} इ − $\frac{१६१}{२४}$ ठल^{२} इ) भु (२ए − ण) ब − $\frac{१}{४}$ ल^{२} इ भु (२ए + ण) ब
+ ($\frac{१५}{८}$ $\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ ठ^{२} + $\frac{३३३}{१६}$ $\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ ठ^{२}) भु (१ − ठ) ब − $\frac{१}{३}$ $\frac{\text{अं}}{\text{अ}}$ ठ^{२} भु (३ − ३ठ) ब
− ($\frac{२७}{१६}$ ईइ^{२} + $\frac{२७}{८}$ ठ ई^{२} इ) भु (ण − २ड) ब + $\frac{३}{१६}$ ल^{२} इ^{२} भु (२ए + २ण) ब
+ ($\frac{२७}{१६}$ ई^{२} इ − $\frac{२७}{८}$ ठ ई^{२} इ) भु (ण + २ड) ब + $\frac{९}{४}$ ठ ई^{२} भु२डब
− ($\frac{४५}{१६}$ ठइ^{२} + $\frac{९६७}{६४}$ ठ^{२} ई^{२} + $\frac{२९}{६४}$ ल^{२} इ^{२} + $\frac{२५५}{३२}$ इ^{२} ई^{२}) भु (२ − २ठ − २ण) ब
− ($\frac{९}{१६}$ ठल^{२} − $\frac{११०३}{१०२४}$ ठ^{२} ल^{२} − $\frac{४५}{१२८}$ ल^{२} इ^{२} − $\frac{१४१}{१६}$ ल^{४}) भु (२ − २ठ − २ए) ब

$$- \frac{३११}{१६} ठ इ^{२} इं भु (२ - २ठ - २ण + ड) ब$$
$$- \frac{१०३}{८} ठ इ^{२} इं भु (२ - २ठ - २ण - ड) ब.$$
$$- \frac{४५}{१६} ठ ल^{२} इं भु (२ - २ठ - २ए + ड) ब$$
$$- \frac{८३}{६४} ठ ल^{२} इं भु (२ - २ठ - २ए - ड) ब.$$

$$+ \frac{७५}{३२} \frac{अं}{अ} ठ इ भु (१ - ठ - ण) ब - \frac{४५}{३२} \frac{अं}{अ} ठ इ भु (१ - ठ + ण) ब$$
$$- \frac{६५}{३२} ठ^{२} इ^{२} भु (२ - २ठ + २ण) ब - \frac{११}{३२} ठ^{२} ल^{२} भु (२ - २ठ + २ए) ब$$
$$+ \frac{२५}{८} ठ^{३} इ भु (४ - ४ठ - ण) ब + \frac{६७५}{२५६} ठ^{२} इ^{२} भु (४ - ४ठ - २ण) ब$$
$$- \frac{२१}{१६} ठ ल^{२} इ भु (२ - २ठ - २ए + ण) ब + \frac{३}{४} ठ ल^{२} इ भु (२ - २ठ - २ए - ण) ब$$
$$- ठ^{२} इ इं भु (२ - २ठ + ण + ड) ब + ७ ठ^{२} इ इं भु (२ - २ठ + ण - ड) ब$$
$$- \frac{११९}{१६} ठ^{२} इं^{२} भु (२ - २ठ - २ड) ब + \frac{४५}{१६} \frac{अं}{अ} ठ इं भु (१ - ठ - ड) ब$$
$$- \frac{९}{१६} ठ ल^{२} इं भु (२ए - ड) ब + \frac{९}{१६} ठ ल^{२} इं भु (२ए + ड) ब$$
$$+ \frac{२७}{१६} ठ इ^{२} इं भु (२ण - ड) ब - \frac{२७}{१६} ठ इ^{२} इं भु (२ण + ड) ब$$

४६६. गेल्या दोन प्रकरणांत केलेल्या गणिताकडे सिंहावलोकन दृष्टीनें पाहिल्यास असें दिसून येईल कीं, चंद्राच्या शराची स्पर्शरेषा, चंद्राचें भूमध्यापासून अंतर, आणि त्या क्षणीचा मध्यम चंद्र (कम) हीं आपणास सिद्ध करिता येतील. ह्या गोष्टी कशा सिद्ध होतील हें अनुमानद्वारा वर सिद्ध केलें आहे. ही सिद्धता सर्वसामान्य आहे. ह्या सिद्धतेंत ज्या अव्यक्त व व्यक्त अशा सामान्य संख्या योजिल्या आहेत त्यापैकीं कांहीं संख्या वेधानें ठरविल्या पाहिजेत. परंतु हे पूर्ण लक्षांत असावे कीं, वेधानें ज्या संख्या साध्य होतात त्या कधीही सूक्ष्म असत नाहींत. गणिताच्या सामान्य सिद्धांतांनींच त्यांची सूक्ष्मता साध्य करून घ्यावी लागते. कोणताही वेध घ्या त्यावरून इष्ट संख्येचें मापन गणित सिद्धांतांनींच ठरतें. चंद्राच्या समीकरणापासून इष्ट कार्यें कशीं करिता येतील याचा विचार आतां आपणास करावयाचा आहे. वर जें कम समीकरण सिद्ध केले आहे त्यांत ब म्हणजे विवक्षित क्षणीचा स्पष्टचंद्र ही व्यक्त संख्या असून तिजपासून इतर स्थीर संख्यांच्या सहाय्यानें कम ही अव्यक्त संख्या शोधिता येईल असें सिद्ध केले आहे. आतां कम ही व्यक्त संख्या असता ब ची संख्या कशी प्राप्त करून घेता येईल हें सिद्ध करावयाचे आहे. समीकरण हा सिद्धांत आहे. वरच्या समीकरणांत ब ही संख्या पक्ष स्थानीं आहे आणि कम साध्य स्थानीं आहे. आता आपणाला ह्या सिद्धांताचा व्यत्यास सिद्ध करावयाचा आहे. म्हणजे ब च्या स्थानीं कम आणि कम च्या स्थानीं ब आणून समीकरण सिद्ध करावयाचें आहे. अर्थात इष्ट क्षणीं मध्यमचंद्र ज्ञात असलां तर स्पष्टचंद्र किती हें ठरवितां येईल असें समीकरण

सिद्ध करिता येईल. ही सिद्धता वास्तविक मोठी कठीण आहे. परंतु ते काठिण्य दूर करण्याकरितां एक सिद्धांत स्वतः सिद्ध करून ठेविला आहे. २६२ ते २६६ लेखांक पहा.

४६७. वरचें कम चें समीकरण २६६ ह्या लेखांतील समीकरणाशीं सरूप आहे. त्यातील क्ष आणि य यांचे जसे स्थान परिवर्तन केले तसे कम च्या समीकरणांत कम च्या जागीं ब आणि ब च्या जागीं कम असा त्यांचा स्थान विनिमय होऊन समीकरण सिद्ध झाले पाहिजे. २६६ ह्या लेखांतील समीकरणांत ज्या सामान्य संख्या योजिल्या आहेत त्यांच्यासंबंधीं जे संकेत स्वीकारले आहेत ते प्रथम विशद करितो. क्ष, आणि ह्या संख्या परिवर्तन होणाऱ्या आहेत. प, द, त, आणि च ह्या संख्या पदांचे गुणक दाखविणाऱ्या आहेत. आणि द, त, च ह्या संख्या एकाच पदाच्या दर्शक नसून संघ दर्शक आहेत. ज्या पदाचा पदगुणक प म्हणजे पहिल्या पदवीचा त्याचा केंद्रगुणक न स्वीकारला आहे. पदगुणक द असता केंद्रगुणक म स्वीकारला आहे. याचप्रमाणे त चा क आणि च चा ग केंद्रगुणक स्वीकारला आहे. ह्या समीकरणाच्या उजव्या बाजूस य खेरीज १९ पदें आहेत. पहिल्या पदवीचें एक पद, दुसरीची दोन, तिसरीची पांच आणि चवथ्या पदवीची अकरा पदें आहेत. ह्या १९ पदाच्या किंमती कम मध्यें धनर्ण केल्या म्हणजे ब चें समीकरण सिद्ध होईल. तेव्हां २६६ ह्या लेखांतील एक एक पद घेऊन त्यांच्या किंमती काढू.

४६८. परिवर्तन समीकरणांतील प्रत्येक पदाचे परिवर्तन क्रमवार—

[१] — प भु न य. यांतील य च्या स्थानीं क म लिहिला, आणि न च्या जागीं ण हा केंद्रगुणक लिहिला. म्हणजे भु ण क म हे केंद्र झाले. प च्या जागीं — २ इ हा पदगुणक लिहिला. पण प ऋण आहे म्हणून गुणक + २ इ लिहिला तेव्हां

$$+ \text{२ इ भु ण क म} \quad \cdots \quad \cdots (\text{१})$$

[२] — द भु म य. हें एकच पद नसून पांच पदांचा समुदाय आहे. म्हणजे द च्या किंमती पांच आहेत, आणि म च्या किंमतीही तितक्याच आहेत. दुसऱ्या पदवीच्या पांच पदांपैकीं प्रत्येक पदाचा पदगुणक धन असल्यास ऋण करून, आणि ऋण असल्यास धन करून त्या पदांना लिहावा, आणि त्या त्या पदाचा केंद्रगुणक म च्या जागीं लिहावा. तसेच य च्या स्थानीं क म लिहावे म्हणजें प्रत्येक पदाचें परिवर्तन होईल. तें असें:

$$-\frac{\text{३}}{\text{४}}\text{इ}^{\text{२}}\text{भु २णकम} - \frac{\text{३}}{\text{४}}\text{ल}^{\text{२}}\text{भु २एकम} + \frac{\text{११}}{\text{८}}\text{ठ}^{\text{२}}\text{भु (२—२ठ) कम}$$
$$+ \frac{\text{१५}}{\text{४}}\text{ठइभु (२—२ठ — ण) कम — ३ठइे भुडकम} \ldots\ldots (\text{२})$$

[३] + $\frac{१}{२}$ प^{२} न भु २ न य. यांतील प च्या स्थानीं — २ इ, न च्या स्थानीं ण आणि य च्या स्थानीं क म लिहिणें. ण = १ — $\frac{३}{४}$ ठ^{२} घेणे. तेव्हां

+ $\frac{१}{२}$ × ४ इ^{२} (१ — $\frac{३}{४}$ ठ^{२}) भु २ ण क म = (२ इ^{२} — $\frac{३}{२}$ ठ^{२} इ^{२}) भु २ ण क म ..... (३)

[४] — त भु क य. क म च्या समीकरणांतील तिसऱ्या पदवीच्या सर्व पदांना — १ नें गुणून, आणि ब च्या स्थानीं क म लिहून होणारा पदसमूह. [२] ह्या अंकाप्रमाणें.

[५] + $\frac{१}{८}$ प^{३} न^{२} भु न य. यापासून + $\frac{१}{८}$ (— ८ इ^{३}) ण^{२} भु ण क म
= — इ^{३} भु ण क म .. .. .. (५)

[६] — $\frac{३}{८}$ प^{३} न^{२} भु ३ न य. यापासून — $\frac{३}{८}$ (— ८ इ^{३}) ण^{२} भु ३ ण क म
= + ३ इ^{३} भु ३ ण क म .. .. .. (६)

[७] + $\frac{१}{२}$ पद (म + न) भु (म + न) य. ह्या पदामध्यें द च्या पांच किंमती आहेत आणि त्यांशी संगत म च्या पांच किंमती आहेत, त्या त्या यथास्थानीं लिहिल्यानें खालीं लिहिल्याप्रमाणें पदें येतात :—

— $\frac{१}{४}$ इ^{३} भु ३ ण क म + ($\frac{३३}{८}$ ठ^{२} इ — $\frac{११}{४}$ ठ^{३} इ) भु (२ — २ ठ + ण) क म
— $\frac{३}{४}$ ल^{२} इ भु (२ ए + ण) क म + ($\frac{१५}{२}$ ठ इ^{२} — $\frac{१५}{२}$ ठ^{२} इ^{२}) भु (२ — २ ठ) क म
— (३ ठ इ ई + ३ ठ^{२} इ ई) भु (ण + ड) क म .. .. (७)

[८] — $\frac{१}{२}$ पद (म — न) भु (म — न) य. वरच्याप्रमाणें या पदापासून पदें येतात ती :

+ $\frac{३}{४}$ इ^{३} भु ण क म — ($\frac{११}{८}$ ठ^{२} इ — $\frac{११}{४}$ ठ^{३} इ) भु (२ — २ ठ — ण) क म
+ $\frac{१}{४}$ ल^{२} इ भु (२ ए — ण) क म + ($\frac{१५}{२}$ ठ^{२} इ^{२}) भु (२ — २ ठ — २ ण) क म
+ (३ ठ इ ई — ३ ठ^{२} इ ई) भु (ण — ड) क म .. .. (८)

[९] — $\frac{१}{६}$ प^{४} न^{३} भु २ न य. परिवर्तन — $\frac{८}{३}$ इ^{४} भु २ ण क म .. (९)

[१०] + $\frac{१}{३}$ प^{४} न^{३} भु ४ न य. परिवर्तन + $\frac{१६}{३}$ इ^{४} भु ४ ण क म (१०)

[११] + $\frac{१}{४}$ प^{२} द म^{२} भु म य. यापासून,

+ ३ इ^{४} भु २ ण क म + ल^{२} इ^{२} भु २ ए क म — $\frac{११}{२}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ ठ) क म
— $\frac{१५}{४}$ ठ इ^{३} भु (२ — २ ठ — ण) क म .. .. (११)

[१२] — $\frac{१}{८}$ प^{२} द (म + २ न)^{२} भु (म + २ न) य. यापासून,

— ६ इ^{४} भु ४ ण क म + ११ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ ठ + २ ण) क म
+ $\frac{१३५}{८}$ ठ इ^{३} भु (२ — २ ठ + ण) क म
— २ ल^{२} इ^{२} भु (२ ए + २ ण) क म

— ६ ठ इ^{२} ई भु (२ ण + ड) क म .. .. (१२)

[१३] — $\frac{१}{८}$ प^{२} द (म — २ न)^{२} भु (म — २ न) य. यापासून,

+ $\frac{१५}{८}$ ठ इ^{३} भु (२ — २ ठ — ३ ण) क म

+ ६ ठ इ^{२} ई भु (२ ण — ड) क म .. (१३)

[१४] + $\frac{१}{३}$ प त (क + न) भु (क + न) य. यापासून,

+ $\frac{३}{४}$ इ^{४} भु ४ ण क म + $\frac{२६५}{८}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ ठ) क म

— ८ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ ठ + २ ण) कम

+ $\frac{४५}{१६}$ ठ इ^{३} भु (२ — २ ठ — ण) क म

+ ($\frac{५१}{४}$ ठ^{३} इ — $\frac{१३५}{१६}$ ठ इ^{३} — $\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इ) भु (२ — २ ठ + ण) क म

+ $\frac{२३१}{१६}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ ठ + ण — ड) क म

— $\frac{३३}{१६}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ ठ + ण + ड) क म

+ $\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इ भु (२ — २ ठ — २ ए + ण) क म

— $\frac{९}{४}$ ठ ई^{२} इ भु (ण + २ ड) क म

+ $\frac{३५}{२}$ ठ इ^{२} ई भु (२ — २ ठ — ड) कम

— $\frac{१५}{२}$ ठ इ^{२} ई भु (२ — २ ठ + ड) क म

— $\frac{१९}{६}$ ल^{२} इ^{२} भु २ ए क म + ल^{२} इ^{२} भु (२ ए + २ ण) क म

+ $\frac{९}{३}$ ठ इ^{२} ई भु (२ ण — ड) क म — $\frac{९}{३}$ ठ इ^{२} ई भु (२ ण + ड) क म

.. .. (१४)

[१५] — $\frac{१}{३}$ प त (क — न) भु (क — न) य. यापासून

— $\frac{२}{३}$ इ^{४} भु २ ण क म + ४ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ ठ) कम

— ($\frac{५९}{१६}$ ठ^{३} इ — $\frac{३}{१६}$ ठ ल^{२} इ — $\frac{४५}{१६}$ ठ इ^{३}) भु (२ — २ ठ — ण) क म

+ $\frac{४५}{१६}$ ठ इ^{३} भु (२ — २ ठ — ३ ण) क म + $\frac{१}{३}$ ल^{२} इ^{२} भु २ ए क म

— $\frac{७७}{१६}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ ठ — ण — ड) कम

+ $\frac{३३}{१६}$ ठ^{२} इ ई भु (२ — २ ठ — ण + ड) क म

+ $\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इ भु (२ — २ ठ — २ ए — ण) क म

+ $\frac{९}{४}$ ठ इ^{२} ई भु (ण — २ ड) कम .. (१५)

[१६] + $\frac{१}{२}$ द$_{१}$ द$_{२}$ (म$_{१}$ + म$_{२}$) भु (म$_{१}$ + म$_{२}$) य, यापासून

+ $\frac{३}{८}$ ल^{२} इ^{२} भु (२ ए + २ ण) क म

— $\frac{३३}{१६}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ — २ ठ + २ ण) क म

— $\frac{१३५}{३२}$ ठ इ^{३} भु (२ — २ ठ + ण) क म

+ $\frac{९}{४}$ ठ इ^{२} ई भु (२ ण + ड) क म

$-\frac{११}{१६}\text{ठ}^{२}\text{ल}^{२}\text{ भु }(२-२\text{ठ}+२\text{ए})\text{ क म}$

$-\frac{४५}{३२}\text{ठ ल}^{२}\text{इ भु }(२-२\text{ठ}+२\text{ए}-\text{ण})\text{ क म}$

$+\frac{३}{४}\text{ठ ल}^{२}\text{इं भु}(२\text{ए}+\text{ड})\text{क म}-\frac{४९५}{६४}\text{ठ}^{३}\text{इ भु }(४-४\text{ठ}-\text{ण})\text{ क म}$

$-\frac{३३}{८}\text{ठ}^{३}\text{इं भु }(२-२\text{ठ}+\text{ड})\text{ क म}$

$-\frac{४५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ इं भु}(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{ड})\text{ क म}$ .. (१६)

[१७] $-\frac{१}{२}\text{द}_{१}\text{द}_{२}(\text{म}_{१}-\text{म}_{२})\text{ भु }(\text{म}_{१}-\text{म}_{२})\text{ य}$. यापासून,

$-\frac{३५}{३२}\text{ठ इ}^{३}\text{ भु }(२-२\text{ठ}-३\text{ण})\text{ क म}$

$-\frac{९}{४}\text{ठ इ}^{२}\text{इं भु}(२\text{ण}-\text{ड})\text{ क म}$

$-\frac{१५}{३२}\text{ठ ल}^{२}\text{इ भु }(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ण})\text{ क म}$

$-\frac{३}{४}\text{ठ ल}^{२}\text{इं भु }(२\text{ए}-\text{ड})\text{ क म}$

$-\frac{१६५}{६४}\text{ठ}^{३}\text{इ भु ण क म}+\frac{३३}{८}\text{ठ}^{३}\text{इ भु }(२-२\text{ठ}-\text{ड})\text{क म}$

$+\frac{४५}{८}\text{ठ}^{२}\text{इ इं भु }(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{ड})\text{ क म}$ .. (१७)

[१८] $+\frac{१}{२}\text{द}^{२}\text{म भु २ म य}$. यापासून,

$+\frac{९}{१६}\text{इ}^{४}\text{भु ४ ण क म}+\frac{१}{१६}\text{ल}^{४}\text{भु ४ ए क म}$

$+\frac{१२१}{६४}\text{ठ}^{४}\text{भु }(४-४\text{ठ})\text{ क म}$

$+\frac{२२५}{३२}\text{ठ}^{२}\text{इ}^{२}\text{भु }(४-४\text{ठ}-२\text{ण})\text{ क म}$ .. (१८)

(१९) — च भु ग य. क म च्या समीकरणांतील चवथ्या पदवीची सर्व पदें — १ नें गुणून आणि ब च्या जागीं क म लिहून आलेला पदसंघ. ·· ··(१९)

४६९. वरच्या लेखांत जी कृति केली आहे त्या कृतीनें जो एक पदसंघ बनेल तो ब ह्या स्पष्टचंद्राबरोबर होईल. वरच्या १९ अंकापैकी १, २, ४ आणि १९ ह्या-मध्यें जी पदें आहेत ती क म बरोबर असलेल्या पदसंघात जीं पदें आहेत त्यांशीं समान आहेत, मात्र त्यांचीं चिन्हें भिन्न आहेत. म्हणून तींच पदें ब बरोबर असलेल्या पद-संघांत येतात. आणि वरचे चार अंक सोडून बाकीच्या पंधरा अंकात जीं पदें उत्पन्न झाली तीही ब च्या किंमतीत येतात. म्हणून ती पंधरा अंकात उत्पन्न झालेली पदें एकत्र केली आहेत तीं खालीं दिली आहेत. ह्यास आपण परिवर्तन पदसंघ म्हणू. तेव्हां :—

क म = ब — (कम चा पदसंघ) आणि

ब = क म + (कम चा पदसंघ) + (परिवर्तन पदसंघ)

४७०. परिवर्तन पदसंघ.

− ($\frac{१}{४}$ इ^{३} + $\frac{१६५}{६४}$ ठ^{३} इ) भु ण क म + $\frac{३}{४}$ इ^{३} भु ३ ण क म

+ (२ इ^{२} − $\frac{१}{३}$ इ^{४} − $\frac{३}{२}$ ठ^{२} इ^{२}) भु २ ण क म + $\frac{५१}{४८}$ इ^{४} भु ४ ण क म

− $\frac{५}{८}$ ल^{२} इ^{२} भु (२ ए + २ ण) क म

− $\frac{५}{३}$ ल^{२} इ^{२} भु (ए क म + $\frac{१}{१६}$ ल^{४} भु ४ ए) क म

+ ($\frac{१५}{२}$ ठ इ^{२} + $\frac{२१३}{८}$ ठ^{२} इ^{२}) भु (२ − २ ठ) क म

+ $\frac{१२१}{६४}$ ठ^{४} भु (४ − ४ ठ) क म

+ $\frac{१}{४}$ ल^{२} इ भु (२ ए − ण) क म − $\frac{३}{४}$ ल^{२} इ भु (२ ए + ण) क म

− ($\frac{११}{८}$ ठ^{२} इ + $\frac{११}{४}$ ठ^{२} इ^{२} + $\frac{५२}{१२}$ ठ^{३} इ − $\frac{३}{१६}$ ठ ल^{२} इ − $\frac{१५}{८}$ ठ इ^{३})

भु (२ − २ ठ − ण) क म

+ ($\frac{३३}{८}$ ठ^{२} इ + १२ ठ^{३} इ + $\frac{१३५}{३२}$ ठ इ^{३} − $\frac{९}{१६}$ ठ ल^{२} इ)

भु (२ − २ ठ + ण) क म

+ $\frac{१५}{२}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ − २ ठ − २ ण) क म

+ $\frac{१५}{१६}$ ठ^{२} इ^{२} भु (२ − २ ठ + २ ण) क म

+ $\frac{१३५}{३२}$ ठ इ^{३} भु (२ − २ ठ − ३ ण) क म

− $\frac{११}{१६}$ ठ^{२} ल^{२} भु (२ − २ ठ + २ ए) क म

− (३ ठ इ इं + ३ ठ^{२} इ इं) भु (ण + ड) क म

− $\frac{३३}{४}$ ठ इ^{२} इं भु (२ ण + ड) क म

+ (३ ठ इ इं − ३ ठ^{२} इ इं) भु (ण − ड) क म

+ $\frac{३३}{४}$ ठ इ^{२} इं भु (२ ण − ड) क म

+ ($\frac{३५}{२}$ ठ इ^{२} इं + $\frac{३३}{८}$ ठ^{३} इं) भु (२ − २ ठ − ड) क म

− $\frac{९}{४}$ ठ इ इं^{२} भु (ण + २ ड) क म

− ($\frac{३५}{२}$ ठ इ^{२} इं + $\frac{३३}{८}$ ठ^{३} इं) भु (२ − २ ठ + ड) क म

+ $\frac{९}{४}$ ठ इ इं^{२} भु (ण − २ ड) क म

+ $\frac{१३}{१६}$ ठ^{२} इ इं भु (२ − २ ठ − ण − ड) क म

+ $\frac{३}{४}$ ठ ल^{२} इं भु (२ ए + ड) क म

− $\frac{७९}{१६}$ ठ^{२} इ इं भु (२ − २ ठ − ण + ड) क म

− $\frac{३}{४}$ ठ ल^{२} इं भु (२ ए − ड) क म

$$+ \frac{२३१}{१६} \text{ठ}^{२} \text{इ इ}' \text{ भु} (२ - २\text{ठ} + \text{ण} - \text{ड}) \text{ क म}$$

$$- \frac{३३}{१६} \text{ठ}^{२} \text{इ इ भु} (२ - २\text{ठ} + \text{ण} + \text{ड}) \text{ क म}$$

$$+ \frac{९}{१६} \text{ठ ल}^{२} \text{इ भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ए} + \text{ण}) \text{ क म}$$

$$+ \frac{४०५}{६४} \text{ठ}^{३} \text{इ भु} (४ - ४\text{ठ} - \text{ण}) \text{ क म}$$

$$+ \frac{३}{३२} \text{ठ ल}^{२} \text{इ भु} (२ - २\text{ठ} - २\text{ए} - \text{ण}) \text{ क म}$$

$$+ \frac{२२५}{३२} \text{ठ}^{२} \text{इ}^{२} \text{ भु} (४ - ४\text{ठ} - २\text{ण}) \text{ क म}$$

$$- \frac{४५}{३२} \text{ठ ल}^{२} \text{इ भु} (२ - २\text{ठ} + २\text{ए} - \text{ण}) \text{ क म}$$

४७१. क म बरोबर असलेला पदसंघ उणा करून म्हणजे त्यास — १ नें गुणून त्यांत परिवर्तन पदसंघ मिळविला असतां ब बरोबर असलेला पदसंघ होतो. प्रस्तुत हे दोन्ही पदसंघ एकत्र न करिता तसेच भिन्न ठेविले आहेत. पुढील कृतीच्या अनुरोधानें भिन्नतेची आवश्यकता आहे.

४७२. चंद्राच्या गतिसंबंधी सिद्धांतांची सिद्धता येथे पूर्ण झाली आहे. आता ह्या सिद्धांताच्या आधारानें चंद्राचे शर भोग लंबन आणि तिथि नक्षत्र योग यांच्या साधनाची समीकरणें सिद्ध करावयाची आहेत. ती पुढच्या प्रकरणांत करीत आहे.

प्रकरण सोळावें

काल आणि ग्रहाचे शर भोग

४७३. चंद्राचीं सूक्ष्मांश समीकरणें सोडवून चंद्राचा शर, चंद्राचे भूमध्यापासून अंतर आणि चंद्राचे भोग (मध्यम आणि स्पष्ट) यांची समीकरणें मागच्या प्रकरणांत सिद्ध केली आहेत. ही समीकरणें अनुमानावलंबी शास्त्रानुसार पृथःकरण संयोगीकरण पद्धतीनें सिद्ध केली आहेत. अनुमानावलंबी न्यायशास्त्र ह्या विषयावर स्वतंत्र असा ग्रंथ महाराष्ट्र भाषेत जरी नाहीं तरी श्री. रावजी शास्त्री देवकुळे यांनीं ' भूमितीची पूरणिका ' या नांवाचा जो ग्रंथ लिहिला आहे त्यात ह्या विषयाचें सांगोपांग विवेचन केलेले आहे. त्या ग्रंथाचें अवलोकन केल्यास ह्या ग्रंथांत जी गणिताच्या सिद्धांताच्या सिद्धतेची पद्धति वापरली आहे तिचें रहस्य सहज ध्यानीं येईल.

४७४. ह्या ग्रंथांत गणित शास्त्रांतर्गत जे सिद्धांत सिद्ध केले आहेत ते सर्व सामान्य व अव्यक्त संख्या निदर्शनाकरिता घेऊन सिद्ध केले आहेत. आणि ते तसेच करावे लागतात. गेल्या प्रकरणांत जे चंद्रगतीचे सिद्धांत सिद्ध केले आहेत ते सामान्य संख्या घेऊनच केले आहेत. म्हणून वरची समीकरणें अद्यापि मुग्धावस्थेतच आहेत. त्या समीकरणांना प्रत्यक्ष शर भोग तयार करण्याचे स्वरूप ह्या प्रकरणांत द्यावयाचे आहे. मागे योजिलेल्या सामान्य अव्यक्त संख्या ठ, ल, इ आणि इं ह्या आहेत. तसेच अ आणि अं ह्याही संख्या अव्यक्तच आहेत. ह्या संख्या विशेष संख्यांनीं आणि भाववाचक नसतील त्या इष्ट परिमाणांनी कशा दाखवावयाच्या याचा आता विचार करावयाचा आहे.

४७५. वरच्या सामान्य संख्यांची मानें ठरविण्याकरिता वेधाची आवश्यकता असते. वेधाशिवाय त्या सिद्ध होत नाहींत. वेध अनेक प्रकारचे आहेत. व ते वेध घेण्यास उपकरणेंही अनेक प्रकारची आहेत. साध्या शंकूपासून तों वेध शाळेतील सम्राट यंत्रापर्यंत वेध उपकरणें अनेक आहेत. तसेंच दुर्बिणी व त्यांना जोडलेली इक्वेटोरियल, म्यूरल सर्कल, अल्टाझिमथ वगैरे यंत्रें होत. हीं साधनें कितीही उत्तम असो, कितीही सूक्ष्म असो त्यांनीं वरच्या लेखांत सांगितलेल्या अव्यक्त संख्याची मानें सूक्ष्मतर सूक्ष्मतम अशी कधीच ठरविता येणें शक्य नाहीं. त्या कार्यास गणित शास्त्रांतर्गत सिद्धांताचीच आवश्यकता असते. ह्या सिद्धांतांच्याच योजनेनें स्थूल वेधांवरून सूक्ष्म मानें ठरवितां येतात. हा विषय एका स्वतंत्र ग्रंथांत प्रतिपादन करण्यासारखा विस्तीर्ण आहे. विचारपूर्वक पाहता ह्या स्थानीं, वरच्या लेखांत वर्णिलेला ठ, ल आदिकरून संख्या वेधानें कशा सिद्ध कराव्या ह्याचें प्रतिपादन

करणें आवश्यक आहे. परंतु हे विस्तीर्ण कार्य एकाच व्यक्तीकडून होणें शक्य नसल्यामुळें येथें तसे कांहीं केलें नाहीं. तथापि त्या विषयाला 'वेध विज्ञान' हें नांव देऊन कांहीं भाग लिहिले आहेत.

४७६. वेध आणि गणितांतर्गत सिद्धांत यांनीं सिद्ध केलेली मानें वेध विज्ञान शास्त्रावरून घ्यावयाची ती येथें घेत आहे. वेधसिद्ध मानें घेताना तत्संबंधीं कांहीं गोष्टींचा खुलासा करणें प्राप्त आहे. तीं मानें स्वीकारताना त्या मानाचें परिमाण आणि संख्या, काल आणि त्याचा आद्यक्षण, स्थल किंवा रेषा ह्यांतील बिंदु यांचा विचार केला पाहिजे. ह्यासंबंधीं विचार करितांना सूर्येन्दुस्थानमान ह्या ग्रंथातील परिभाषा आणि संकेत हीं आधीं पहावीं.

निरयण गणनेचे आरंभस्थान

४७७. स्वस्थ पदार्थाचें स्थान दाखविण्यासाठी जी मोजणी करावी लागते ती मापन करण्यासाठी, ती मोजणी कोणत्या बिंदूपासून केली हें दाखविण्यास एक बिंदु निश्चित करावा लागतो. त्यास आरंभस्थान असें म्हणतात. पाश्चात्य गणक वसंतसंपात बिंदु हें आरंभस्थान घेतात. आणि भारतीय सिद्धांतकार आणि ज्योतिशास्त्रज्ञ निरयण आरंभस्थान घेतात. ह्या ग्रंथात **सूर्यसिद्धांतोक्त पौष्णांत बिंदु** आरंभस्थान घेतलें आहे. **पौष्णांताची** व्याख्या अशी कीं, **रेवती योगतारा** आणि उत्तर कदंब यामधून गेलेले वृत्त क्रांतिवृत्ताला ज्या बिंदूत छेदिते त्या बिंदूला '**पौष्णांत**' असें अन्वर्थक म्हटले आहे. यावरून भोग मानण्याचें कामी **पौष्णांत आणि रेवती योगतारा (वैजयंति)** हें भिन्न नाहींत. कोणत्याहि बिंदूचा शर त्याच्या क्रांतिवरून ठरवावा लावतो. स्वतंत्रपणें शर मोजणें अशक्य आहे. आणि ह्या कामी रवीची परमक्रांति ही अवश्य घ्यावी लागते. आपल्या प्राचीन गणकांनीं रवीची परम क्रांति २४ अंशाला कांहीं कमी सुमारें २३ अंश ५० कला इतकी घेतल्या-मुळें **रेवती योगताऱ्याचा** शर ० अंश ० कला असा दिसला. वस्तुतः त्यांनीं २३ अंश ३७ कला रवि परमक्रांति घेतली असती तर शुद्ध वेधानें १३ कला शर आला असता. **पौष्णांत म्हणजे रेवती योगतारा** होय, हे अनेक प्रमाणांनीं सिद्ध होते.

४७८. ज्योतिर्गणितांत वेधानें ज्या गोष्टी ठरवाव्या लागतात त्यांतील पुष्कळ मानें सूर्य सिद्धांतातील मानास बीज संस्कार करून घेतली आहेत. आणि कांहीं पाश्चात्य ग्रंथांतून घेतली आहेत. हीं मानें शलिवाहन शक १८०३ चैत्र शुद्ध प्रतिपदा बुधवार उज्जयिनि मध्यमार्कोदय काल ह्या क्षणीचीं आहेत. त्या सर्व संख्या खालीं दिल्या आहेत.

आरंभस्थान

पौष्णांत रेवती योगतारा (वैजयंति)

अयनांश शके १८०३ चैत्र शुद्ध प्रतिपदा

म्हणजे

पौष्णांत आणि वसंत संपात यामधील अंतर १८° १२′ ५५″.४ अयनांश वार्षिक वृद्धि +५०.२ विकला.

वसंत संपात बिंदूशीं क्रांतिवृत्त आणि विषुववृत्त यांच्या छेदन बिंदूशीं कोन शके १८०३ ह्या शकांत २३ अंश २७ कला १७·३७ विकला होता. याची वार्षिक वृद्धि —०″.४७६ आहे. म्हणजे हा कोन प्रतिवर्षि ०.४७६ विकला कमी होतो.

शके १८०३ चैत्र शुद्ध प्रतिपदा

बुधवार उज्जायेनिमध्यमार्कोदय या क्षणींचे
निरयन मध्यम भोग

कोष्टक अंक (१)

ग्रह	ग्रहाचे मध्यम भोग	केंद्र सन्निधान मध्यम भोग	कक्षापात मध्यम भोग	कक्षेची मध्यम केन्द्रच्युति
रवि	... ३४९·३३६१	२६२·६५७		·०१६७७५१
चंद्र	... ३४७·८५१२	२७२·९३९	२४३·७२५	·०५४८४४२
बुध	... २०५·२९८६	५७·३९८	२८·५३८	·२०५६१७८
शुक्र	... १४८·९६६६	१११·४८१	५७·५३१	·००६८१८३
मंगळ	... २८५·४०४६	३१५·६५३	३०·४२०	·०९३२५२८
गुरु	... १०·३६१९	३५४·२०५	८१·०५०	·०४८२२३५
शनि	... १८·८६०६	७२·४९४	९४·४९०	·०५६०२६५
हर्शल	... १४५·६४३२	१५०·४७३	५५·०९३	·०४६६००६
नेपच्यून	... २५·९३०४	२९·४६१	११२·३०३	·००८७१९३

ग्रहादिकांच्या मध्यम गति

कोष्टक अंक (२)

नाम		ग्रहादिकांची म. गति दिनगति अंश	केंद्र सन्निधान मध्यम गति अंश		कक्षापात मध्यम ग. अंश	प्रकृत्यंश भूमि एकं
रवि	..	०·९८५६०९०८	+·००३१२५	वर्ष	..	३५४९३६·०
चंद्र	..	१३·१७६३५८२९	+·१११३६६३२	दिन	—·०५२९९२४	०·०१३३९९
बुध	..	४·०९२३३८७१	+·००१६२	वर्ष	—·००२५६	०·०७२९
शुक्र	..	१·६०२१३०५७	—·०००९	वर्ष	—·००५६९४	०·९१०१
मंगळ	..	०·५२४०३२९९	+·००४३	वर्ष	—·००७०	०·१३२४
गुरु	..	०·०८३०९१२७	+·००१८४	वर्ष	—·००४४२	३३८·७१८
शनि	..	०·०३३४५९६७	+·००५३६	वर्ष	—·००५४३	१०१·३६४
हर्शल	..	०·०११७३१४२	+·०००६३	वर्ष	—·०१००१४	१४·२५१
नेपच्यून	..	०·००५९८३३६	..		..	१८·९००

ग्रहांचे प्रदक्षिणाकाल वगैरे

कोष्टक अंक (३)

ग्रह	प्रदक्षिणाकाल मध्यम सौरदिन	कक्षेच्या बृहदक्षाचे अर्ध	महत्तमशर अंश	शराची वार्षिक वृद्धि अंश
रवि ..	३६५·२५६३७४४१७	१·०००००००	०	..
चंद्र ..	२७·३२१६६१४१८	०·००२५८३४	५·१४६६४	..
बुध ..	८७·९६९२८२४	०·३८७०९८४	७·००५७५	+·००००५०
शुक्र ..	२२४·७००७७५४	०·७२३३३१७	३·३९२८६	+·००००२०
मंगळ ..	६८६·९४९४५६१	१·५२३६९१	१·८५१५२	—·०००००३
गुरु ..	४३३२·५८४८०३२	५·२०२७६७	१·३०९१४	—·००००६४
शनि ..	१०७५९·२१९७१०६	९·५३८८५०	२·४८९९२	—·००००४२
हर्शल ..	३०६८६·८२०५५५६	१९·१८२३९	०·७७४७८	+·००००0८
नेपच्यून ..	६०१२८·७२२००००	३०·०३६२७	१·७८३०५	..

४७९. वरच्या लेखांत दिलेलीं मानें हीं ठरविलेल्या एका क्षणींची आहेत. ग्रहादिकांचे मध्यम भोग इच्छिलेल्या क्षणीं किती असतील हे आपणांस ठरवितां आले पाहिजे. ग्रहादिकांची कालाच्या एकं प्रमाणात गति किती ह्या दिल्या आहेत, तेव्हां वरचा ठराविक क्षण आणि इच्छिलेला क्षण यांमध्यें कालात्मक अंतर किती आहे हे समजले तर इष्ट क्षणीं ग्रहाचे मध्यम भोग समजतील. दिलेल्या ठराविक क्षणीं ग्रहाचे मध्यम भोग यास क्षेपक म्हणू व त्यास क्ष हें अक्षर योजूं, कालात्मक अंतर क आणि एका काल परिभाणातील गति ग किंवा म तेव्हां—

मध्यम ग्रह = क्ष + कम.

४८०. दोन क्षणांमधील गेलेला काल वर्ष, मास, दिवस असल्या परिमाणांनीं दाखविला तर तो निश्चित होत नाहीं कारण वर्षाचे मास १२ किंवा १३ होतात आणि मासाचे दिवस ३० किंवा २९ होतात. यास्तव दोन क्षणांमधील गेलेला दिवस घटि आणि पळें ह्याच परिभाणांनीं दाखवावा लागतो. यास्तव कालांतराचे चंद्रमास तिथि यावरून तिथि करून त्याचे दिवस करावे लागतात. ह्या दिवसांच्या संख्येला अहर्गण दिनगण अशीं नावें ठेविलेली आहेत. चक्र अहर्गण दिनगण या विषयांचे उपपादन सूर्यंदु नामक पुस्तकांत विस्तृत रीतीनें केलेलें आहे. त्या उपपादनांत उत्तम ठरलेले चक्र १६० वर्षाचें आहे. त्या चक्रास मधुसूदन चक्र हें नांव दिलेले आहे. ह्या चक्रांत नियमित वर्षक्रमांकीं नियमित अधिकमास येतो. या विषयासंबंधी विशेष स्पष्टीकरण सूर्येंदुस्थानमान ह्या पुस्तकांत पहावे. लेखांक ४७४ मध्यें ठ ल इ इत्यादि सामान्य संख्या व्यक्त संख्यानीं कशा दाखवावयाच्या हें आतां पाहू.

४८१. आता आपण ठ ल आदि करून सामान्य संख्या विशेष संख्यांनीं कशा दाखवितां येतात हें पाहूं.

(१) ठ हे रवीच्या मध्यम गतीचें चंद्राच्या मध्यमगतीशीं असलेले गुणोत्तर आहे. गुणोत्तर हें भाव संख्यात्मक असतें. अर्थात ह्या संख्येचें परिमाण एकं हें असतें आणि एकं हे संख्या परिमाण हव्या त्या वस्तु परिमाणाशी योजता येते. त्या आधारें परिमाण पुढे योजू. प्रथम ठ ही संख्या किती ते ठरवूं.

ठ = सूर्याची मध्यम गति ÷ चंद्राची मध्यम गति

= चंद्राचा प्रदक्षिणाकाल ÷ पृथ्वीचा प्रदक्षिणा काल

[लेख ३७६ पहा]

वरच्या कोष्टक अंक (३) मध्यें चंद्र-सूर्याचे प्रदक्षिणाकाल दिले आहेत त्यावरून—

ठ = २७·३२१६६१४ ÷ ३६५·२५६३७४४

= ०·०७४८०१३५.

(२) ल ही चंद्राच्या महत्तम शराची स्पर्शरेषा आहे, आणि चंद्राचा महत्तमशर ५ अंश ८ कला ४७·९ विकला असतो. म्हणून

$$ल = स्प \ (५^\circ ८' ४७''·९) = ०·०९००६८१.$$

(३) इ ही चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति आहे. अर्थात इ ही गुणोत्तराची संख्या आहे आणि ती संख्या वरच्या कोष्टक अंक (१) मध्ये दिली आहे.

$$इ = \text{चंद्रकक्षेची केंद्रच्युति} = ०·०५४८४४२$$

(४) वरच्या प्रमाणेच इं ही संख्या आहे

$$इं = \text{भू कक्षेची केंद्रच्युति} = ०·०१६७७५१.$$

$$(४) \quad अ = \frac{१}{भ} = \frac{१}{(१ - इ^२) ख} \qquad [\text{लेख } १७८]$$

$$अं = \frac{१}{भं} = \frac{१}{(१ - इं^२) ख'} \qquad [\text{लेख } १७८]$$

तेव्हां

$$\frac{अं}{अ} = \frac{१ - इ^२ ख}{१ - इं^२ ख'} = (१ - इ^२ + इं^२) \times ०·००२५३८४.$$

$$= (१ - ·००३०० + ·०००२२) \times ०·००२५३८४$$

$$= ०·००२५३$$

४८२. दोन बिंदूमधील अंतर ही रेषा असते, त्याप्रमाणे दोन दिशांमधील अंतर म्हणजे कोन, हाही वक्र रेषेनें मापिता येतो. दोन पदार्थांपैकीं एकाचें दुसऱ्या-वरील आकर्षण हेही रेषेनेंच मापितात. कोनाचें मापन वृत्त परिमाणानें करितात. लेखांक ४८ यामध्यें वृत्त परिमाणाचें स्पष्टीकरण केलें आहे. यावरून

$$भगण = ३६० \text{ अंश} = २\pi \text{ वृत्त परिमाण.}$$

$$राशि = ३० \text{ अंश} = \frac{\pi}{६} \text{ वृत्त परिमाण.}$$

$$नक्षत्र = १३\tfrac{१}{३} \text{ अंश} = \frac{२\pi}{२७} \text{ वृत्त परिमाण.}$$

४८३. वरच्या विवेचनावरून कळून येईल कीं ठ ल इ इं ह्या केवळ संख्या म्हणजे भाव संख्या आहेत. त्या सर्वांना किंवा त्यांच्या बेरीज-वजाबाकीला किंवा

गुणाकार-भागाकाराना एकच परिमाण देता येतें. यास्तव त्यास वृत्त परिमाण हा एकं घेऊं आणि प्रत्येक संख्या वृत्त परिमाणाने दाखवूं. एका वृत्तपरिमाणाच्या विकला--

१ वृत्तपरिमाण = २०६२६४·८०६२ विकला.

घातांक २०६२६४·८०६२ = $\overset{+}{५}$·३१४४२५१

घा ठ = घा (·०७४८०१३५) = $\overline{२}$·८७३९०९३

घा ल = घा (·०९००६८१) = $\overline{२}$·९५४५७१०

घा इ = घा (·०५४८४४२) = $\overline{२}$·७३९१३०७

घा इं = घा (·०१६७७५१) = $\overline{२}$·२२४६६५०

या घातांकांच्या सहाय्याने ठ^{२}इ किंवा ठ ल^{२} इ अगर ठ^{२} असल्या पदांची किंमत सहज काढता येईल.

उदाहरणार्थ ठल^{२}इ ह्या गुणकाची विकलात्मक किंमत काढून दाखवितो. वर्गात्मक जी संख्या असेल तिचा घातांक दोन वेळा घ्यावा.

घा ठ = $\overline{२}$· ८७३९०९३
घा ल = $\overline{२}$· ९५४५७१०
घा ल = $\overline{२}$· ९५४५७१०
घा इ = $\overline{२}$· ७३९१३०७

घाठल^{२}इ = $\overline{५}$· ५२२१८२०

घाठल^{२}इ = $\overline{५}$·५२२१८२०
घावृ. वि. = $\overset{+}{५}$·३१४४२५१

घा(ठल^{२} इ) = ०·८३६६०७१
ठल^{२}इ = ६·८६४ विकला.

याप्रमाणे गुणकाच्या किंमती विकलात्मक काढून खालीं दिल्या आहेत:—

गुणक	विकला	गुणक	विकला	गुणक	विकला	गुणक	विकला
ठ	१५४२८·८८	ल^{३}	१५०·७०	लइइ̄	१७·०९	ल^{२}इ^{२}	५·०३
ल	१८५७७·८७	इ^{३}	३४·०३	ठ^{२}लइ̄	१·७४	लइ^{३}	३·०६
इ	११३१२·४२	ठ^{२}ल	१०३·९४	ठ^{२}लइ	५·७०	ठलइइ̄	१·२८
इ̄	३४६०·११	ठ^{२}इ	६३·३०	ठ^{२}इइ̄	१·०६	ठ^{४}	६·४६
ठ^{२}	११५४·१०	ठ^{२}इ̄	१९·३६	ठ^{२}ल^{२}	९·३६	ल^{४}	१३·६०
ल^{२}	१६७३·२७	ठल^{२}	१२५·१६	ठ^{२}इ^{२}	३·४७	इ^{४}	१·८७
इ^{२}	६२०·४२	ठइ^{२}	४६·४१	ठ^{२}इ̄^{२}	०·३२	ठ^{३}ल	७·७७
इ̄^{२}	५८·०४	ठइ̄^{२}	४·३२	ठल^{३}	११·२७	ठ^{३}इ	४·७३
ठल	१३८९·६४	ल^{२}इ	९१·७७	ठइ^{३}	२·५४	ठ^{३}इ̄	१·४५
ठइ	८४६·१८	ल^{२}इ̄	२८·०७	ठलइ^{२}	४·१८	इ^{२}इ̄^{२}	०·१७
ठइ̄	२५८·८२	इ^{२}इ̄	१०·४१	ठल^{२}इ	६·८६	ल^{२}इ̄^{२}	०·४७
लइ	१०१८·८९	लइ^{२}	५५·८८	ठइ^{२}इ̄	०·७८	इ̄^{२}इ	३·१८
लइ̄	३११·६४	ठलइ	७६·२१	ठल^{२}इ̄	२·१०	ठलइ̄^{२}	०·३९
इइ̄	१८९·७६	ठलइ̄	२३·२१	ठइइ̄^{२}	०·२३	. .	. .
ठ^{३}	८६·३३	ठइइ̄	१४·१९	ल^{३}इ	८·२६	. .	. .

४८४. प्रत्येक पदाचें केंद्र आपण एथपर्यंत जे लिहित आलो आहोत त्यातील स्थीर पदें आपण गाळिली आहेत. म्हणजे स्थीर लिहिलीं नाहींत पण ती त्यांत आहेत. सूक्ष्मांश समीकरणांत विकारी पद आणि अवलंबी पद या व्यतिरिक्त सर्व संख्या स्थीर असल्यानें तें समीकरण सोडविता येतें. म्हणून प्रत्येक चल संख्येची गति विकारी पदाच्याच रूपानें दाखवावी लागते. यामुळें केंद्राचें लेखन विस्तार पावले आहे. आता तो विस्तार कमी करून प्रत्येक केंद्राची संख्या कशी तयार करावी याचा आतां आपण विचार करू. याकरितां प्रमुख केंद्राचें स्पष्टीकरण करूं.

४८५. ण ब आणि ण क म ही केंद्रें आपण योजिली आहेत यांचे स्वरूप जाणण्या-करिता ३८३ वा लेख पहा. ह्या दोन्ही केंद्रामध्यें उ हे स्थीर पद आहे. म्हणजे ती केंद्रें खालीं दिल्याप्रमाणें आहेत.

(णकम — उ) आणि (णब — उ)

ह्या केंद्रांमधील ण ही संख्या केंद्र संन्निधानाचें चलन दाखविण्यासाठीं योजिली आहे. (लेख ३७८ व ३७९ पहा). त्या स्थानीं दाखविले आहे कीं:

चंद्रोच्चगति म्हणजेच चं. केंद्र संन्निधान गति = चं. म. गति (१–ण) तेव्हां.

णकम — उ = — कम + णकम + कम — उ

= — कम (१ — ण) + कम — उ

= कम — उ–कम (१ — ण)

= कम — { उ + कम (१ — ण) }

= मध्यमचंद्र क काली — (क = ० असतां केंद्र सं + क कालातील के. स. गति)

= क काली म. चंद्र — क कालीं चं. केद्रसंनिधान

ह्यावरून लक्षांत येईल कीं णकम याचा अर्थ क कालांतीचा मध्यमचंद्र यांतून वजा त्याच क्षणीचें चंद्राचें केंद्र सन्निधान. हा आहे. ह्या केंद्रास पूर्वकालीन गणकानी मंदकेंद्र असें नांव दिले आहे. तेंच मी माझ्या ग्रंथांमधून वापरले आहे. हें केंद्र संक्षेपे एकाक्षरानें दाखवावे हें मनांत आणून त्यास मं हें अक्षर योजिले आहे. आणि णब ह्याचाही अर्थ असाच आहे तो असा कीं ब हा स्पष्टचंद्र ज्या क्षणींचा आहे, त्यात त्याच क्षणीचें केंद्र संन्निधान वजा करून आलेली बाकी. पण मध्यमचंद्र आणि स्पष्टचंद्र समान असे सर्वदा नसतात पण त्याचे वैषम्य पदरूपानें काढून टाकले आहे. म्हणून णब हें केंद्रसुद्धा मं ह्या अक्षरानें दाखवितां येतें.

४८६. आतां एकम आणि एव याचा विचार करूं.

एकम − रा = − कम + एकम + कम − रा
= + (ए − १) कम + कम − रा
= कम − रा + (ए − १) कम
= कम − $\left\{\right.$ रा − (ए − १) कम $\left.\right\}$

= मध्यमचंद्र क कालीं — (क = ० असता राहु — क कालातील राहुगति)

= क कालांती मध्यमचंद्र — क कालांती राहु. ह्या केंद्रास विराहुचंद्र हें नांव देऊन वि हे नामाक्षर योजिले आहे.

४८७. (२—२ठ) कम—२घ या केंद्रात

२कम—२ठकम—२घ=२(मध्यमचंद्र — मध्यमरवि) चंद्र सूर्याच्या वजा-बाकीवरून यास तिथिकेंद्र असे नांव आहे तसेंच

(२—२ठ—ण) कम—२घ+उ या केंद्रांत.

$\left\{\right.$(२—२ठ) कम—२घ$\left.\right\}$—णकम+उ=तिथिकेंद्राची दुप्पट यातून मंद-केंद्र वजा करणें असा अर्थ आहे या केंद्रास च्युतिकेंद्र असें नांव आहे. (म.चं — म. रवि) यास म्हणजे तिथिकेंद्रास ति हें नामाक्षर योजिले आहे. आणि च्युतिकेंद्रास च्यु हें नामाक्षर योजिले आहे.

त्याचप्रमाणें ठकम+घ—द्र हें रवीचें मंदकेंद्र आहे यास सं हें नामाक्षर योजिलें आहे.

मं, वि, ति, च्यु आणि सं ही मुख्य केंद्रे होत इतर केंद्रें याच केंद्राच्या कांहीं पटींच्या संयोग वियोगानें बनतात. तेव्हां, ही नामाक्षरें योजून आपणास केंद्रे लिहिली पाहिजेत.

४८८. लेखांक ४६५ मध्यें जें कम चें समीकरण लिहिले आहे, त्या समीकरणा-वरून सिद्ध होते कीं, जर आपणास स्पष्टचंद्र माहित असेल तर तो ज्या क्षणींचा असेल त्याक्षणीं मध्यमचंद्र किती हें आपणास कळेल. त्या मध्यमचंद्राला म ह्या चंद्राच्या मध्यमगतीनें भागिले तर मध्यमचंद्र ० ज्या क्षणीं होता त्या क्षणापासून स्पष्टचंद्र ज्या क्षणींचा त्या क्षणापर्यंत गेलेला काल समजेल. जसें—

कम = ब − २ इ भुण ब = $\frac{१}{८}$ ठ^{२} भु (२−२ ठ) ब

किंवा कम = ब − २ इ भुमं − $\frac{११}{८}$ ठ^{२} भु २ ति + ... यास म नें भागिले तर

$$\text{क} = \frac{\text{ब}}{\text{म}} - \frac{\text{२इ}}{\text{म}}\,\text{भुमं} - \frac{\text{११}}{\text{८}}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}}{\text{म}}\,\text{भु २ ति} + \cdots\cdots$$

ह्यावरून कळते कीं $\frac{\text{ब}}{\text{म}}$ हा काल आहे व तो काल ब हा मध्यमचंद्र असता तर जो काल आला असता तितकाच आहे. आणि मं, रवि, वगैरे केंद्र $\frac{\text{ब}}{\text{म}}$ ह्या पदानें जो काल दाखविला जाईल त्या कालांतीची असतात. या विषयाचा विचार पुढे करू. आतां आपण कम चें समीकरण सामान्य संख्यात्मक गुणकाचें आहे तें विकलात्मक गुणकाचें करूं.

४८९. विकलात्मक गुणकांचें कम चें समीकरण.

कम = खालचा पदसमूह

ब — २२६२४.८४ भु मं ;	+ ४७६.३८ भु २मं
— ११.३४ भु ३मं	+ ०.५४ भु ४मं
+ १३१.८६ भु ति	— १९२४.९६ भु २ति
— ०.९६ भु ३ति	+ ७.१७ भु ४ति
— ४६९६.६५ भु च्यु	+ ७.१५ भु २च्यु
+ ६७९.७९ भु सं	+ ९.७२ भु २सं
+ ४१०.९० भु २वि	+ ०.४२ भु ४वि
— १८६.१८ भु (२ति-२मं)	— ७.०४ भु (२ति + २मं)
+ १४४.०० भु (२ति + मं)	+ १४.७८ भु (४ति — मं)
— १८२.९६ भु (च्यु — सं)	+ ५५.७० भु (च्यु + सं)
— १२४.१२ भु (२ति — सं)	+ १२.५० भु (२ति + सं)
— ७१.१८ भु (मं — सं)	+ ६२.०४ भु (मं + सं)
+ ९९.२९ भु (२ वि — मं)	— २२.९४ भु (२ वि + मं)
— ५९.२१ भु (२ति — २वि)	— १.१९ भु (२ ति + २वि)
— ३.०० भु (२ ति + २वि — मं)	+ ५.१४ भु (२ति — २वि — मं)
— १५.२२ भु (२ति — २मं + सं)	— १०.२५ भु (२ति — २मं — सं)
— ६.५९ भु (२ति — २वि + सं)	— ७.२४ भु (२ति — २वि — सं)
+ ५.५६ भु (मं + २ सं)	— ६.१८ भु (मं — २सं)
+ ३.८६ भु (२वि + सं)	— ३.८६ भु (२वि — सं)

—७.४८ मु (२ति—२सं)	—३.१६ मु (ति+मं)
+४.९६ मु (ति—मं)	+०.९४ मु (२वि+२मं)
+७.४२ मु (२ति+मं—सं)	+१.२२ मु (२मं—सं)
—१.०६ मु (२ति+मं+सं)	—१.२२ मु (२मं+सं)
—९.०१ मु (२ति—२वि+मं)	

४९०. केंद्र परिवर्तन कार्यानें जो पदसंघ उत्पन्न झाला आहे त्या संघांतील प्रत्येक पदाची विकलात्मक किंमत खालीं दिली आहे :—

+१२४५.४३ मु २मं	+२५.५२ मु ३मं
—८.३८ मु २वि	+२.३० मु ४ मं
+२२.९४ मु (२वि—मं)	—६८.८२ मु (२वि+मं)
—३.१८ मु (२ वि+२मं)	+०.८५ मु ४वि
+४४०.४६ मु २ति	—९४.७१ मु च्यु
+.३२४.८१ मु (२ति+मं)	+२६.०२ मु (२ति—२मं)
+३.२५ मु (२ति+२मं)	+८.३३ मु (२ति—३मं)
—४५.७५ मु (मं+सं)	+३९.३९ मु (मं—सं)
—६.४३ मु (२मं+सं)	+६.४३ मु (२मं—सं)
+३.८६ मु (२ति—२वि+मं)	+०.६४ मु (२ ति—२वि—मं).
—९.६५ मु (२ति+२वि—मं)	—६.४३ मु (२ ति+२वि)
+१५.३१ मु (२ति+मं—सं)	—२.१८ मु (२ति+मं+सं)
+१९.६३ मु (२ति—सं)	—११.८३ मु (२ति+सं)
+०.५२ मु (मं—२सं)	—०.५२ मु (मं+२सं)
+०.८६ मु (च्यु—सं)	—५.२४ मु (च्यु+सं)
+१.५८ मु (२वि+सं)	—१.५८ मु (२वि—सं)
+३६.५८ मु (४ति—मं)	+२४.४० मु २च्यु
+१२.२१ मु ४ति	

४९१. कम चा विकलात्मक पदसंघ जो ४८९ व्या लेखांत दिला आहे, त्याला —१ नें गुणून म्हणजे पद धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन करून त्यांत, वरचा केंद्र परिवर्तन कार्यानें उत्पन्न झालेला पदसंघ धनर्ण केला म्हणजे ब ह्या स्पष्ट

चंद्राबरोबर असलेला पदसंघ तयार होतो. त्याप्रमाणें कृति करून खालचा पदसंघ लिहिला आहे—

ब=खालचा पदसंघ

कम+२२६२४.८४ मु मं	+७६९.०५ मु २मं
+३६.८६ मु ३मं	+१.७६ मु ४मं
−१३१.८६ मु ति	+२३६५.४२ मु २ति
+०.९६ मु ३ति	+५.०४ मु ४ ति
+४६०१.९३ मु च्यु	+१७.२५ मु २ च्यु
−६७९.७९ मु सं	−९.७२ मु २सं
−४१९.२८ मु २ वि	−१.२७ मु ४ वि
+२१३.२० मु (२ति−२मं)	+१०.२९ मु (२ति+२मं)
+१८३.८२ मु (च्यु−सं)	−६०.९४ मु (च्यु+सं)
+१८०.८१ मु (२ति+मं)	+३६.५८ मु (४ति−मं)
+१४३.७५ मु (२ति−सं)	−२४.३३ मु (२ति+सं)
+११०.५८ मु (मं−सं)	−१०७.७९ मु (मं+सं)
−७६.३५ मु (२वि−मं)	−४५.८८ मु (२ वि+मं)
+५९.२१ मु (२ति−२वि)	−५.२४ मु (२ति+२वि)
+१५.२२ मु (२ति−२मं+सं)	+१०.२५ मु (२ति−२मं−सं)
+५.७८ मु (२ति−२वि−मं)	+१२.८७ मु (२ति−२वि+मं)
−६.६५ मु (२ति+२वि−म)	+८.३३ मु (२ति−३म)
+७.२४ मु (२ति−२वि−सं)	+६.५९ मु (२ति−२वि+सं)
+७.८९ मु (२ति+मं−स)	−१.१२ मु (२ति+मं+सं)
−५.२१ मु (२मं+सं)	+५.२१ मु (२मं−स)
+६.७० मु (मं−२सं)	−६.०८ मु (मं+२सं)
+२.२८ मु (२वि−सं)	−२.२८ मु (२वि+स)
+७.४८ मु (२ति−२सं)	+३.१६ मु (ति+म)
−४.९६ मु (ति−मं)	−०.९४ मु (२वि+२म)

४९२. चंद्राचा शर साधण्याचें समीकरण तयार करावयाचें आहे. ४३६ व्या लेखांत शराचें समीकरण चवथ्या पदवीचें तयार केलें परंतु त्यांतील अव्यक्त संख्या काढून त्यांच्या व्यक्त किंमती त्या जागीं आणिल्या पाहिजेत. त्या समीकरणांत श

ही शराची स्पर्शरेषा (त्रिकोण मिति विषयक गुणोत्तर) आहे. तेव्हां प्रथम त्याचें वृत्तपरिमाण केलें पाहिजे. हें कार्य लेख २३४ च्या आधारें करिता येतें. त्याप्रमाणें

$$\text{शर (वृत परिमाण)} = \text{श} - \frac{१}{३}\text{श}^{३} + \frac{१}{५}\text{श}^{५}$$

आपल्या गणिताची सूक्ष्मता चवथ्या पदवीपर्यंत आहे. म्हणून वरच्या $+\frac{1}{5}$ श^{५} ह्या पदाची आवश्यकता नाहीं. म्हणून $-\frac{1}{3}$ श^{३} ह्या पदाची किमत काढून ती श मध्यें वजा केली म्हणजे वृत्त परिमाणात्मक शर होईल. आतां

$$-\tfrac{1}{3}\text{श}^{३} = -\tfrac{1}{3}\left\{(\text{श}_{१})^{३} + ३\,(\text{श}_{१})^{२}\,(\text{श}_{२}) + ३\,(\text{श}_{१})\,(\qquad)\cdots\right\}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\left\{\text{ल}^{३}\text{भु}^{३}\text{एब} + ३\,\text{ल}^{२}\text{भु}^{२}\text{एब} \times \tfrac{3}{8}\,\text{ठलभु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ए})\,\text{ब}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{3}\text{श}^{३} = \left[\begin{array}{l} -\tfrac{1}{4}\text{ल}^{३}\text{भु एब} + \tfrac{1}{12}\text{ल}^{३}\text{भु ३ एब} - \tfrac{3}{16}\text{ठल}^{३}\text{भु}\,(२-२\text{ठ}-\text{ए})\,\text{ब} \\ +\tfrac{3}{32}\text{ठल}^{३}\text{भु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ए}) + \tfrac{3}{32}\text{ठल}^{३}\text{भु}\,(२\text{-}२\text{ठ}-३\text{ए})\,\text{ब} \end{array}\right.$$

ही पांच पदें श च्या किमतीत धनर्ण केली म्हणजे शराचें वृत्त परिमाण ह्याची किमत येईल. त्या किमतीतील ठ ल इ इं या गुणकांच्या विकलात्मक किमती ४८३ च्या लेखांत दिल्या आहेत, त्या घेऊन प्रत्येक पदाचा विकलात्मक गुणक तयार केला म्हणजे शराचें समीकरण तयार होईल. ह्याप्रमाणें कृति करून शराचें विकलात्मक गुणकाचें समीकरण खालीं लिहिले आहे. त्यांत वरची पांच पदें धनर्ण केली आहेत.

४९३. चंद्राच्या शराचें समीकरण विकलात्मक गुणकाचें हें समीकरण स्पष्ट चंद्रावरून साधिले आहे.

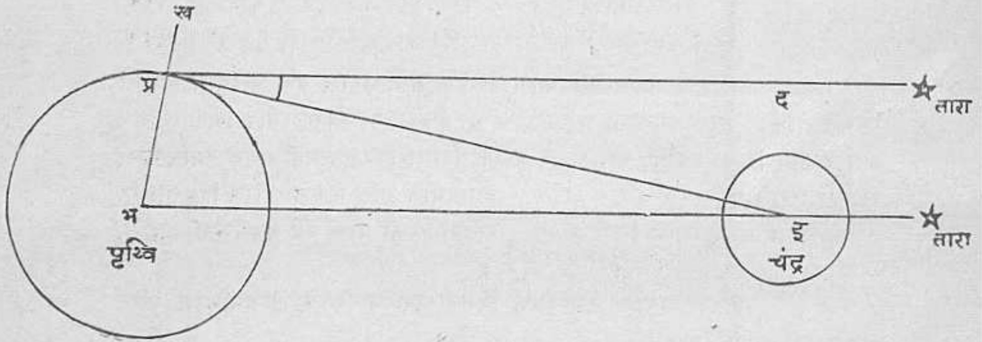
शर = खालचा पदसंघ

+ १८५४०·२० भु वि   + ५३३·६४ भु {वि — २ (म · र — रा)}
— २५·८९ भु (वि — सं)   + २४·२६ भु (वि + सं)
+ २५·२२ भु (२ मं — वि)   — १९·२४ भु (२ ति — वि — मं)
+ २२·०८ भु (२ ति — वि — सं) — १०·२३ भु (२ ति — वि + सं)
+ १७·१० भु (वि — मं)   + १२·५६ भु ३ वि
+ ५·०० भु (२ ति — वि + मं) — ५·७० भु (२ वि + मं)
+ १·४४ भु (२ ति + वि)   — ३·३३ भु (२ ति — २ मं — वि)

— ०·७१ भु (२ ति + वि — मं) + ०·१४ भु (२ ति + वि + मं)
+ ०·६२ भु (२ ति — वि — २ सं) — ०·१९ भु (वि — २ सं)
+ ०·९८ भु (२ ति — २ मं + वि) — ०·४१ भु (२ ति — ३ वि)

चंद्राचे क्षितीज लंबन

४९४. लंबन म्हणजे लोंबणें. चंद्राचें वास्तव स्थान गणितानें जें येतें ते भूमध्यापासून पाहिले असता जें आकाशांत दिसेल तें असतें. पण आपण पाहणार भूपृष्ठावरून म्हणून दृश्यस्थानात भेद पडतो. त्यामुळें वास्तव स्थानापासून तो दृश्य पदार्थ क्षितिजाकडे लोंबलेला दिसतो. हे जे दिशांतर त्याला लंबन म्हणतात. हे लंबन क्षितिजाशी जास्त असून पदार्थ खस्वस्तिकाकडे जसजसा वर येईल तसतसें तें कमी कमी होऊन खस्वतिकीं शून्य होते. क्षितिजाशीसुद्धा लंबन भिन्न भिन्न होते. पदार्थ भूमध्यापासून जसजसा दूर असेल तसतसे लंबन कमी होत जाते. ह्या संबंधी स्पष्टीकरण आकृतीनें केलें असता विशेष स्पष्ट होते. म्हणून आकृतिद्वारा खुलासा करितो.



भ हा पृथ्वीचा मध्य आणि इ हा चंद्राचा मध्य आहे. भ स्थानापासून चंद्राचा मध्य भइ दिशेला दिसेल. पण प्रेक्षक जर भ स्थानी नसेल आणि प्र स्थानापासून जर चंद्राकडे पहात असेल तर चंद्र त्याला प्रइ दिशेला दिसेल. पण चंद्र जर फार अंतरावर असता तर भ आणि प्र ह्या दोन्ही स्थानापासून एकाच ताऱ्याच्या दिशेत दिसला असता. दोन्ही स्थानापासून पाहिले असता जें दिशा भिन्नत्व येतें त्यास लंबन म्हणतात म्हणजे दप्रइ ह्या कोनास लंबन असें म्हणतात. चंद्र क्षितिज पातळीत असता जें लंबन दिसतें तें क्षितिज लंबन होय.

४९५. लंबन म्हणजे दप्रइ कोन किंवा प्रइभ कोन होय. ह्या कोनाचें मापन भप्र आणि भइ ह्या दोन रेषांनीं होते. इप्रभ कोन काटकोन आहे. कारण क्षितिज पातळी भ ख ह्या ख स्वस्तिकाच्या दिशेशी काटकोन करणारी असते. आता दप्रइ कोन हा भइप्र कोनाबरोबर आहे. तेव्हां

$$\frac{\text{प्र भ}}{\text{भ इ}} = \text{भुज ज्या (भ इ प्र) कोन} = \text{भु ज ज्या (लं ब न)}$$

चंद्राचा हा भइप्र कोन मध्यम मानानें ५७ कला १·८ विकला असतो. मध्यम मानानें म्हणजे भइ हें अंतर मध्यमांतराइतके असेल तेव्हाचा कोन. प्रभ ही रेषा भूत्रिज्या आहे म्हणजे ही रेषा लांबीच्या मानानें स्थिर म्हणजे कमीजास्त न होणारी आहे. तेव्हां चंद्राचें क्षितिज लंबन सर्वदा चंद्राच्या भूमध्यापासून असलेल्या अंतरावर अवलंबून आहे. चंद्राचें भूमध्यापासून अंतर त्याच्या कक्षेतील प्रत्येक स्थानीं किती असते हें आपण सिद्ध केलें आहे. चंद्र मध्य आणि भूमध्य यामध्ये अंतर र परिमाणे आहे असे आपण घेतले आहे. आणि $र = \frac{१}{व}$ मानिला आहे म्हणजे $\frac{१}{र} = व$ हा अपूर्णांक आहे. व ची किंमत चंद्र कक्षेच्या केन्द्रग भुजार्धानें दाखविली आहे. तें समीकरण ४५१ ह्या लेखांत आहे. त्यांतील केंद्रे ब ह्या स्पष्टचंद्रांनीं निर्मिली आहेत. लंबन सिद्ध करण्याला व च्या किंमतीची आवश्यकता आहे. ती किंमत मात्र मध्यमचंद्राचें केंद्र बनवून आणिली पाहिजे. स्पष्टचंद्रानें आणिल्यास स्थूल येतें. यासाठी व ची किंमत कम नें सिद्ध केली पाहिजे.

४९६. व चें समीकरण ४२३ व्या लेखांत आहे किंवा ४५१ ह्या लेखांत दिले आहे त्यापैकीं तिसऱ्या पदवीची कांहीं निवडक पदें घेतली म्हणजे ती लंबनाचें गणिताला पुरेशी होतात. हें समीकरण स्पष्टचंद्रानें साधिलेलें तें आपणाला मध्यमचंद्रावरून साधलें पाहिजे. यासाठीं त्यामधील स्पष्टचंद्राच्या जागीं त्याबरोबर असलेली मध्यमचंद्रानें साधलेली किंमत ठेवू म्हणजे इष्ट असें समीकरण तयार होईल. आरंभी ब ची किंमत सामान्य स्वरूपाची घेऊं. ती अशी

$$ब = कम + (ब_१) + (ब_२)$$

$$णब = णकम + ण\ (ब_१) + ण\ (ब_२)$$

४५६ ह्या लेखाप्रमाणें म्हणजे

$$को\ भु\ घ = (१ - \tfrac{१}{२}प^२)\ को\ भु\ अ - प\ भु\ अ - द\ भु\ अ$$

यातील $घ = णब$ आणि $अ = णकम$, तसेंच $प = ण(ब_१)$

$$को\ भु\ ण\ ब = को\ भु\ ण\ क\ म - ण\ (ब_१)\ भु\ ण\ क\ म$$
$$- \tfrac{१}{२}\{ण\ (ब_१)\}^२\ को\ भु\ ण\ क\ म - ण\ (ब_२)\ भु\ ण\ क\ म$$
$$(ब_१) = + २\ इ\ भु\ ण\ क\ म;\ (ब_२) = + (२\ इ^२ - \tfrac{३}{४}\ इ^२)$$
$$= \tfrac{५}{४}\ इ^२\ भु२\ ण\ क\ म$$

आणि $ण = १$ तेव्हां

$$को\ भु\ ण\ ब = को\ भु\ ण\ क\ म - २\ इ\ भु\ ण\ क\ म \times भु\ ण\ क\ म$$
$$- \tfrac{१}{२} \times ४\ इ^२\ भु^२\ ण\ क\ म\ कोभुणकम - ण\ (ब_२)\ भु२णंकम$$

ह्यामधील ($\text{ब}_२$) मध्यें पांच पदें आहेत त्यापासून येणारीं पदें.

$$
\begin{aligned}
&+ \tfrac{५}{८}\, \text{इ}^२ \left\{\text{को भु ३ण क म} - \text{को भु ण क म}\right\} \\
&- \tfrac{१}{८}\, \text{ल}^२ \left\{\text{को भु (२ए + ण) क म} - \text{को भु (२ए − ण) कम}\right\} \\
&+ \tfrac{११}{१६}\, \text{ठ}^२ \left\{\text{को भु(२ − २ठ + ण) कम} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \text{को भु(२ − २ठ − ण) क म}\right\} \\
&+ \tfrac{१५}{८}\, \text{ठ इ} \left\{\text{को भु (२ − २ठ) क म} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \text{को भु (२ − २ठ − २ण) क म}\right\} \\
&- \tfrac{३}{२}\, \text{ठइं} \left\{\text{को भु (ण + ड) कम} - \text{को भु (ण − ड) क म}\right\}
\end{aligned}
$$

वर निघालेल्या पदास इ नें गुणून सर्व समीकरण लिहिलें तेव्हां

$$
\text{इ को भु ण ब} = \left\{
\begin{aligned}
&+ \text{इ को भु ण क म} - \text{इ}^२ + \text{इ}^२ \text{ को भु२ ण क म} \\
&+ \tfrac{५}{८}\, \text{इ}^३ \text{ को भु ३ ण क म} - \tfrac{५}{८}\, \text{इ}^३ \text{ को भु ण क म} \\
&- \tfrac{१}{८}\, \text{ल}^२ \text{ इ को भु (२ए + ण) क म} \\
&\qquad\qquad + \tfrac{१}{८}\, \text{ल}^२ \text{ इ को भु (२ए − ण) क म} \\
&+ \tfrac{११}{१६}\, \text{ठ}^२ \text{ इ को भु (२ − २ठ + ण) क म} \\
&\qquad\qquad - \tfrac{११}{१६}\, \text{ठ}^२ \text{ इ को भु (२ − २ठ − ण) क म} \\
&+ \tfrac{१५}{८}\, \text{ठ इ}^२ \text{ को भु (२ − २ठ) क म} \\
&\qquad\qquad - \tfrac{१५}{८}\, \text{ठ इ}^२ \text{ को भु (२ − २ठ − २ण) क म} \\
&- \tfrac{३}{२}\, \text{ठ इ इं को भु (ण + ड) क म} + \tfrac{३}{२}\, \text{ठ इ}' \text{ को भु} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(क − ड) क म}
\end{aligned}
\right.
$$

आता ब च्या किमतीतील दुसऱ्या पदवीच्या पदांतील ब च्या ठिकाणीं कम येईल अशीं पदें शोधावयाची आहेत.

$$\text{ब} = \text{कम} - \text{२इ भुणकम}$$

ह्यास फ नें गुणून त्याची को भुज्या केली

$$
\begin{aligned}
\text{को भु फ ब} &= \text{को भु फ क म} \times \text{को भु (२ फ इ भु ण क म)} \\
&\quad - \text{भु फ क म} \quad \times \text{भु (२ फ इ भु ण क म)} \\
&= \text{को भु फ क म} \qquad - \text{फ इ को भु (फ + ण) क म} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{फ इ को भु (फ − ण) क म}
\end{aligned}
$$

ह्यातील फ च्या ठिकाणीं दुसऱ्या पदवीच्या प्रत्येक पदाचा केंद्रगुणक ठेवून पदें काढिली, आणि त्या पदास ज्याच्या त्या केंद्रगुणकानें गुणिले म्हणजे इष्ट पदें तयार होतील.

फ च्या ठिकाणी २ए, २—२ठ आणि २—२ठ—ण हें तीन गुणक येतात.

$$२ ए \text{ पासून } - \frac{१}{२} ल^{२} इ \left\{ को भु (२ ए + ण) क म - को भु (२ ए - ण) क म \right\}$$

$$२ - २ ठ \text{ पासून } + २ ठ^{२} इ \left\{ को भु (२ - २ ठ + ण) क म - को भु (२ - २ ठ - ण) क म \right\}$$

$$२ - २ ठ - ण \text{ पासून } + \frac{१५}{८} ठ इ^{२} \left\{ को भु (२ - २ ठ) क म - को भु (२ - २ ठ - २ ण) क म \right\}$$

तिसऱ्या पदवीची पदें ब च्या स्थानीं कम ठेवून येतील ती पदें घ्यावयाची आहेत. ह्याप्रमाणें सर्व पदें गोळा करून समीकरण लिहिले. स्थिरपदें जशीची तशीच घेणें.

$$व = अ \begin{cases} १ - \frac{३}{४} ल^{२} - \frac{१}{२} ठ^{२} - इ^{२} + इ \; को भु \; (ण क मं - उ) \\ \quad + इ^{२} को भु २ मं \qquad - \frac{१}{४} ल^{२} को भु २ वि \\ \quad + (ठ^{२} + \frac{१९}{६} ठ^{३} - \frac{३}{१६} ठ ल^{२} + \frac{१५}{४} ठ इ^{२}) \; को भु २ ति \\ \quad + (\frac{१५}{८} ठ इ + \frac{१८७}{३२} ठ^{२} इ) \; को भु च्यु - \frac{३}{२} ठ^{२} इ को भु सं \\ \quad + \frac{३३}{१६} ठ^{२} इ को भु (२ ति + मं) \\ \qquad\qquad + \frac{३}{१६} ठ ल^{२} को भु (२ वि - २ ति) \\ + \frac{७}{२} ठ^{२} इं को भु (२ ति - स) - \frac{१}{२} ठ^{२} इं को भु (२ ति + सं) \\ + \frac{२१}{८} ठ इ इं को भु (मं - सं) - \frac{२१}{८} ठ इ इं को भु (मं + सं) \\ + \frac{३५}{८} ठ इ इं को भु (च्यु - सं) - \frac{१५}{८} ठ इ इं को भु (च्यु + सं) \\ - \frac{१३}{२४} ल^{२} इ को भु (२ ए - ण) - \frac{३}{८} ल^{२} इ को भु (२ ए + ण) \\ - \frac{९}{८} इ^{३} को भु मं \qquad + \frac{९}{८} इ^{३} को भु ३ मं \\ - \frac{१५}{१६} ठ \frac{अ}{अ} को भु ति. \end{cases}$$

४९७. चंद्राचें क्षितिज लंबन हें चंद्राचें जें भूमध्यापासून अंतर त्या अंतरावर अवलंबून असतें. हें अंतर मध्यम मानानें

$$\frac{१}{व} = \frac{१}{अ} \left(१ - \frac{३}{४} ल^{२} - \frac{१}{२} ठ^{२} - इ^{२}\right)^{-१}$$

हें अंतर क्रांतिवृत्तावरील आहे. तें वास्तव पाहिजे आहे म्हणून त्यास $\sqrt{(१ + श^{२})}$ यानें गुणिले पाहिजे. येथें श म्हणजे शराची स्पर्शरेषा होय.

आतां

$$\text{क्षितिज लंबन} = \frac{\text{भूगोलाची त्रिज्या}}{\text{चंद्राचे अंतर}} = \frac{\text{त्र}}{\frac{१}{\text{व}}\sqrt{(१ + \text{श}^२)}}$$

$$= \text{त्र} \times \text{व}\,(१ + \text{श}^२)^{-\frac{१}{२}}$$

$$= \text{त्र व}\,(१ - \tfrac{१}{२}\,\text{श}^२)$$

$$= \text{त्र व}\,(१ - \tfrac{१}{२}\,\text{ल}^२\,\text{भु}^२\,\text{एकम})$$

$$= \text{त्र व}\,(१ - \tfrac{१}{४}\,\text{ल}^२ + \tfrac{१}{४}\,\text{ल}^२\,\text{को भु २ एकम})$$

ह्या समीकरणांतील ब ची किंमत ४९६ व्या लेखांत आहे ती समीकरणांत ठेविली. तेव्हां जी पदें येतात ती सर्व घेण्याचें कारण नाहीं. ज्या फलाचा गुणक १·० विकला आहे अशीच पदें घेणें इष्ट आहे. त्यापेक्षां सूक्ष्म असलेली पदें सोडली तरी चालतील. यास्तव खाली १० पदें घेतली आहेत.

$$\text{क्षि. लं.} = \text{त्र अ}\left\{\begin{array}{l}
१ - \frac{१}{४}\,\text{ल}^२ - \frac{१}{२}\,\text{ठ}^२ - \text{इ}^२ + \text{इ को भु मं} \\
\quad + \text{इ}^२\,\text{को भु २मं} + (\frac{१५}{८}\,\text{ठ इ} + \frac{१८७}{३२}\,\text{ठ}^२\text{इ})\,\text{को भु च्यु} \\
\quad + (\text{ठ}^२ + \frac{१९}{६}\,\text{ठ}^३ - \frac{३}{१६}\,\text{ठल}^२ + \frac{१५}{४}\,\text{ठइ}^२)\,\text{को भु २ ति} \\
\quad + \frac{३३}{१६}\,\text{ठ}^२\,\text{इ को भु (२ ति + मं)} \\
\qquad\qquad + \frac{७}{२}\,\text{ठ}^२\,\text{इं को भु (२ ति − सं)} \\
\quad + \frac{२१}{८}\,\text{ठ इ इं को भु (मं − सं)} \\
\qquad\qquad - \frac{२१}{८}\,\text{ठ इ इं को भु (मं + स)} \\
\quad + \frac{३५}{८}\,\text{ठ इ इं को भु (च्यु − सं)} \\
\qquad\qquad - \frac{१३}{२८}\,\text{ल}^२\,\text{इ को भु (२ वि − मं)}
\end{array}\right.$$

ह्या समीकरणात अ $(१ - \frac{१}{४}\,\text{ल}^२ - \frac{१}{२}\,\text{ठ}^२ - \text{इ}^२)$ ही स्थीर संख्या आहे. ह्या संख्येबरोबर ३४२१·८ विकला मध्यम क्षितिजलंबन आहे. ह्यावरून अ = ३४५६·३ विकला किंमत येते. ही किंमत समीकरणांत ठेविलीं तेव्हां —

$$\text{चं. क्षि. लं.} = \left\{\begin{array}{ll}
+ ३४२१\cdot८० & + १८९\cdot५६\,\text{को भु मं} \\
+ \quad १०\cdot४०\,\text{को भु २मं} & + \quad २६\cdot१४\,\text{को भु २ति} \\
+ \quad ३२\cdot८२\,\text{को भु च्यु} & + \quad २\cdot१९\,\text{को भु(२ति+मं)} \\
+ \quad १\cdot२२\,\text{को भु(च्यु−सं)} & \quad १\cdot१३\,\text{को भु(२ति−सं)}
\end{array}\right.$$

चंद्राची स्पष्ट गति

४९८. चंद्राची एका घटिकेतील स्पष्ट गति किति हें समीकरण सिद्ध करावयाचें आहे. सूक्ष्मांश गणिताच्या सिद्धांतानें हें समीकरण सहज सिद्ध होतें. तें खालीं लिहिल्याप्रमाणें. ४९१ व्या लेखातील ब चें समीकरण संक्षेपे घेऊन, त्यांतील पदें सामान्य स्वरूपानें लिहितो.

$$\text{ब} = \text{कम} + \text{फभु}\ (\text{नकम} - \text{उ}) + \text{धभु}\ (\text{तकम} - \text{ग})$$

ह्या समीकरणाचें सुक्ष्मांश गुणोत्तर किंवा शुन्यलब्धिगुण काढिला तर

$$\frac{\text{सूब}}{\text{सूक}} = \text{म} + \text{नम} \times \text{फ कोभु}\ (\text{न कम} - \text{उ})$$

$$+ \text{तम} \times \text{ध कोभु}\ (\text{तकम} - \text{ग})$$

$$\text{म्हणून सूब} = \text{म}\ (\text{सूक}) + \text{नमफ}\ (\text{सूक})\ \text{कोभु}\ (\text{नकम} - \text{उ})$$

$$+ \text{तमध}\ (\text{सूक})\ \text{कोभु}\ (\text{तकम} - \text{ग})$$

ह्या समीकरणांत सूक हा कालाचा सूक्ष्मांश आहे असें घेऊं. व हा कालाचा सूक्ष्मांश १ घटिका मानूं. म ही चंद्राची मध्यमगति आहे, ही एका घटिकेत १३.१७६३५८ कला इतकी आहे. सूब म्हणजे एका घटिकेतील चंद्राची स्पष्ट गति होय. यावरून रीती ठरते ती अशी—

> "प्रत्येक पदाच्या गुणकाला मध्यम गतीनें गुणून केंद्र गुणकानें गुणावे जो गुणाकार येईल तो त्या केंद्राच्या कोभुज्येला गुणक जोडावा. म्हणजे ते त्या केंद्राचें गतिफल होईल."

ह्याप्रमाणें प्रत्येक पदाला कृती करून चंद्राच्या स्पष्टगतीचें समीकरण तयार करावे. पद गुणकाला मध्यमगतीनें गुणावयाचें तेव्हां गुण्य गुणकयांपैकीं एक तरी वृत्त-परिमाणात्मक असला पाहिजे याकरिता १३.१७६३५८ कलाचें वृत्तपरिमाण तयार करूं.

३६० अंशाचें वृत्तपरिमाण २ × ३·१४१५९२६ इत्यादि म्हणजे २π तेव्हां १३·१७६३५८ कलांचे किती असे त्रैराशिकाने काढूं. तेव्हा —

$$\text{३६० अंशास} : \frac{\text{१३·१७६३५८}}{\text{६०}} \text{ अंश} :: \text{२}\pi : \text{उत्तर}$$

$$\frac{\text{१३·१७६३५८}}{\text{६०}} \times \frac{\text{२}\pi}{\text{३६०}} = \frac{\text{०·१३१७६३५८}}{\text{१०८}} \times \text{३·१४१५९२६}$$

$$= \text{·००१२२००} \times \text{३·१४१५९२६}$$

$$= \text{·००३८३३}$$

$$= \text{·००३३३३} + \text{·०००५}$$

$$= \tfrac{1}{3} \times (\text{·०१}) + \tfrac{1}{2} (\text{·००१})$$

ह्यावरून असें ठरतें कीं ब च्या समीकरणांतील पदगुणकाच्या विकलांना $\frac{1}{3}$(·०१) आणि $\frac{1}{2}$ (·००१) या दोन गुणकांनीं गुणून येणाऱ्या विकलांची बेरीज करून बेरजेला पदाच्या केंद्रगुणकानें गुणावें. म्हणजे ते गतिफलाचें पद होते. केंद्र गुणक ण ए आणि ठ हे असतात याच्या व्यक्त किंमती खालीं लिहिल्याप्रमाणें घ्याव्या :—

$$\text{ण} = 1 - \tfrac{1}{130}$$

$$\text{ए} = 1 + \tfrac{1}{130}$$

$$\text{ठ} = \tfrac{1}{13}$$

४९९. चंद्राच्या घटिगतीचें समीकरणाचीं कांहीं पदें तयार करितो. ४९१ व्या लेखातील समीकरणाचें पहिलें पद.

२२६२४·८४ भु मं

२२६२४·८४ × $\frac{1}{3}$(·०१) = ७५४१·६१ × (·०१) = ७५·४१६

२२६२४·८४ × $\frac{1}{2}$(·००१) = ११३१२·४२ × (·००१) = ११·३१२

बेरीज = ८६.७२८

८६·७२८ — (८६·७२८ ÷ १३०) = ८६·०६ विकला.

\+ ८६·०६ कोभु मं .. .. .. (१)

७६९·०५ भु २ मं

७६९·०५ × $\frac{1}{3}$ × (·०१) = २५६·३५ × (·०१) = २·५६३

७६९·०५ × $\frac{1}{2}$ × (·००१) = ३८४·५२ × (·००१) = ०·३८४

बेरीज = २·९४७

२·९४७ — (२·९४७ ÷ १३०) = २·९२ विकला.

+ ५·८४ कोभु २ मं .. .. (२)

२३६५·४२ भु (२—२ ढ)

२३६५·४२ × $\frac{१}{३}$ × (·०१) = ७८८·४७३ (·०१) = ७·८८५

२३६५·४२ × $\frac{१}{२}$ × (·००१) = ११८२·७१ (·००१) = १·१८३

बेरीज = ९·०६८

९·०६८ × (२ — २ ठ) = १८·१३६ — (१८·१३६ × $\frac{१}{१३}$) = १६·७५

+ १६·७५ कोभु २ ति .. .. (३)

४६०१·९३ भु च्यु

४६०१·९३ × $\frac{१}{३}$ × (·०१) = १५३३·९८ × (·०१) = १५·३४

४६०१·९३ × $\frac{१}{२}$ × (·००१) = २३००·९६ × (·००१) = २·३०

(बेरीज = १७·६४) × (१ — $\frac{२}{१३}$ + $\frac{१}{१२०}$) = १४·८५

+ १४·८५ को भु च्यु   + १·९७ को भु (२ ति + मं)

— ३·२२ को भु २ वि   + १·०० को भु (२ ति — सं)

चंद्रघटिगति {
७९०·५८ + ८६·०६ को भु मं + ५·८४ को भु २ मं
+ १६·७५ को भु २ ति + १४·८५ को भु च्यु
— ३·२२ को भु २ वि
+ १·९७ को भु (२ ति + मं).
+ १·०० को भु (२ ति — सं)

५००. चंद्राच्या घटिगति प्रमाणेंच त्यांच्या शरघटिगतीच्या समीकरणाची साधनिका आहे. तेव्हां त्याच प्रमाणेंच शरघटिगतीच्या समीकरणातील पदें शोधूं.

१८५४०·२० भु वि

१८५४०·२० × $\frac{१}{३}$ (·०१) = ६१८०·०७ (·०१) = ६१·८०१

१८५४०·२० × $\frac{१}{२}$ (·००१) = ९२७०·१० (·००१) = ९·२७०

(बेरीज = ७१·०७१) (१ + $\frac{१}{१३०}$) = ७१·६२ ··· (१)

मध्यमचंद्रानें चंद्राचा शर साधण्याचें समीकरण केलें म्हणजे शराची फार पदें उत्पन्न होतात त्यापैकीं १०१४·६० भु (वि+मं) हें पद येतें. आणि ह्या पदापासून शरघटिगतीचें पद उत्पन्न होतें तें खालीं दिले आहे.

$$\text{१०१४·६०} \times \frac{\text{१}}{\text{३}} \; (\text{·०१}) = \text{३३८·२}(\text{·०१}) = \text{३·३८२}$$

$$\text{१०१४·६०} \times \frac{\text{१}}{\text{२}} \; (\text{·००१}) = \text{५०७·३} \; (\text{·००१}) = \text{०·५०७}$$

$$(\text{बेरीज} = \text{३·८८९}) \times \text{२} = \text{७·७८} \cdots (\text{२})$$

बाकीचीं पदें वरच्याप्रमाणेंच घेतली आहेत. ह्या प्रमाणें शरघटिगतीची पदें तयार करून खालीं लिहिली आहेत.

$$\text{शरघटि गति} = \begin{cases} \text{७१·६२ को भु वि} + \text{७·७८ को भु (वि} + \text{मं)} \\ \text{२·०४ को भु (२ ति} - \text{वि)} + \text{१·३८ को भु (च्यु} + \text{वि)} \\ \text{०·८४ को भु (२ ति} + \text{वि)} + \text{०·६६ को भु (२वि} + \text{मं)} \end{cases}$$

प्रकरण सतरावें

पंचांग प्रवर्तनीय सिद्धांत

५०१. पंचांगामध्यें वार, तिथि, नक्षत्र, करण, योग ह्या पांच अंगांचा विचार केलेला असतो. वार किंवा वासर याचा विचार सूर्येंदुस्थानमान ह्या ग्रंथांत केला आहे, आणि करण हे तिथींचे अंग आहे. विवक्षित तिथींच्या आरंभक्षणापासून अंत्यक्षणापर्यंत जो काल त्याचे दोन समान भाग केले असतां त्या प्रत्येक काल विभागास करण म्हणतात. प्रत्येक महिन्याच्या तिथि ३० अर्थात करणें ६० होतात. त्यांत ४ करणें स्थीर आहेत तीं अशी शकुनी चतुष्पाद आणि नाग ही चांद्रमासाच्या अंती असतात. कृष्ण १४ उत्तरार्थी शकुनी करण असतें. आमावास्येला चतुष्पाद आणि नाग ही करणें असतात. आणि प्रत्येक चांद्रमासाच्या आरंभी म्हणजे शुद्ध प्रतिपदेच्या आरंभी कींस्तुघ्न नामक करण असतें. बाकी राहिलेल्या ५६ करणांची, ७ करणांचें १ चक्र अशी आठ चक्रें होतात. त्या ७ चक्रांचा क्रम खालीं लिहिल्याप्रमाणें असतो:—

१ बव, २ बालव, ३ कौलव, ४ तैतील, ५ गर, ६ वणिज आणि ७ भद्रा.

५०२. पंचांगाची राहिली अंगे तीन. तिथि, नक्षत्र आणि योग यांचा विचार करावयाचा. त्यापैकीं प्रथम नक्षत्र नंतर तिथि आणि मग योग असाच त्यांचा क्रम आहे. सूर्य सिद्धांतात प्रथम नक्षत्राचे मान सांगून नंतर तिथीचे मान सांगितले आहे.

भभोगोऽष्टशतीलित्पा: खाश्वि शैला स्तथा तिथे ॥

(सूर्य सि. अ-२—६४)

आणि प्रस्तुत ग्रंथातील प्रतिपादनाच्या सोईनें पाहिले असता हाच क्रम युक्त ठरतो. नक्षत्र, तिथि आणि योग यांचा मी तीन भागांत विचार केला आहे त्या भागास मी अनुक्रमें **'नक्षत्र रत्नमाला'**, **'तिथिमुक्ताहार'** आणि **'योगपद्मावली'** अशीं नांवें दिलीं आहेत. या क्रमानेंच त्यांचा विचार करीत आहे.

नक्षत्र रत्नमाला

५०३. पंचांगांपैकीं जें एक अंग त्यास उद्देशून वरचें नांव दिलें आहे. क्रांति-वृत्ताचे म्हणजे ३६० अंशाचे प्रत्येक भाग ८०० कलांचा असे समान भाग केले आहेत. तें भाग २७ होतात. हे भाग अचल असे स्वीकारले आहेत, आणि ते फार प्राचीन कालीं स्वीकारले आहेत. हे अनेक प्रमाणांनी सिद्ध होते. ह्या अचल भागांपकीं प्रथम भाग अश्विनि नक्षत्राचा. त्याचा आरंभ बिंदु **'पौष्णांत'** होय. अर्थात तोच बिंदु **रेवती** नक्षत्र भागाचा अंत्य बिंदु होय. ह्या प्रत्येक भागाच्या आरंभ बिंदूशी, चंद्र प्रत्यक्ष आला कोणत्या क्षणीं आणि अंत्य बिंदूशी गेला कोणत्या क्षणीं हें पंचांगात

दाखवावें लागते. कोणत्याहि नक्षत्राचा भाग हा ८०० कलांचाच असतो हे सिद्धांत वाक्यानेंच सिद्ध आहे. तेव्हां स्पष्ट गतीनें चंद्रास हा प्रत्येक भाग आक्रमण करण्यास किती काळ लागेल हे आपणाला सिद्ध करावयाचे आहे.

५०४. मध्यमचंद्र ज्याक्षणीं शून्य होता तो क्षण म्हणजेच **पौष्णांतीं** मध्यम चंद्र असेल तो क्षण काल मापनाचा आरंभ क्षण म्हणूं. आणि सामान्यत्वें ब अंशात्मक स्पष्टचंद्र आहे तर काल किती गत झाला हें समीकरण आपण सिद्ध करूं. मागील सिद्धांतांच्या आधारें हें समीकरण सहज सिद्ध होतें. ४८९ व्या लेखांच्या आधारें हें सिद्ध होतें. येथे हे लक्षांत असावे कीं, ४८९ व्या लेखांतील मं मंदकेंद्र स्पष्टचंद्रावरून साधिलें आहे. तें समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणें आहे असें माना :—

$$\begin{aligned}\text{कम} &= \text{ब} - \text{२इ भु (ण ब — उ)} + \tfrac{३}{४}\,\text{इ}^{२}\,\text{भु२ (ण ब — उ)} \\ &+ \tfrac{१}{४}\,\text{ल}^{२}\,\text{भु२ (एव — रा)} - \tfrac{११}{८}\,\text{ठ}^{२}\,\text{भु}\left\{ \text{(२ — २ठ) ब — २ घ} \right\} \\ &+ \tfrac{१५}{४}\,\text{ठ इ भु}\left\{ \text{(२ — २ठ — ण) ब — २ घ + उ} \right\} + \text{इत्यादि.} \qquad (१)\end{aligned}$$

ह्या समीकरणांत कम हें पद अव्यक्त आहे. आणि ब ह्या स्पष्टचंद्रावर कम अवलंबून आहे. ब हा स्पष्टचंद्र ज्या क्षणींचा असेल त्या क्षणींचीं केंद्रें असली पाहिजेत किंवा कसें, वगैरे विचार मागाहून करूं. प्रथम हें समीकरण आहे, ह्याच्या दोन्ही पेटयांना म चंद्राची एका घटिकेतील गति, हिने भागिलें तरी समीकरणाचें दोन्हीं पक्षांचें (पेटयांचें) समानत्व भंग पावत नाहीं म्हणून

$$\text{क} = \frac{\text{ब}}{\text{म}} \mp \frac{\text{२इ}}{\text{म}}\,\text{भु(ण ब — उ)} \pm \tfrac{३}{४}\,\frac{\text{इ}^{२}}{\text{म}}\,\text{भु२(ण ब — उ)} \qquad (२)$$

ह्या समीकरणांत क हा काल आहे. म ही एका घटिकेतील चंद्राची मध्यम गति आहे, आणि कम हा मध्यमचंद्र म्हणून $\frac{\text{कम}}{\text{म}}$ ह्या बरोबर क ह्या कालाच्या घटिका आहेत. ब हा कोनच आहे त्याला म ह्या एका घटिकेतील कोनाने भागिलें तेव्हां $\frac{\text{ब}}{\text{म}}$ = कालच आहे व ह्याही घटिकाच आहेत. ह्या प्रमाणेच $\frac{\text{२इ}}{\text{म}}$ $\tfrac{३}{४}\frac{\text{इ}^{२}}{\text{म}}$ हे सर्व गुणक कालात्मक असून ह्या सर्व घटिकांच्या संख्या आहेत. क हा काल आहे आणि तो मध्यमचंद्र ० ज्या क्षणीं होता त्या क्षणापासून मोजलेला आहे. त्यांमध्यें $\frac{\text{ब}}{\text{म}}$ हा काल आणि प्रत्येक केंद्रापासून आलेला काल धनर्ण केला म्हणजे ब भोगात्मक स्पष्ट व्हावयास लागणारा काल येईल.

५०५. वरच्या लेखांतील समीकरणाच्या केंद्रामध्यें ब ही स्पष्टचंद्राच्या भोगाची संख्या आहे. तेव्हां केंद्रांची साधनिका कशी साधावी, याबद्दल विचार करूं.

णब—उ हें एक केंद्र आहे या बरोबरच खालचें केंद्र आहे

$$\text{णब} \times \frac{\text{म}}{\text{म}} - \text{उ} = \text{ण} \frac{\text{ब}}{\text{म}} \text{म} - \text{उ}$$

पण $\frac{\text{ब}}{\text{म}}$ हा दिलेला म्हणजे ब भोगापासून उत्पन्न झालेला काल आहे. अर्थात मध्यम काल आहे, त्यासाठी त्याचे जागीं क हें मध्यम काल दर्शविणारें अक्षर लिहिलें तर

णब — उ = णकम — उ = मं हें मंदकेंद्र होय आणि तें $\frac{\text{ब}}{\text{म}}$ ह्या मध्यम कालांतीचें होय. ब ही चंद्राच्या स्पष्टभोगाची हवी ती संख्या आपण मानिली आहे, तिच्या स्थानीं $\frac{2\pi}{27}$ न हें वृत्तपरिमाण ठेवूं. याचा अर्थ असा आहे,

$$\frac{\text{३६० अंश}}{\text{२७}} \times \text{न} = (\text{१३ अंश २० कला}) \times \text{न} = \text{८००न कला.}$$ तेव्हां

$$\left(\text{ण} \frac{2\pi}{27} \text{न} - \text{उ}\right) = \text{ण} \frac{2\pi\,\text{न}}{27\text{म}} \times \text{म} - \text{उ}$$

$$= \text{ण} \frac{\text{१३ अंश २० कला}}{\text{१३.१७६३६अ}} \text{नम} - \text{उ}$$

$$= \text{नणकम} - \text{उ}$$

ह्यातील न ही संख्या ०, १, २, ३ इत्यादि संख्या दाखविणारी आहे $\frac{2\pi}{27\text{म}}$ = ६०·७१४८ मध्यमकालाच्या घटिका आहेत. ह्याला म = १३.१७६ कला घटिगतीनें गुणिलें म्हणजे १३ अं २० कला एका नक्षत्राची मध्यमचंद्राची गति होते. यावरून—

$$\frac{2\pi}{27} \frac{\text{न}}{\text{म}} = \text{६०·७१४८घ} \times \text{न} = \text{न नक्षत्रांचा मध्यमकाल}$$

णम = चंद्रमध्यमगति—केंद्र सं. मध्यमगति. दोहोंचा गुणाकार केला तर

$$\text{ण} \frac{2\pi}{27} \frac{\text{न}}{\text{म}} \times \text{म} = (\text{चंद्रमध्यमगति — कें. सं. म. गति}) \times \text{न नक्षत्रांचा म. काल.}$$

ह्यावरून स्पष्ट कळतें कीं ण $\frac{2\pi}{27}$ न — उ हें, ज्या क्षणीं मध्यममानानें नक्षत्र पूर्ण होते त्या क्षणीचें चंद्राचे मंदकेंद्र आहे. हें वरच्या संक्षिप्त लेखन पद्धतीनें

मं हचा अक्षर चिन्हानें दाखवितो. आणि हयाच पद्धतीनें ति च्यु वि सं ही हीं अक्षरें योजिली आहेत. हयाप्रमाणें योजना करून नक्षत्रांचे स्पष्टकाल वर्तविण्याचें समीकरण तयार होतें. तें असें कीं, ४८९ व्या लेखांतील समीकरणाच्या प्रत्येक केंद्राच्या गुणकास म हचा चंद्राच्या मध्यमघटि गतीनें भागावें, भागाकार घटिकात्मक होईल तो ज्या त्या केंद्रास गुणक द्यावा आणि चिन्ह कायम ठेवून समीकरण लिहावे. म्हणजे खालीं लिहिल्याप्रमाणें समीकरण तयार होईल :—

नक्षत्र स्पष्ट काल =

आद्यकाल + ३६४२·९३६ पळें × न
— १७१७·१० भुमं + ३६·१५ भु२मं
— ०·८६ भु३मं + ३१·१९ भु२वि
— १४६·१० भु२ति + ११·०१ भु ति
+ १०·९३ भु (२ति + मं) + ०·५४ भु४ति
— ३५६·४४ भुच्यु + ०·५४ भु२च्यु
+ ५१·५९ भुसं + ०·७४ भु२सं
— १४·१३ भु(२ति — २मं) + ०·३८ भु(ति — मं)
— १३·८९ भु(च्यु — सं) + ७·६३ भु(२वि — मं)
— ५·४० भु(मं — सं) + ४·७१ भु(मं + सं)
— ९·४२ भु(२ति — सं) + ४·२३ भु(च्यु + सं)
— ४·४९ भु(२ति — २वि) + १·१२ भु(४ति — मं)
— १·७४ भु (२वि + मं) + ०·९५ भु(२ति + सं)
— १·१६ भु (२ति — २मं + सं) + ०·४२ भु(मं + २सं)
— ०·६८ भु (२ति — २वि + मं)
+ ०·५६ भु (२ति + मं — सं)
— ०·५७ भु (२ति — २सं) + ०·३० भु(२वि + सं)
— ०·७८ भु (२ति — २मं — सं)
+ ०·३९ भु (२ति — २वि — मं)
— ०·५४ भु (२ति + २मं) + ०·३० भु (२वि — सं)
— ०·५० भु (२ति — २वि + सं)
— ०·५५ भु (२ति — २वि — सं)
— ०·४७ भु (मं — २सं) — ०·२४ भु (ति + मं)

५०६. वरच्या समीकरणांत न ही संख्या नक्षत्र क्रम दाखविणारी आहे. जेव्हां न ही संख्या ० असेल तेव्हां नक्षत्र एकही भुक्त झालेले नाहीं अर्थात रेवतीचा अंत्य-क्षण (मध्यममानाने) आहे. परंतु ह्या क्षणाची जाणीव झाली पाहिजे. काल हा अनंत आहे, त्यांतील कोणत्या क्षणाशीं रेवती अंत्यक्षण जोडावा हें समजलें पाहिजे. यासाठी समीकरणांत आद्यकाल हें पद लिहिले आहे. हा क्षण ज्या क्षणीं मध्यम चंद्र शून्य होता तो क्षण होय. तो क्षण अहर्गण घटिपळें यांनीं दाखविला जातो. ह्या अहर्गण घटिपळांना आद्यकाल म्हटले आहे. न ही संख्या १, २, ३ इत्यादि घेऊन जो काल उत्पन्न होईल तो आद्य कालांत मिळवून जो काल होईल त्या त्या मध्यम कालची मंदकेंद्रादि केंद्रें तयार करून कालात्मक फलें जीं येतील ती मध्यमकालात धनर्ण केली म्हणजे नक्षत्राचे स्पष्टकाल तयार होतील. अशा प्रकारें एखाद्या नक्षत्राचाही अंत्यक्षण आणिता येईल. परंतु सर्व वर्षाचे नक्षत्र काल काढण्यास हें समीकरण उपयोगी आहे.

तिथि मुक्ताहार

५०७. नक्षत्रांचे स्पष्टकाल सिद्ध करण्याचें समीकरण ज्याप्रमाणें सिद्ध केलें, त्याच पद्धतीनें तिथींचे स्पष्टकाल सिद्ध करण्याचें समीकरण सिद्ध करितां येते. विवक्षित नक्षत्राचा स्पष्ट काल ठरविणारें समीकरण ४८९ व्या लेखांतील समीकरणाच्या आधारें सिद्ध केलें. त्यांत विवक्षित स्पष्टचंद्रास किती काल लागेल हें समीकरण सिद्ध केलें, तसेंच समीकरण पद्धतीनें चंद्राचे स्पष्टभोग आणि सूर्याचे स्पष्टभोग (अंश, कला, विकला) ह्यामध्यें इच्छिलेल्या अंश, कला, विकला इतके अंतर व्हावयाला काल किती लागेल हें साधण्याचें समीकरण आपणाला सिद्ध केलें पाहिजे. त्यावरून आपणाला तिथींचें समीकरण सिद्ध करिता येईल.

५०८. सूर्याचे स्पष्टभोग सिद्ध करण्याचें समीकरण ३२० व्या लेखांत दिले आहे. तें खाली लिहिल्याप्रमाणें आहे:—

$$\text{बं} + \text{कमठ} + ६९२०\cdot२२\,\text{भु}\ (\text{कमठ} - \text{द्र}) + ७२\cdot५५\,\text{भु२}\ (\text{कमठ} - \text{द्र})$$

किंवा

$$\text{बं} = \text{कमठ} + \text{घ} + ६९२०\cdot२२\,\text{भुडकम} + ७२\cdot५५\,\text{भु२डकम}.$$

स्पष्ट चंद्राचें समीकरण आपण सिद्ध केलें आहे. ४९१ लेख पहा. त्या ब च्या समीकरणांत हें बं चें समीकरण वजा केलें, तेव्हां—

(केंद्रें मं सं. इत्यादि संक्षेपे न लिहितां विस्तृत लिहिली)

$$\text{ब} - \text{बं} = \text{कम} - \text{कमठ} - \text{घ} + २२६२४\cdot८४\,\text{भु}\,(\text{णकम} - \text{उ})$$

$$+ ७६९\cdot०५\,\text{भु}२\,(\text{णकम} - \text{उ})$$

$$+ ३६\cdot८६\,\text{भु}३\,(\text{णकम} - \text{उ})$$

$$+ २३६५\cdot४२\,\text{भु}\left\{(२ - २\text{ठ})\,\text{कम} - २\text{घ}\right\}$$

$$- १३१\cdot८६\,\text{भु}\left\{(१ - \text{ठ})\,\text{कम} - \text{घ}\right\}$$

$$+ ४६०१\cdot९३\,\text{भु}\left\{(२ - २\text{ठ} - \text{ण})\,\text{कम} - २\text{घ} + \text{उ}\right\}$$

$$- ७६००\cdot०१\,\text{भु}\,(\text{ठकम} + \text{घ} - \text{द्र})$$

$$- ८२\cdot२७\,\text{भु}२\,(\text{ठकम} + \text{घ} - \text{द्र})\ \text{इत्यादि}$$

(बाकीची सर्व पदें ४९१ व्या लेखाप्रमाणें चिन्हासह).

ह्या समीकरणामध्यें कम हें व्यक्त पद असून ब—बं हें अव्यक्त पद आहे, ह्या समीकरणापासून ज्यामध्यें, कम हें अव्यक्त पद असून (ब—बं) ह्या व्यक्त पदानें कम ची किंमत सिद्ध होईल असें समीकरण सिद्ध करावयाचें आहे. याकरितां कम — कमठ = (१ — ठ) कम हें पद डावीकडें घेऊन (ब — बं) हें पद उजवीकडें घेतलें. त्यामुळें राहिलेल्या सर्व पदांचीं चिन्हें बदलली म्हणजे धन तें ऋण झालें आणि ऋण तें धन झालें. आणि कम ला जो (१ — ठ) हा गुणक होता त्यानें सर्व समीकरण भागिलें. तेव्हां—

$$\text{कम} = + \frac{\text{घ}}{१ - \text{ठ}} + \frac{१}{१ - \text{ठ}}\,(\text{ब} - \text{बं})$$

$$- २२६२४\cdot८४\,\frac{१}{१ - \text{ठ}}\,\text{भु}\,(\text{णकम} - \text{उ})$$

$$- ७६९\cdot०५\,\frac{१}{१ - \text{ठ}}\,\text{भु}२\,(\text{णकम} - \text{उ}) - \text{इत्यादि.}$$

५०९. वरच्या समीकरणातील $\left\{ + \frac{घ}{१ - ठ} + \frac{१}{१ - ठ} (ब - बं) \right\}$ ह्या पदाच्या स्थानीं लेखन सौकर्याकरिता थ हें अक्षर योजिले. तेव्हां—

$$\begin{aligned} कम = थ &- २२६२४\cdot ८४ \ \frac{१}{१-ठ} \ भु \ (णकम - उ) \\ &- ७६९\cdot ०५ \ \frac{१}{१-ठ} \ भु२ \ (णकम - उ) \\ &- २३६५\cdot ४२ \ \frac{१}{१-ठ} \ भु \left\{ (२ - २ठ) \ कम - २ \ घ \right\} \\ &- ४६०१\cdot ९३ \ \frac{१}{१-ठ} \ भु \left\{ (२ - २ठ - ण) \ कम - २ \ घ + उ \right\} \\ &+ ७६००\cdot ०१ \ \frac{१}{१-ठ} \ भु \ (ठकम + घ - द्र) \\ &+ \ \ ८२\cdot २७ \ \frac{१}{१-ठ} \ भु२ \ (ठकम + घ - द्र) \end{aligned}$$

इत्यादि इत्यादि इत्यादि

ह्या समीकरणांत अव्यक्त पद कम हें डावीकडें साधिले आहे परंतु उजवीकडें केंद्रांत कम हें पद तसेच आहे तें तेथून लुप्त केलें पाहिजे आणि त्या जागीं $\frac{१}{१ - ठ} (ब - बं + घ)$ हें पद आणिलें पाहिजे. म्हणजे ह्या समीकरणांतील केंद्राचें परिवर्तन केलें पाहिजे. हें कार्य २६६ व्या लेखांत दिलेल्या सिद्धांतानें होते. पण वरच्या समीकरणांतील पदांचे गुणक विकलात्मक आहेत त्यांनीं परिवर्तन कार्य करिता यावयाचे नाहीं. यास्तव ते गुणक वृत्तपरिमाणाचे आणिले पाहिजेत. परिवर्तन कार्य तिसऱ्या पदवीपर्यंत होते. म्हणून वरच्या समीकरणाचें स्वरूप तिसऱ्या पदवीपर्यंत वृत्तपरिमाण गुणकांचें केलें पाहिजे.

५१०. लेखांक ४६९ मध्यें परिवर्तन पदसंघानें युक्त असें ब चें समीकरण दिले आहे. तें असें—

ब = कम + (कम चा पदसंघ) + (परिवर्तन पदसंघ) ....(अ) ह्यापैकीं कम चा पदसंघ लेखांक ४६५ मध्यें आहे. आणि परिवर्तन पदसंघ ४७० ह्या लेखांत आहे. ह्या दोन्ही पदसंघांतील पहिल्या, दुसऱ्या व तिसऱ्या पदवीचीं पदें मात्र घ्यावयाची ती घेऊन समीकरण खालीं लिहिले आहे. आणि त्यांत बं =असलेलीं पदें लेखांक ५०८ प्रमाणें घेऊन तें समीकरण ब च्या समीकरणात वजा केले आहे. योगांचें स्पष्टकाल सिद्ध करण्यासाठी ह्या समीकरणांचा उपयोग करावयाचा आहे.

$$बं = कमठ + घ + २ \ इं \ भुडकम + \tfrac{५}{४} इं^{२} भु२ \ डकम \cdots (ब)$$

(अ) मध्ये (ब) समीकरण वजा केलें. तेव्हां—

ब—बं = {
कम — कमठ — घ + २ इ भु (णकम — उ)
+ $\frac{५}{४}$ इ² भु२ (णकम—उ) — $\frac{१}{४}$ ल² भु२ (एकम—रा)
+ $\frac{११}{८}$ ठ² भु { (२—२ठ) कम— २घ }
—(२ इं + ३ठइं) भुडकम
+ $\frac{१५}{४}$ ठ इ भु (२—२ठ-ण) कम — $\frac{१}{४}$ इ³ भु णकम
+ $\frac{१३}{३२}$ इ³ भु३ णकम + $\frac{२६३}{१६}$ ठ² इ भु (२— २ठ — ण) कम
+ ($\frac{५९}{३२}$ ठ³ + $\frac{८५}{१६}$ ठ इ² — $\frac{३}{१६}$ ठल²) भु (२—२ठ) कम
+ $\frac{१७}{८}$ ठ² इ भु (२ — २ठ + ण) कम — $\frac{५}{४}$ इं² — $\frac{९}{४}$ ठ ई² भु२ डकम
+ $\frac{७७}{१६}$ ठ² इं भु (२—२ठ—ड) कम
— $\frac{११}{१६}$ ठ² इं भु (२—२ठ+ड) कम.
+ $\frac{३५}{४}$ ठइइं भु (२—२ठ—ण—ड) कम
+ $\frac{४५}{१६}$ ठइ² भु (२-२ठ-२ण) कम.
+ $\frac{९}{१६}$ ठ ल² भु (२—२ठ—२ए) कम
— $\frac{१५}{४}$ ठइइं भु (२—२ठ—ण+ड) कम.
+ $\frac{२१}{४}$ ठइइं भु (ण—ड) कम — $\frac{२१}{४}$ ठइइं भु (ण+ड) कम
— $\frac{४}{३}$ ल² इ भु (२ए—ण) कम — $\frac{१}{२}$ ल² इ भु (२ए+ण) कम

ह्या समीकरणांतील पदांना स्थान भेद करून १ — ठ नें भागिलें तेव्हां—

$$\frac{१}{१—ठ}\text{(ब—बं+घ) = कम} + \frac{\text{२इ}}{१—ठ}\text{ भुणकम} + \frac{५}{४}\,\frac{\text{इ}^{२}}{१—ठ}\text{ भु२णकम}$$

किंवा

$$\text{थ = कम} + \frac{\text{२इ}}{१—ठ}\text{ भुणकम} + \frac{५}{४} \times \frac{\text{इ}^{२}}{१—ठ}\text{ भु२णकम इत्यादि.}$$

अशा तऱ्हेनें जें समीकरण होईल ह्यामधील कम च्या जागीं थ आणि थ च्या जागीं कम अशा रीतीचें केंद्रपरिवर्तन करिता येतें. आणि ते २६६ ह्या लेखांमधील समीकरणानें करिता येतें. केंद्रपरिवर्तन बऱ्याच ठिकाणीं केलें आहे त्याअर्थी त्याबद्दल विशेष सांगण्याचें कारण नाहीं. त्या समीकरणातील १९ पदांपैकीं एक एक घेऊन त्यापासून उत्पन्न होणारी पदें शोधूं.

५११. परिवर्तन समीकरणातील प्रत्येक पदाचें परिवर्तन.

[१] —पभुनय. ह्या पदांत $प = \frac{२इ}{१-ठ}$; $न = ण$; $य = थ$.

$$- \frac{२इ}{१-ठ} भुणथ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (१)$$

[२] —दभुमय. ह्या पदांत द च्या किंमती पांच आहेत आणि म च्याहि पांच किंमती आहेत. त्याप्रमाणें

$$-\frac{५}{४}\frac{इ^{२}}{१-ठ} भु२णथ + \frac{१}{४}\frac{ल^{२}}{१-ठ} भु२एथ - \frac{११}{८}\frac{ठ^{२}}{१-ठ} भु(२-२ठ) थ$$

$$+ (२\dot{इ} + ३ठ\dot{इ}) \frac{१}{१-ठ} भुडथ - \frac{१५}{४}\frac{ठइ}{१-ठ} भु (२-२ठ-ण) थ$$

$$\dots\dots\dots \quad (२)$$

[३] $+ \frac{१}{२}प^{२} न भु२ नय$. $\frac{१}{२}\frac{४इ^{२}}{(१-ठ)^{२}} (१ - \frac{३}{४}ठ^{२}) भु२णथ$

$$+ \left\{ \frac{२इ^{२}}{(१-ठ)^{२}} - \frac{३ठ^{२}इ^{२}}{२(१-ठ)^{२}} \right\} भु२ णथ \dots\dots \quad (३)$$

[४] —तभुकय. वरच्या लेखांतील ब—बं च्या समीकरणांतील तिसऱ्या पदवीच्या प्रत्येक पदाला $-\frac{१}{१-ठ}$ नें गुणून आणि कम च्या जागीं थ लिहून होणारा पदसमूह. ... (४)

[५] $+\frac{१}{८}प^{३}न^{२} भु नय$. $+ \frac{१}{८}\frac{(-८इ^{३})}{(१-ठ)^{३}} ण^{२} भु णथ$

$$- \frac{इ^{३}}{(१-ठ)^{३}} भु णथ \dots\dots \quad (५)$$

[६] $- \frac{३}{८}प^{३}न^{२} भु३ नय$. $- \frac{३}{८}\frac{(-८इ^{३})}{(१-ठ)^{३}} ण^{२} भु णय$

$$+ \frac{३इ^{३}}{(१-ठ)^{३}} भु३ णथ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (६)$$

[७] $+\frac{१}{२}\,\text{पद}\,(\text{म}+\text{न})\;\text{भु}\,(\text{म}+\text{न})\text{य}.$ ह्यांत $\text{प} = -\frac{२\,\text{इ}}{१-\text{ठ}}\,;\;\text{न} = \text{ण}$

$$\text{द} = -\frac{५}{४}\,\frac{\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})}\,;\;\text{म} = २\,\text{ण}$$

$$+\frac{१५}{४}\,\frac{\text{इ}^{३}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;३\,\text{ण}\,\text{थ}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{द} = -\frac{१५}{४}\,\frac{\text{ठ}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})}\,;\;\text{म} = २-२\,\text{ठ}-\text{ण}$$

$$+\frac{१५}{२}\,\frac{\text{ठ}\,\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\,(२-२\text{ठ})\,\text{थ}\,;$$

$$-\frac{१५}{२}\,\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\,(२-२\,\text{ठ})\,\text{थ}$$

$$\text{द} = -\frac{११}{८}\,\frac{\text{ठ}^{२}}{१-\text{ठ}}\,;\;\text{म} = (२-२\text{ठ})$$

$$+\frac{३३}{८}\,\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{थ}$$

$$-\frac{११}{४}\,\frac{\text{ठ}^{३}\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\,(२-२\text{ठ}+\text{ण})\,\text{थ}$$

$$\text{द} = +\frac{१}{४}\,\frac{\text{ल}^{२}}{१-\text{ठ}}\,;\;\text{म} = २\,\text{ए}$$

$$-\frac{३}{४}\,\frac{\text{ल}^{२}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\,(२\text{ए}+\text{ण})$$

$$\text{द} = +(२\,\text{इ}'+३\text{ठ}\text{इ}')\,\frac{१}{१-\text{ठ}}\,;\;\text{म} = \text{ठ}\qquad(\text{ड})$$

$$-(२\text{इ}\,\text{इ}'+३\,\text{ठ}\text{इ}\text{इ}')\,\frac{१+\text{ठ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(\text{ण}+\text{ड})\,\text{थ}\;\ldots\;(७)$$

[८] $-\frac{१}{२}\,\text{प}\,\text{द}\,(\text{म}-\text{न})\;\text{भु}\,(\text{म}-\text{न})\,\text{य}.$

$$-\frac{५}{४}\,\frac{\text{इ}^{३}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भुण}\,\text{थ}$$

$$-\left(\frac{११}{८}\,\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}-\frac{११}{४}\,\frac{\text{ठ}^{३}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\right)\text{भु}\;(२-२\text{ठ}-\text{ण})\,\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{१५}}{\text{२}}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण})\,\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{३}}{\text{४}}\,\frac{\text{ल}^{\text{३}}\,\text{इ}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\,(\text{२ए}-\text{ण})\,\text{थ}$$

$$+(\text{२ इइं} + \text{३ ठ इइं})\,\frac{\text{१}}{(\text{१}-\text{ठ})}\,\text{भु}\,(\text{ण}-\text{ड})\,\text{थ} \quad \ldots(\text{८})$$

[९] $-\tfrac{\text{१}}{\text{६}}\,\text{प}^{\text{४}}\,\text{न}^{\text{३}}\,\text{भु२ नय}$. याचें परिवर्तन $-\tfrac{\text{६}}{\text{३}}\,\frac{\text{इ}^{\text{४}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{४}}}\,\text{भु२णथ}$ ...(९)

[१०] $+\tfrac{\text{१}}{\text{३}}\,\text{प}^{\text{४}}\,\text{न}^{\text{३}}\,\text{भु४नय}$. याचें परिवर्तन $+\tfrac{\text{१६}}{\text{३}}\,\frac{\text{इ}^{\text{४}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{४}}}\,\text{भु४णथ}$ ...(१०)

[११] $+\tfrac{\text{१}}{\text{४}}\,\text{प}^{\text{२}}\,\text{द}\,\text{म}^{\text{२}}\,\text{भुमय}$. याचें परिवर्तन

$$-\frac{\text{५ इ}^{\text{४}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु२ णथ} - \tfrac{\text{११}}{\text{२}}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ})\,\text{थ}$$

$$+\frac{\text{ल}^{\text{३}}\,\text{इ}^{\text{२}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु२एथ} - \tfrac{\text{१५}}{\text{४}}\,\frac{\text{ठ इ}^{\text{३}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण})\,\text{थ} \quad \ldots(\text{११})$$

[१२] $-\tfrac{\text{१}}{\text{८}}\,\text{प}^{\text{२}}\,\text{द}\,(\text{म}+\text{२न})^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{म}+\text{२न})\,\text{य}$

$$+\text{१०}\,\frac{\text{इ}^{\text{४}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु४ णथ} + \text{११}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}+\text{२ण})\,\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{१३५}}{\text{८}}\,\frac{\text{ठ इ}^{\text{३}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ण})\,\text{थ}$$

$$-\text{२}\,\frac{\text{ल}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु}\,(\text{२ए}+\text{२ण})\,\text{थ}$$

$$-\left(\frac{\text{४इ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}} + \frac{\text{६ ठइ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\right)\text{भु}\,(\text{२ण}+\text{ड})\,\text{थ} \quad \ldots(\text{१२})$$

[१३] $-\tfrac{\text{१}}{\text{८}}\,\text{प}^{\text{२}}\,\text{द}\,(\text{म}-\text{२न})^{\text{२}}\,\text{भु}\,(\text{म}-\text{२न})\,\text{य}$.

$$+\tfrac{\text{१५}}{\text{८}}\,\frac{\text{ठ द}^{\text{३}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\,\text{भु}\,(\text{२}-\text{२ठ}-\text{३ण})\,\text{थ}$$

$$+\left(\frac{\text{४इ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}+\frac{\text{६ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{३}}}\right)\text{भु}\;(\text{२ण}-\text{ड})\;\text{थ} \qquad \ldots(\text{१३})$$

$$[\text{१४}]+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{प त}\;(\text{क}+\text{न})\;\text{भु}\;(\text{क}+\text{न})\;\text{य}.$$

$$-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\frac{\text{इ}^{\text{४}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु२ ण थ}$$

$$+\frac{\text{१}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\left(\tfrac{\text{५९}}{\text{४}}\text{ठ}^{\text{३}}\,\text{इ}+\tfrac{\text{२५५}}{\text{१६}}\,\text{ठइ}^{\text{३}}-\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\,\text{ठ ल}^{\text{२}}\,\text{इ}\right)\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{२६३}}{\text{८}}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ})\;\text{थ}+\tfrac{\text{१३}}{\text{३}}\,\frac{\text{इ}^{\text{४}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु४ ण थ}$$

$$+\tfrac{\text{१७}}{\text{२}}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ}^{\text{२}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}+\text{२ण})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{२३१}}{\text{१६}}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ण}-\text{ड})\;\text{थ}$$

$$-\left(\tfrac{\text{५}}{\text{४}}+\tfrac{\text{९}}{\text{४}}\,\text{ठ}\right)\frac{\text{इं}^{\text{२}}\,\text{इ}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{ण}+\text{२ड})\;\text{थ}$$

$$-\tfrac{\text{३३}}{\text{१६}}\,\frac{\text{ठ}^{\text{२}}\,\text{इ इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ण}+\text{ड})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{३५}}{\text{२}}\,\frac{\text{ठ इ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ड})\;\text{थ}$$

$$-\tfrac{\text{१५}}{\text{२}}\,\frac{\text{ठ इ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}+\text{ड})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{४५}}{\text{१६}}\,\frac{\text{ठ इ}^{\text{३}}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}-\text{ण})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{९}}{\text{१६}}\,\frac{\text{ठ ल}^{\text{२}}\,\text{इ}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२}-\text{२ठ}-\text{२ए}+\text{ण})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{\text{२१}}{\text{२}}\,\frac{\text{ठ इ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२ण}-\text{ड})\;\text{थ}$$

$$-\tfrac{\text{२१}}{\text{२}}\,\frac{\text{ठ इ}^{\text{२}}\,\text{इं}}{(\text{१}-\text{ठ})^{\text{२}}}\,\text{भु}\;(\text{२ण}+\text{ड})\;\text{थ}$$

$$-\frac{८}{६}\,\frac{\text{ल}^{२}\,\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;\text{२ए थ}-२\,\frac{\text{ल}^{२}\,\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(\text{२ए}+\text{२ण})\text{थ}$$

… … … (१४)

$$[१५]-\tfrac{१}{२}\,\text{प त}\;(\text{क}-\text{न})\;\text{भु}\;(\text{क}-\text{न})$$

$$-\frac{१३}{६}\,\frac{\text{इ}^{४}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;\text{२ ण थ}-\frac{१७}{४}\,\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इ}^{३}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-\text{२ठ})\;\text{थ}$$

$$-\frac{१}{(१-\text{ठ})^{२}}\left(\tfrac{५९}{१६}\text{ठ}^{३}\text{इ}+\tfrac{८५}{१६}\text{टइ}^{३}-\tfrac{३}{१६}\text{ठ ल}^{२}\text{इ}\right)\text{भु}(२-\text{२ठ}-\text{ण})\;\text{थ}$$

$$+\left(\tfrac{५}{४}+\tfrac{९}{४}\text{ठ}\right)\,\frac{\text{इ}^{३}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{३}}\,\text{भु}\;(\text{ण}-\text{२ड})\;\text{थ}$$

$$-\frac{४५}{१६}\,\frac{\text{ठ इ}^{३}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-\text{२ठ}-\text{३ण})\;\text{थ}$$

$$-\frac{७७}{१६}\,\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इ}\;\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-\text{२ठ}-\text{ण}-\text{ड})\;\text{थ}$$

$$+\frac{११}{१६}\,\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इ}\;\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-\text{२ठ}-\text{ण}+\text{ड})\;\text{थ}$$

$$-\frac{९}{१६}\,\frac{\text{ठ ल}^{२}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-\text{२ठ}-\text{२ए}-\text{ण})\;\text{थ}+\frac{१}{२}\,\frac{\text{ल}^{२}\,\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;\text{२ ए थ}$$

… … … (१५)

$$[१६]+\tfrac{१}{२}\,\text{द}_{१}\,\text{द}_{२}\;(\text{म}_{१}+\text{म}_{२})\;\text{भु}\;(\text{म}_{१}+\text{म}_{२})\;\text{य}.$$

$$+\frac{५५}{१६}\,\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-\text{२ठ}+\text{२ण})\;\text{थ}$$

$$+\frac{२२५}{१६}\,\frac{\text{ठ इ}^{३}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-\text{२ठ}+\text{ण})\;\text{थ}$$

$$-\left(\tfrac{५}{२}+\tfrac{१५}{४}\text{ठ}\right)\,\frac{\text{इ}^{२}\;\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(\text{२ण}+\text{ड})\;\text{थ}$$

$$-\frac{५}{८}\,\frac{\text{ल}^{२}\,\text{इ}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(\text{२ए}+\text{२ण थ})$$

$$-\left(\tfrac{११}{४}+\tfrac{३३}{८}\text{ठ}\right)\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}+\text{इ})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{४९५}{६४}\frac{\text{ठ}^{३}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(४-४\text{ठ}-\text{ण})\;\text{थ}$$

$$-\left(\tfrac{१५}{४}+\tfrac{४५}{८}\text{ठ}\right)\frac{\text{ठ}\,\text{इ}\,\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}-\text{ण}+\text{इ})\;\text{थ}$$

$$-\tfrac{११}{१६}\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{ल}^{२}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}+२\text{ए})\;\text{थ}$$

$$+\left(\tfrac{१}{२}+\tfrac{३}{४}\text{ठ}\right)\frac{\text{ल}^{२}\,\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२\text{ए}+\text{इ})\;\text{थ}$$

$$-\tfrac{४५}{३२}\frac{\text{ठ}\,\text{ल}^{२}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}+२\text{ए}-\text{ण})\;\text{थ}\;\ldots\;\ldots\;(१६)$$

[१७] $-\tfrac{१}{२}\,\text{द}_{१}\,\text{द}_{२}\,(\text{म}_{१}-\text{म}_{२})\;\text{भु}\;(\text{म}_{१}-\text{म}_{२})\;\text{य}.$

$$+\tfrac{७५}{३२}\frac{\text{ठ}\,\text{इ}^{३}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}-३\text{ण})\;\text{थ}$$

$$+\left(\tfrac{५}{२}+\tfrac{१५}{४}\text{ठ}\right)\frac{\text{इ}^{२}\,\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२\text{ण}-\text{इ})\;\text{थ}$$

$$+\left(\tfrac{११}{४}+\tfrac{३३}{८}\text{ठ}\right)\frac{\text{ठ}^{२}\,\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}-\text{इ})\;\text{थ}$$

$$-\left(\tfrac{१}{२}+\tfrac{३}{४}\text{ठ}\right)\frac{\text{ल}^{२}\,\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२\text{ए}-\text{इ})\;\text{थ}$$

$$-\tfrac{१६५}{६४}\frac{\text{ठ}^{३}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;\text{ण}\;\text{थ}$$

$$+\left(\tfrac{१५}{४}+\tfrac{४५}{८}\text{ठ}\right)\frac{\text{ठ}\,\text{इ}\,\text{इं}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}-\text{ण}-\text{इ})\;\text{थ}$$

$$+\tfrac{४५}{३२}\frac{\text{ठ}\,\text{ल}^{२}\,\text{इ}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(२-२\text{ठ}-२\text{ए}-\text{ण})\;\text{थ}\;\ldots\;\ldots\;(१७)$$

[१८] $+\,\text{द}^{२}\,\text{म}\;\text{भु}\,२\text{म}\;\text{य}.$

$$+\tfrac{२५}{१६}\frac{\text{इ}^{४}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\,४\,\text{ण}\;\text{थ}+\tfrac{१२१}{६४}\frac{\text{ठ}^{४}}{(१-\text{ठ})^{२}}\,\text{भु}\;(४-४\text{ठ})\;\text{थ}$$

$$+ \frac{२२५}{३२} \frac{ठ^{२} इ^{२}}{(१-ठ)^{२}} \text{ भु } (४ - ४ठ - २ण) \text{ थ}$$

$$+ \frac{१}{१६} \frac{ल^{४}}{(१-ठ)^{२}} \text{ भु}^{४} \text{ ए थ}$$

$$+ (४ + ६ठ) \frac{ठ \; ई^{२}}{(१-ठ)^{२}} \text{ भु२ड थ} \;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots \quad (१८)$$

५१२. वरच्या लेखांत जीं पदें निघाली आहेत, त्या प्रत्येक पदाला $\frac{१}{(१-ठ)}$ हा किंवा याचा वर्ग घन गुणक आहे. त्यां पदांमध्यें ठ इ ल ई हे गुणक आहेत. ह्या गुणकांच्या किंमती ४८३ व्या लेखांत दिल्या आहेत. त्या घेऊन वरच्या लेखांत निघालेल्या सर्व पदांच्या किंमती काढिल्या. मात्र प्रत्येक पदाला $\frac{१}{(१-ठ)}$ हा गुणक कायम ठेविला. $\frac{१}{(१-ठ)^{२}}$ असेल तर $\frac{१}{(१-ठ)}$ हा एक गुणक ठेवून एका गुणकानें गुणून किंमती घेतल्या. यास्तव कांहीं पदांना $\frac{१}{(१-ठ)}$ नें गुणावें लागलें व कांहीं पदांना $\frac{१}{(१-ठ)^{२}}$ या पदानें गुणावें लागलें. याकरितां

$$\frac{१}{(१-ठ)} = १ + \frac{१}{१३} + \frac{१}{१३} \text{ चा } \frac{१}{२०} + \frac{१}{१३} \text{ चा } \frac{१}{१०००}$$

$$\frac{१}{(१-ठ)^{२}} = १ + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} \text{ चा } \frac{१}{११०}$$

हे गुणक घेऊन गुणाकार केले. $\frac{१}{(१-ठ)}$ हा एक गुणक सर्व पदांना ठेवण्याचें कारण ही सर्व पदें ४९१ व्या ब च्या किंमतींत धनर्ण करावयाची आहेत. ४९१ व्या लेखांतील सर्व पदें − १ ने गुणून जो पदसंघ झाला त्यांत बं च्री पदें ऋण करून घेऊन निघालेला परिवर्तन पद मिळविला आणि त्याला $\frac{१}{म}$ नें गुणिलें. तेव्हां अखेर गुणक $\frac{१}{(१-ठ)^{म}} = \frac{१}{१२} - \frac{१}{७६७}$ यानें गुणिले म्हणजे पळात्मक गुणकाचें तिथिकाल दाखविणारें समीकरण होते. तें पुढे दाखविलें आहे. तें समीकरण लिहिण्यापूर्वी केंद्रामध्यें जी थ ही संख्या आणिली आहे तिचें स्पष्टीकरण केलें पाहिजे.

५१३. थ ही संख्या कोनाच्या वृत्तपरिमाणाची आहे, आणि ती हवी ती संख्या आहे. ह्या संख्येचें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें आहे:—

$$थ = \frac{ब - बं + घ}{१ - ठ} = क म + \frac{१}{१ - ठ} \text{ पदसंघ}$$

ह्या समीकरणाला म ही चद्रांची मध्यमगति (एका पळांतील विकला) ह्या संख्येने भागिलें तेव्हां—

$$\frac{थ}{म} = \frac{घ}{(१ - ठ)म} + \frac{ब - बं}{(१ - ठ)म} = क + \frac{१}{(१ - ठ)म} \times \text{ पदसंघ}$$

ह्यांतील बं—बं ही संख्या स्वीकारलेली आहे. तिचें स्वरूप १२ अंश × न असें घेऊं. ब — बं हे अंतर १२ अंश झाले म्हणजे १ तिथि झाली, २४ अंश झाले म्हणजे २ तिथि झाल्या या अर्थानें ब — बं हें अंतर न तिथींचें आहे असें घेऊं. १२ अंश हें वृत परिमाणानें म्हणजे केवल संख्येनें $\frac{२\pi}{३०}$ आहे. तेव्हां $ब - बं = \frac{२\pi}{३०} \times न$

$$\text{म्हणून,} \quad \frac{थ}{म} = \frac{घ}{(१ - ठ)म} + \frac{२\pi}{३०} \times \frac{न}{(१ - ठ)म}$$

$$= \frac{घ}{(१ - ठ)म} + \frac{२\pi}{३०(१ - ठ)म} \times न$$

$$= \frac{घ}{(१ - ठ)म} + \frac{१२ \text{ अं}}{१२\cdot१९०७५} \text{ विकला } \times न$$

$$= \frac{घ}{१२\cdot१९०७५} + ३५४३\cdot६७०५६ \text{ पळें } \times न$$

घ ही संख्या ज्या क्षणीं मध्यमचंद्र ० होता त्या क्षणीचे सूर्याचे मध्यम भोग दाखविणाऱ्या कोनाची संख्या वृत्तपरिपरिमाणाची आहे. त्याच्या विकला करून त्यांस १२·१९०७५ नीं भागिलें म्हणजे पळांची संख्या येतें. ह्या पळांच्या संख्येला आद्यकाल म्हणूं. हा चांद्रलासाचा आरंभकाल (मध्यममानाचा) होय. ह्यांत प्रत्येक तिथीचा मध्यमकाल ५९ घ. ३·६७२ पळें मिळवित गेल्यानें तिथींचे मध्यमकाल होतील. ह्या मध्यमकालास फल संस्कार केल्यानें तीथींचे स्पष्टकाल होतील. ५०५ व्या लेखांत दर्शविल्याप्रमाणें आणि ब च्या स्थानीं थ लिहल्यानें जीं केंद्रें होतात तीं, तिथीच्या मध्यमकालाच्या अंति चंद्राच्या मध्यम गतीनें होणारी मं ति च्यु इत्यादि

केंद्रे होत. तेव्हां तिथींचे स्पष्टकाल दाखविणारें समीकरण खालीं दिल्याप्रमाणें होतें. ह्या समीकरणांत काल दाखविणाऱ्या संख्या पळांच्या आहेत :—

तिथींचा स्पष्ट काल =

आद्य काल + ३५४३·६७१ × न
— १८६४·० भु मं + ४४·७ भु २ मं
+ १८·० भु ३ मं + ३·७ भु ४ मं
— १५८·४ भु २ ति + ११·० भु ति
— ३७८·२ भु च्यु + ३४·० भु २ वि
+ ६२३·४ भु सं + ८·४ भु २ सं
— ३१·८ भु (मं + सं) + २५·९ भु (मं — सं)
— १५·२ भु (२ति — २मं) + १४·४ भु (२ति + मं)
— १०·३ भु (च्यु — सं) + ८·३ भु (२ वि — मं)
— ७·३ भु (२मं + सं) + ७·३ भु (२ मं — सं)
— ५·३ भु (२ ति — सं) + ४·८ भु (२ति + २मं)
— ४·८ भु (२ति — २वि) — ३·८ भु (२ति + सं)
— २·३ भु (२ वि + मं) — २·० भु (२ वि + २ मं)
— १·४ भु (२ वि — सं) + १·४ भु (२ वि + सं)
— १·२ भु (२ति — २मं + सं) — ०·८ भु (२ति — २मं — सं)

योग पद्यावली

५१४. चंद्रसूर्याच्या निरयन भोगांची बेरीज इच्छिलेल्या कोनाइतकी व्हावयास किती काल लागेल, किंवा ती बेरीज कोणत्या क्षणीं होईल, तो काल ठरविण्याचें समीकरण सिद्ध करावयाचें आहे. असें समीकरण सिद्ध केलें म्हणजे त्यावरून विष्कंभादि २७ योगांचे भोग्य काल ठरवितां येतील. तें समीकरण आतां आपण सिद्ध करूं. तिथींचे स्पष्टकाल ठरविण्याचें समीकरण ज्या पद्धतीनें सिद्ध केलें त्याच पद्धतीनें हें योगांचें काल ठरविण्याचें समीकरण सिद्ध होतें. ती सिद्धता खालीं देत आहे.

५१५. वरच्या तिथींच्या समीकरणाकरितां ब आणि बं यांची समीकरणें ५०८ व्या लेखांत दिलीं आहेत, त्याच समीकरणांचा उपयोग करून योगांचें समीकरण सिद्ध करिता येतें. तिथि प्रकरणीं ह्या समीकरणाची वजाबाकी केली आहे, ती आतां बेरीज करूं.

ब + बं = कम + कमठ + घ + २२६२४·८४ भुणकम

+ +

$$+ ६२४०\cdot४३ भु\,(ठकम + घ - द्र)$$

$$+ ६२\cdot८३ भु\,(२ठकम + २घ - २द्र)$$

$$(ब + बं - घ)\frac{१}{.+ठ} = कम + २२६२४\cdot८४\frac{१}{१+ठ} भुणकम$$

$$+ \qquad\qquad +$$

$$थ = कम + २२६२४\cdot८४\frac{१}{१+ठ} भुणकम$$

$$+ \qquad\qquad + \cdots\cdots (अ).$$

ह्या समीकरणाचें केंद्र परिवर्तन म्हणजे कम स्थानीं स्थ हें पद आणिले म्हणजे योगांचे स्पष्टकाल साधनाचें समीकरण सिद्ध होईल.

५१६. वरच्या लेखांतील (अ) समीकरणाचें केंद्र परिवर्तन केलें असतां त्या समीकरणाचें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें होईल. केंद्र परिवर्तनानें जीं नवीन पदें उत्पन्न होतील तीं ५११ व्या लेखांत जीं पदें उत्पन्न झाली तींच पदें उत्पन्न होतात. त्यामध्यें भिन्नत्व कोणते येईल ते दाखवितों. $\frac{१}{१-ठ}$ यांच्या जागीं $\frac{१}{१+ठ}$ येतो. थ च्या जागी $(ब + बं - घ)\frac{१}{१+ठ}$ हें पद येतें. तसेंच ५१० व्या लेखांतील ब — बं च्या जागीं ब + बं येतो, भुडकम याला गुणक (+ २ इं — ३ठइं) हा येतो. याशिवाय दुसरा कांहीं फरक येत नाहीं. परिवर्तन करून आलेल्या समीकरणाचें स्वरूप खालीं दिल्याप्रमाणें होतें :—

$$क = \frac{थ}{म} = २२६२४\cdot८४\frac{१}{१+ठ} \times \frac{१}{म} भुणथ + इत्यादि.$$

$$क = \left\{ (ब + बं)\frac{१}{(१+ठ)म} - \frac{घ}{(१+ठ)म} \right\}$$

$$- \frac{२इ}{(१+ठ)म} भुणथ.$$

त्या समीकरणांतील प्रत्येक पदाला $\frac{१}{(१+ठ)म}$ हा गुणक आहे. (१ + ठ)म ही चंद्र आणि सूर्य यांच्या मध्यम गतीची बेरीज आहे. (ब + बं) हा एक समर्याद परंतु चल असा कोन आहे आणि ह्या कोनाचें चलन समान कालांत समान असें होतें, $\frac{१}{(१+ठ)म}$ हा त्यास गुणक आहे. घ हाही एक कोन आहे.

तोही स्थीर असा कोन दाखवितो. आणि त्यास $\frac{१}{(१ + ठ) म}$ या गुणकानें गुणिल्यानें स्थीर असा काल त्या गुणाकारानें दाखविला जातो. यावरून $\frac{थ}{म}$ हा अपूर्णांक योगाचा मध्यमकाल दाखवितो. एका योगाचा मध्यम काल

८०० कला ÷ १४·१६१९७ कला = ५६.४८९३ घटिका इतका आहे. किंवा ४८००० विकला ÷ १४·१६१९७ विकला = ३३८९.३५८ पळ इतका आहे. प्रत्येक फलाच्या विकलात्मक गुणकाला १४·१६१९७ विकलानीं भागिल्यानें पळात्मक गुणक येतो. विकलांच्या संख्येला कृती सुगम व्हावी म्हणून खालीं दाखविलेल्या गुणकानें गुणिल्यानें पळ येतात. तो गुणक असा--

$$विकला \times \left(\tfrac{१}{१४} - \tfrac{१}{१४} \text{ चा } \tfrac{१}{१००} - \tfrac{१}{१४} \text{ चा } \tfrac{१}{१००} \times \tfrac{१}{७}\right)$$

५१७. प्रत्येक फलाच्या केंद्रामध्यें थ ही संख्या आहे. केंद्रांत थ संख्येला कांहीं गुणक (केंद्रगुणक) असून स्थीर संख्या क्षेपक आहेत जसें--

$\left\{ (२ - २ठ - ण) थ - २घ + उ \right\}$ ह्यातील थ च्या जागीं त्याची किंमत

$$\left\{ (ब + बं) \frac{१}{(१ + ठ)} - \frac{घ}{(१ + ठ)} \right\}$$

हा कोन आहे. आणि तो योगाचा मध्यमकाल ज्या क्षणीं पूर्ण होईल त्या क्षणींचा आहे. तो $\frac{२\pi}{२७}$ न हा आहे. $\frac{२\pi}{२७}$ = ८०० कला होतात. म्हणजे थ = ८०० × न कला.

$$२थ = २ \times ८०० \times न \text{ कला}$$

$$\frac{२थ \times म}{(१ + ठ) म} = \frac{२ \times ८०० \times न}{(१ + ठ) म} \times म.$$

ह्या समीकरणांत $\frac{८००न}{(१ + ठ) म}$ हा योगाचा मध्यम काल आहे. ह्या मध्यम कालास म ह्या चंद्र गतीनें गुणिलें म्हणजे, मध्यम चंद्र होतो.

$$२ \times \frac{८००न}{(१ + ठ) म} \times म = २ \text{ मध्यम चंद्र ;}$$

ह्याचप्रमाणें

$$\frac{- २ठथ \times म}{(१ + ठ) म} = -२ \text{ मध्यम रवि गति}$$

$$-\frac{\text{२ठथ} \times \text{म}}{(\text{१} + \text{ठ})\text{म}} - \text{२घ} = -\text{२ मध्यम रवि}$$

तसेंच $-\dfrac{\text{णथ} \times \text{म}}{(\text{१} + \text{ठ})\text{म}} + \text{उ} = -$ चंद्राचें मंदकेंद्र.

ह्यावरून कळून येतें कीं, प्रत्येक फलाचें केंद्र हें योगाच्या मध्यम कालक्षणींचे चंद्राचें केंद्र आहे. याकरितां त्यास मं ति च्यु ह्या अक्षरात्मक नामांनीं उच्चारितां व लिहिता येतें. त्याप्रमाणें लिहून योगांचे स्पष्ट काल दाखविणारें समीकरण खालीं लिहिलें आहे. त्यांतील गुणकसंख्या पळाच्या संख्यांचे आहेत. ह्या समीकरणांत कालाची स्थीर संख्या

$-\dfrac{\text{घ}}{(\text{१} + \text{ठ})\text{म}}$ ही आहे. $\dfrac{\text{ब} + \text{बं} - \text{घ}}{(\text{१} + \text{ठ})\text{म}}$ हा काल, योगाचा मध्यम

परंतु तो कोणत्या तरी योगाचा पूर्ण काल आहे, असे समजतें. म्हणजेच ब + बं — घ हा कोन ८०० कलांनी विभाज्य आहे. मध्यम रवि आणि मध्यम चंद्र यांच्या बेरजेला ८०० कलांनीं भागून जी पूर्णांक संख्या येईल ते गत योग ज्या कला बाकी राहतील त्या चालू योगाच्या गत कला होत. त्यांस किंवा त्यांच्या विकला करून त्यास $\left(\frac{\text{१}}{\text{३४}} - \frac{\text{१}}{\text{३४००}} - \frac{\text{१}}{\text{९८००}}\right)$ यांनीं गुणून पळात्मक गुणाकार हा चालू योगाचा भोग्यकाल (मध्यम मानाचा) होईल. त्यास येथें आद्यकाल असें म्हणतों. योगांचे स्पष्ट काल दाखविणारें समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणें आहे :—

योगांचा स्पष्ट काल =

आद्यकाल + ३३८९·३५८ × न
— १६०५·३ भुमं + २५·७ भु२मं
+ १२·० भु३मं + २·३भु४मं
— १४०·७ भु२ति + ९·३ भुति
— ३२५·९ भुच्यु + २९·० भु२वि
— ४४०·७ भुसं — ३·१ भु२सं
— १३·३ भु (२ति — २मं) + ४.३ भु (२ति + २मं)
— ९·४ भु (च्यु — सं) + ८·५ भु (२ति + मं)
— ५·४ भु (२ति — सं) —२·६ भु (२ति + सं.)
— १४·१ भु (मं — सं) — १६·२ भु (मं. + सं.)
+ ७·० भु (२वि — मं.) — १·४ भु (२वि + २मं)
— १·३ भु (२वि + मं) — १·२ भु (२वि — सं)
+ १·२ भु (२वि + सं) — ०·८ भु (२ति — २वि + मं)

GPN—A-2548—SMSBLCB—7-68—2,229—PA5*

